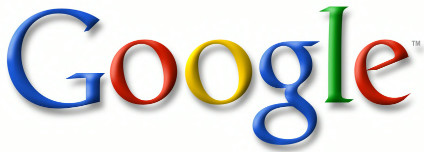
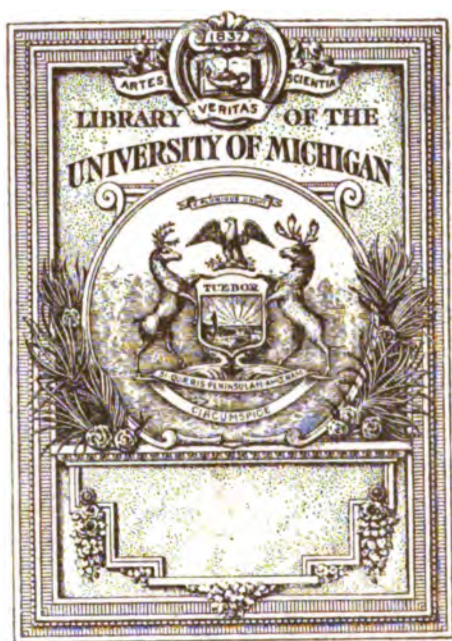


No. 6

[illegible]


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE


EVCLIDES
J. Wandelaar inv. et fecit.
1715

PHORONOMIA,

SIVE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM SOLIDORUM ET FLUIDORUM

LIBRI DUO,

AUTORE

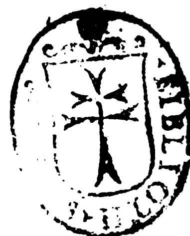
JACOBO HERMANNO Basil. 1678-1733

antehac in Illustri Patavino Lyceo; *nunc vero in Regio* Viadrino *Math. Prof. Ord.*

& Reg. Scientiarum Societatis, quæ Berolini *est, Sodali.*

[redacted]





AMSTELÆDAMI,

Apud ROD. & GERH. WETSTENIOS H.FF.

M. D. CCXVI.

Alex. Ziwet
gt.
9-7-1922

VIRO

PERILLUSTRI

ATQUE

CONSULTISSIMO

GODOFREDO GULIELMO

LEIBNITIO,

CONSILIARIO IMPERIALI AULICO,

ET MAGNÆ BRITANNIÆ REGIS, PRINCIPISQUE
ELECTORIS BRUNSVICENSIS

INTIMO &c.

REGIÆ SOCIETATIS BORUSSICÆ

PRÆSIDI.

ITEM ET RELIQUIS

EJUSDEM SOCIETATIS

MEMBRIS,

VIRIS CLARISSIMIS

SUIS QUIQUE TITULIS

CONDECORATISSIMIS,

OPUS HOC

PHYSICO-MATHEMATICUM

IN SUÆ ERGA COLLEGAS OBSERVANTIÆ

TESTIMONIUM

DICAT

JACOBUS HERMANNUS.

AD BENEVOLUM
LECTOREM.

[redacted]

CUm ante hoc quinquennium circiter in Illuſtri Lyceo Patavino Hydroſtaticam publicis meis Lectionibus exponendam eligerem, tam ob argumenti jucunditatem, quam ob utilitatem non contemnendam in Philoſophia Naturali, cogitatio ſimul animum ſubiit, forte non ab re futurum, ſi, quæ auditoribus meis explicuiſſem, in publicum mitterem. In hoc deinceps propoſito eo magis confirmatus fui firmiusque perſtiti, quo id magis amicis harum rerum intelligentibus probari cognovi.

Archimedes primus, quod conſtet, Hydroſtaticæ rudimenta tradidit in ſuis *De Inſidentibus Humido* Libris, ſed optima ab ipſo in Philoſophiam Naturalem ſparſa ſemina magno temporis tractu ſterilia jacuere, usque dum ſagaci Galilæi ingenio fœcundata germinare inciperent. [redacted] Etenim magnum hoc Philoſophiæ lumen Archimedea principia non ſolum luculentius expoſuit, explanavit, nonnullisque novis ſpeculationibus auxit, ſed [redacted] etiam ſingulare phænomenon, ab aquilege tamen acceptum, Philoſophos docuit, non poſſe aquam in antliis ſuctoriis ultra octodecim cubitorum altitudinem attolli, &, quanquam veram ejus rationem non aſſequutus eſſe videtur, de elegantiſſimo tamen invento optime eſt meritus, cum hoc ejus phænomenon, ſeu obſervatio, non tantum tubi Torricelliani experimentum pepererit, ſed etiam occaſio fuerit, qua Hydroſtaticæ principia ad aërem ipſum traducerentur. [redacted] Nam Euangeliſta Torricellius Magni Ducis Hetruriæ FERDINANDI II. Mathematicus, & Galilæi in hoc munere ſucceſſor, obſervationem illam attenta men-

te

te revolvens pro ea, qua erat ingenii ſagacitate, limitatam illam duodeviginti cubitorum altitudinem in antliis à determinata atmoſphæræ preſſione provenire poſſe demum ſuſpicari cœpit, qua de re ut certior fieret, cum hydrargyro experimentum tentavit, &, ut præſagiebat, reſpondit eventus. Tam nobile inventum diu deliteſcere non poterat, nam paulo poſt ejus ortum ſtatim in Gallia aliiſque regionibus percrebuit, & curioſorum animos in ſe convertit. Hinc Blaſius Paſcalius ſagaciſſimi ingenii juvenis, quæ fama ex Italia attulerat experiundi cupidus, non ſine inſigni voluptatis ſenſu ea omnia iteratis experimentis veritati conſentanea invenit, & experimenti proceſſum atque eventum in peculiari libello De Gravitate Atmoſphæræ (*De la Peſanteur de la Maſſe de l'Air*) expoſuit, cui alium ingenioſum tractatum De Æquilibrio Liquorum præmiſit. Paſcalii conatus deinceps Anglorum ingenia excitavit, atque inter ea Celeberrimum Philoſophiæ experimentalis cultorem Robertum Boylium, qui in Paradoxis ſuis Hydroſtaticis experimenta captu facillima, atque ab innumeris cum ſucceſſu repetita, memoriæ prodidit; hæc vero omnia latius pertractata multiſque aucta fuere à Borellio & Mariotto, quorum opera notiora ſunt, quam ut ulla recenſione indigeant, ambo enim hi Autores, præter Hydroſtatica, etiam plura ad hydraulicam pertinentia attigerunt, de motibus aquarum aliiſque, in quibus, quem antea laudavi, Torricellius, & Benedictus Caſtellus ipſis facem prætulerunt; Gulielminus verò doctrinam de motu aquarum magis deinceps auxit, atque fluminibus feliciter applicuit; verum laudatis hisce viris ulterius longe proceſſit Celeberrimus Petrus Varignon, qui eam Hydraulicæ partem, quæ menſuram liquorum fluentium reſpicit, plurimum protendit in duobus præclaris ſpeciminibus Actis Academiæ Regiæ Pariſienſis inſertis, quorum prius circa conſtructionem omnis generis Clepſydrarum verſatur; alterum verò argumentum de liquoribus effluen-

fluen-

fluentibus eorumque mensuris ex professo excolit. Ante hosce duos postremos laudatissimos viros Summus Geometra Isaacus Newtonus in aureo opere, quod *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* inscripsit, plura tradidit corporum fluidorum vires & affectiones concernentia, quo referenda sunt ea, quæ circa vim elasticam aëris, densitates atmosphæræ, quæ circa resistentias figurarum in fluidis incedentium, circa motus corporum in mediis resistentibus, circa agitationem aëris in productione soni, atque alia demonstrata exhibuit: ejusque exemplo permoti Illustris Leibnitius atque Nobilissimus Hugenius meditationes suas circa motus corporum in medio resistenti publico diutius invidere noluerunt; quod argumentum postea generaliter pertractavit supra laudatus Varignonius. Celeberrimi vero deque reconditiori Geometria optime meriti Bernoullii Fratres diversa Problemata circa fluidorum actiones in corpora dura, sed flexibilia, contemplati sunt, atque interiori Geometria ipsis opem ferente, elegantes curvas velariæ at lintei intus stagnantem liquorem continente, in apricum produxerunt, ut alia multa taceam.

Sed, quia eximia hæc inventa in variis Diariis aliisque libris dispersa & ex diversis sæpe principiis elicita sunt, gratum me iis facturum, qui hisce rebus delectantur, existimavi, si omnia juxta genuinum ordinem in unum collecta, ex paucis iisque simplicibus principiis deducta & aucta publicæ luci sisterem. Verum hunc vix ingressus campum illicò perspexi, propositum istud me nunquam feliciter ad exitum deducturum, nisi omnia altius repeterem, pluraque ex Mechanica corporum solidorum mutuarer, ad id ut tyrones opusculum citra offensionem percurrere possent, nec ad ejus intelligentiam auxilia aliunde conquirere necessum haberent. Cum verò in rebus hisce subsidiariis explicandis materia in tantum excreverit, ut non contemnendam opusculi partem constitueret,

natus demum est præsens tractatus, quem generaliori titulo *Phoronomiæ*, seu *De Viribus & Motibus Corporum solidorum & fluidorum*, insigniendum & in duos libros dividendum duxi, quorum prior vires & motus corporum solidorum, fluidorum vero alter, evolveret.

Liber primus duas continet Sectiones in sua Capita subdivisas, quarum prior versatur circa simplices gravitationes solidorum, seu circa leges æquilibrii potentiarum mechanicarum inter se commissarum, earumque medias directiones, sive hæ potentiæ corporibus inflexibilibus & rigidis, sive flexibilibus applicatæ sint; qui duo casus nobis præbuerunt admodum generalia & forte non inelegantia theoremata, ex quibus deinceps leges æquilibrii solidorum & fluidorum facile definiuntur & solutiones Problematum catenariæ, velariæ, figuræ lintei, aliorumque nonnisi Corollariorum ad instar derivantur. Secunda Sectio motus doctrinam sibi vendicat, quatenus hi motus à gravitatis solicitationibus continuatis, seu continue operantibus proveniunt, vel qui ex collisione corporum inter se resultant. Hæc proinde secunda Sectio præcipua eorum omnium continet quæcunque circa motus acceleratos vel retardatos à gravitate uniformi, aut quomodocunque difformi, demonstrari possunt, tum etiam generaliter Isochronam definit quodcunque gravitatis systema assumi queat, idque in casu, quo gravium directiones in uno etiam eodemque puncto conveniunt. Et quia curvæ projectorum non in omni gravitatis difformis seu variabilis hypothesi algebraicæ esse queunt, canon generalis traditur, juxta quem gravitatem variare oportet, ad id ut missilia curvas algebraicas describant, & pro orbibus mobilibus propemodum circularibus facili ratione regula pro viribus centripetis, in curva mobili requisitis, traditur, ostenditurque deinceps quomodo ex data ejusmodi vi centripeta, seu solicitatione gravitatis, motus curvæ circularis inveniri queat. Post hæc se-

quis-

quitur theoria nova centri oscillationis, quæ propter simplicitatem suam non displicebit, ut opinor: ea tota fundatur in eo, quod solicitationes quædam assumtæ & in particulas oscillantes agentes in directionibus perpendicularibus distantiis particularum ab axe oscillationis æquipollent gravitatis pressionibus; ope hujus principii & comparationis penduli compositi cum simplice ei isochrono, illico reperitur longitudo hujus penduli simplicis, idque per unicam atque simplicem analogiam. Cum primum in hanc theoriam incidi, quod minimum ante triennium & quod excurrit, accidit, eam tantum gravitati uniformi, ut Hugenius & Jac. Bernoullius, applicueram, sed postea, ex quo in Acta Lipsiensia 1713. M. Febr. incidi, ubi Celeb. Joh. Bernoullius in §. 23. egregii sui Schediasmatis de nova centri oscillationis theoria, quæ tam ad pendula intra varios liquores oscillantia, quam extra eosdem, sese extendat, mentionem facit, in hisce etiam circumstantiis methodi meæ periculum facere cœpi optimo cum successu, nam sponte sua ea, quæ Bernoullius de sua tunc pollicebatur, & postmodum anno sequenti Mens. Jan. præstitit, ultro sese mihi obtulerunt statim post lectum specimen prius anni 1713. præterquam quod demonstratione facili id demonstratum dedi, quod Hugenius tanquam postulatum sibi concedi postulabat, centrum scilicet commune gravitatis omnium particularum, cujusque penduli compositi diffractis, quibus connexæ erant, vinculis ad eandem altitudinem attolli posse motu earum in altum converso, ex qua idem centrum ceciderat, particulis tamen inter se connexis. Ex memorabili ejusmodi naturæ lege methodo, ni fallor, nova regulas motus ex percussione corporum elasticorum derivavi.

Liber Secundus corporibus fluidis destinatus perplura complectitur. Agit enim de gravitationibus liquorum quorumlibet tum in plana subjecta, tum in latera vasorum, indeque canones derivantur circa vires vasorum, ut citra fracturam liquo-

ris pressiones perferre queant. De æquilibriis liquorum cum inter se, tum cum corporibus solidis ipsis immissis. De figuris, quas fluida corporibus flexibilibus, in quibus stagnant, inducunt. De gravitate & elasticitate aëris ac densitatibus atmosphæræ in omnia tellure distantia & in quacunque elasticitatis lege. De motu & mensura aquarum fluentium ex vasis quibuscunque erumpentium, aut in canalibus devolutarum. De effectibus fluidorum ex percussione, quò pertinent resistentiæ, quas figuræ in fluidis latæ patiuntur, harumque resistentiarum mediæ directiones, item problema velariæ & id genus alia. De motibus corporum in mediis resistentibus tam rectilineis quam curvilineis. De motu navium vento impulsarum. De motu circulari fluidorum. De motu aëris in productione soni; ac denique de motu intestino seu interno fluidorum, à quo calor pendet. Hisce summatim recensitis totum opusculum absolvitur.

Cum brevitati in omnibus studuerim, id cumprimis operam dedi, ut, quantum fieri poterat, cuncta generalibus theorematis comprehenderentur; ex quibus deinde particularia, tanquam Corollaria, possent deduci. Propterea liquores tanquam heterogeneos statim spectavi, atque eorum leges pressionis atque æquilibrii investigavi, ex quibus deinceps leges æquilibrii fluidorum homogeneorum facillime elicui. Sic etiam vectem rectilineum vel curvilineum in omnibus suis punctis à potentiis quomodocunque variantibus impulsum mihi proposui, in quo mediam potentiarum directionem investigarem, hocque modo in insignem proprietatem centrorum gravitatis, quam me primum invenisse putabam, incidi; sed quam etiam Celeb. Joh. Bernoulli in Libro nuper edito (*Essay d'une Nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux*) Cap. XII. §. VI. proponit. Sed Cl. hic Geometra recordabitur haud dubie se MStum meum vidisse, in quo theoremata huc facientia continebantur, priusquam laudatus suus liber editus esset, quemadmodum ego eius Propositio-

ſitionem propriam in eius libro, tunc adhuc inedito, pariter videram. Sic etiam problemata catenariæ, velariæ, &c. ad hoc generale reduxi: invenire figuram manentem lineæ flexilis in ſingulis punctis à potentiis ſecundum directiones quaſcunque impulſæ, cujus ſolutionem ſimpliciſſimam, ut mihi ſaltem videtur, exhibui. Et hoc modo in aliis procedere conatus ſum. Perſpicuitati, quantum potui, litavi; propterea multæ demonſtrationes provectioribus Geometris nimis prolixæ fortaſſe videbuntur, ſed ſciant velim Tyronum quoque rationem habendam mihi fuiſſe, quibus non ſemper in poteſtate eſt ea ſupplendi, quæ ſubinde ex demonſtrationibus brevitatis & elegantiæ gratia reſecantur mente neceſſario ſupplenda. Interim diffiteri nolo me etiam, quantum potui, elegantiam ſectatum eſſe, atque propterea demonſtrationes lineares algebraicis prætuliſſe, experientia multiplici edoctum, meditationem figurarum ſæpiſſime ſimpliciores & elegantiores ſuppeditare ſolutiones ac conſtructiones, quam Analyſin ſpecioſam. Specioſam dico, nam ſubinde utor analyſi geometrica, ſeu lineari absque ſymbolis algebraicis procedente, cujus beneficio multa elegantius obtinentur quam calculis analyticis, etſi non ſemper. Ejusmodi analyſi geometrica veteres uſos exiſtimo, quemadmodum ex Euclidis datis & Apollonii libello *de Sectione Rationis* à Celeberrimo Edmundo Hallæo edito non obſcure colligitur; ſimili etiam analyſi ſummus Newtonus ad ſtuporem usque uſus eſt in ſuis *Principiis*. In applicatione verò theorematum, tanquam loco magis idoneo, calculo algebraico ſubinde utor.

In his libris frequens curvarum eſt uſus ad repræſentandas virium, temporum, celeritatum, aliarumque ejusmodi affectionum proportiones, quas propterea curvas vocabulo *ſcalarum* inſignire ſoleo, prout Cavallerius & Vivianus Celeberrimi Geometræ diu ante me circa varios gravitatis gradus & momentorum corporum, Architectos imitati, qui lineam rectam

in plures particulas æquales interstinctam (ad id, ut ex ea præconceptorum operum ideas proportionaliter delineare possint) *scalam* Geometricam vocant. Patet ergo curvarum linearum contemplationem non solum non esse inutilem, sed absolute necessariam ad accuratam phænomenorum atque virium naturæ repræsentationem.

Quantum ad notationis formam attinet, cum duæ pluresve lineæ cum interjectis punctis conjunguntur, hoc significat lineas in se mutuo ductas esse, ut AB. CD significat rectangulum sub AB in CD, quod aliis sic designari solet AB + CD. Sic etiam §. 172. *num.* 11. tBE = N.$\surd$A. ang. ICD indicat tempus per BE exponi, facto ex N & radice ipsius A in angulum ICD, & sic in reliquis hujus Propositionis demonstrationisque locis, & in Propositionibus duabus sequentibus. Fractiones seu rationes ad Typothetarum commoditatem exprimuntur per duo puncta. Sic AB : CD idem est ac communiter $\frac{AB}{CD}$, & AB : CD = EF : MN idem ac vulgo AB. CD :: EF. MN. Cum plures fractiones sibi invicem adduntur, eæ vel commate, aut commate cum puncto, aut etiam parenthesibus distinguuntur: sic $f = a:b, + c:d.$ aut $f = a:b; + c:d$ idem est quod ordinarie $f = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Subinde quantitatibus aliæ parenthesibus inclusæ sine ullo interposito signo annectuntur, quod indicat quantitates esse æquales; sic, si haberetur A(a) id indicaret æquales esse vel æquivalentes magnitudines A & a, sin verò cum puncto interposito distinguantur ut A.(a) hoc denotat factum ex A in a; & sic in aliis. Expressiones vero $\surd(aa + bb)$; $(aa + bc)^m$ denotant $\sqrt{aa + bb}$, & $\overline{aa + bc}^m$ respective. Reliqua signa usitato sensu adhibentur.

HO-

HONORI AC MERITIS
Viri CL.
JACOBI HERMANNI,
LIBROS DUOS
DE VIRIBUS & MOTIBUS
CORPORUM.
edentis.

SUblimioris qui ſapientiæ
Arces reviſis pectore candido,
HERMANNE, Rauracis ab oris
Pruteniæ ſociate Muſæ.

Nuper retentus non fueras, ubi
Olim penates fixerat inclitus
Antenor, in ſacro receſſu
Italiæ Patavinus hoſpes:

Nec Te jocoſi dulcis amœnitas
Rheni reluctantem in patrio ſolo,
Nec rura, nec clari ſodales
Ingenii tenuere nexu,

Carum POLENUS ſideribus caput
Et LAZARINI flumina, nec ſolum
Dives Camœnarum, aut ſtupendum
Adriaci regimen Senatus;

Quin Te citato proriperes gradu
Linquens amœni compita Livii, &
Rheni Padique oblivioſo
Anteferens Viadrum ſuſurro.

Sic

Sic Tu beato saucius æthere
Prudens amicos deseris hospites,
Et porrigens lumen per orbem
Sidereos imitaris ignes.

Quæ cura vastum tendere limitem
Mortalis ævi & visere coelites
Immane pandentes theatrum
Per superûm spatiosa regna!

Quæ mater artis conscia lubricæ
Natura cœco clauserat in sinu,
Tu prodis & vires moventes
Cuncta jubes numeros subire;

Centrique amores latius explicas,
Pulchroque cingens æthercam facem,
Ductis per artem ceu choreis,
Ordine circumagis planetas.

Duris inhærens & fluidis onus
Tu curiosis in rationibus
Ducis, pererrans atque olympum
Cuncta domas abaco Minervæ.

NEWTONUS hospes divitis insulæ,
Sed nil habentis se magis aureum,
Hac primus ivit, Tuque forte
Nil populis dederis secundum.

Felicis ævi pignora! queis amor
Rebus creatis lumina reddere,
Et, quæ potenti more lusit,
Subdere jura Patris papyro

Porrecta ponto, fusa per ætherem
Terræque gyris indita: discite,
Mortalium coetus moveri &
Centra sequi potiora sole,

Atque

Atque ordinatis doctius ignibus;
Huc mentis alas atque animum vagum
  Conferte, nec soli cadente
    Sub numerum effluitote motu.

Postquam volatum mentis, & igneos
Sic appetitus rite sub orbitam
  Egistis, ad naves regendas
    Vertite & ad gravium librandam

Molem ruentum pondere corporum,
Aestus marinos & celerem fugam,
  Sinas & Indos computate,
    Subsidium decus atque vitae.

Haec in Poësi Castalidum nemus
Aut in puellarum ordinibus novem
  Non pandit, aut rostra, aut tribunal
    Mobile fulminibus Periclis.

Ite ergo Musae turba minor meae, &
Humanitatis docta volumina
  Submittite HERMANNO sagaci,
    Hunc hedera redimite vestra.

COLLEGAE CONIVNCTISSIMO

POS.

NICOLAVS WESTERMAN,
Eloq. Professor Ord. & Bibliothecarius Regius.

*** IN-

INDEX
SECTIONUM & CAPITUM.

C A-

CAPUT IV.

CAPUT V.

CAPUT VI.

CAPUT VII.

CAPUT VIII.

SECTIO SECUNDA.

CAPUT IX.

CAPUT X.

SECTIO TERTIA.

CAPUT XI.

CAPUT XII.

DE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM

PRÆNOTANDA.

1. Corpora absolute *moveri* dicuntur, cum contiguitas eorum cum partibus spatii undequaque infiniti & immobilis continue mutatur; atque adeo *Motus* ipse consistit in istiusmodi contiguitatis mutatione.

2. Partes illæ spatii infiniti & immobilis corpori contiguæ sunt, quæ ipsum immediate contingunt & ambiunt; spatiumque immobile dicitur, quia singulæ ejus partes eandem constanter distantiam, atque adeo eundem mutuo respectu situm servare intelliguntur, totumque spatium utpote undique in infinitum excurrens extra se ipsum vagari atque situm mutare, intelligi non potest.

3. Quia contiguitatis mutatio non nisi tractu temporis fieri potest, implicat enim ut unum idemque corpus simul & eodem tempore diversis spatii partibus contiguum sit, id est, in diversis locis existat; ideo omnis motus tempus involvit.

4. Tempus considerari potest tanquam æquabilis fluxus unius ejus signi indivisibilis, quod Momentum vel Instans nominabimus; eodem ferme modo quo Geometræ lineas motu puncti generari intelligunt, hoc tamen cum discrimine; quod puncti lineam describentis motus modo concitatior modo remissior fingi possit, cum è contrario fluxus momenti nostri æquabili, ut ita dicam, passu fiat, ita ut æquales temporis partes æquales fluentis momenti distantias, seu intervalla, à prima statione in qua ea incipiunt, sibi vindicent.

5. Hinc est, quod fluxus momenti nostri seu tempus soli intellectui hoc modo perceptibile, periodicis Corporum cælestium motibus vel Horologiorum usu aliorumve instrumentorum ope, & sensibile quodammodo reddatur, atque ad mensuram qualemcunque revocetur. Sed tales temporis mensuræ & repræsentationes non sunt exactæ in ultimo rigore, quandoquidem nec motus annuus solis,

nec qui ex eo atque diurno componitur, nec forte ipse diurnus, ut nonnulli Astronomi suspicantur, perfecte æquabiles sunt, ac propterea non nisi temporis apparentis mensuræ esse possunt. Ideo etiam Astronomi, qui temporis veri & æquabilis mensuram exquirunt, subinde apparens tempus ad tempus, quod vocant medium, quodque pro uniformi habent, reducere necessum habent. Et quanquam Horologiis oscillatoriis, prout ad insignem perfectionis gradum ab Hugenio perducta sunt, accurata veri seu æquabilis temporis mensura haberi posse videtur, eorum tamen motus Mathematice accurati & uniformes esse nequeunt, non quidem ob principiorum defectum, in quibus constructio eorum fundata est, sed ob defectum executionis; constat enim machinas nunquam in ultimo rigore tales parari posse, quales theoria construendas jubet, quia in theoria ab illis impedimentis atque circumstantiis tantum non semper abstrahi solet, quæ tamen in ipsa praxi numquam abesse solitæ sunt, successum machinæ accuratissimum eludentes.

6. Si fluens nostrum punctum, aut etiam corpus quodvis, uniformi passu incedit, perinde ac momentum temporis uniformiter fluere intelligitur, tunc motus puncti vel corporis *æquabilis* vocatur. Et iter seu longitudo, quæ etiam spatium vocari solet motu corporis descriptum, ad tractum temporis à fluente momento interea confectum, hoc est, ad tempus lationis applicatum seu divisum *Celeritas* vel *Velocitas*, appellatur.

7. Id, quod corpus ad motum concitat, seu ex quo motus corporis resultat, id est quo posito ponitur motus corporis, vocatur *Vis motrix*, quæ dividi potest, in *Vivam* & *Mortuam*.

8. *Vis viva* est, quæ cum motu actuali conjuncta est. Sic corpus, quod dato tempore datam lineam transmittit, vi viva præditum dicitur.

9. *Vis Mortua* verò est, ex qua nullus motus actualis resultat, nisi aliquamdiu in corpore continuata vel replicata fuerit. Talis vis foret unicus tantum gravitatis impulsus nullis aliis ei succedentibus, etenim non, nisi post infinitos demum gravitatis ictus indesinenter replicatos seu unos aliis continue succedentes, motus sensibilis gravi acquiritur. Sic etiam conatus centrifugi ex circulari motu oriundi, perinde ac gravitatis impulsus, sistunt exemplum vis mortuæ.

10. Majoris distinctionis gratia Vim Vivam simpliciter Vim, Mortuam verò cujuscunque demum generis fuerit, *Solicitationem* posthac vocabimus.

Præ-

Præcedentes virium definitiones satis aperte indicant in iis agi de *Vi activa* corporum.

11. Sed inest etiam corporibus *Vis* quædam *passiva*, ex qua nullus motus nec tendentia ad motum resultat; sed consistit in *Renixu* illo, quo cuilibet vi externæ mutationem status, id est motus vel quietis, corporibus inducere conanti reluctatur. Quæ resistentiæ vis significantissimo vocabulo à summo Astronomo Joh. Keplero *Vis inertiæ* dicta est. Hæc Vis inertiæ in corporibus quiescentibus se satis prodit; etenim corpus quodcunque A in aliud, sed quiescens, B impactum aliquid de sua vi & motu amittet, excipiensque B aliquid virium & motus ab impellente A acquiret. Ex quo claret, quiescens corpus B reapse vim aliquam passivam habere à vi in id incurrentis corporis A frangendam atque superandam; alioqui impellens A post occursum nihil de suo motu amisisse debuisset, cum corpus quiescens B, si resistendi facultate careret, alterius motui nullam remoram afferre possit, adeo ut ambo, impellens A & impulsum B, ea ipsa celeritate, qua corpus A ante occursum ferebatur, etiam post contactum incedere deberent, quod phænomenis adversari nemo non videt.

12. In hac Vi inertiæ materiæ fundata est Naturæ lex, qua *Cuilibet actioni æqualis & contraria est reactio.* In omni enim actione est luctatio inter corpus agens & patiens, & sine ejusmodi luctatione nulla actio, proprie sic dicta, agentis in patiens concipi potest, alioqui nulla stabilia haberentur Mechanicæ fundamenta, sed quilibet effectus à qualibet caussa oriretur.

13. *Vires activæ*, cujuscunque generis fuerint, gemino modo inter se collatæ variare possunt. Aliæ enim aliis intensive majores sunt, nulla habita ratione subjecti recipientis; cum duo corpora, quoad materiam æqualia, viribus inæqualibus pollent. Aliæ porro aliis etiam majores esse possunt, cum vires intensive æquales corporibus quoad materiam inæqualibus applicatæ sunt. Nam in genere vis cujusque corporis est ea, quæ resultat ex omnibus viribus partialibus, quibus singula corporis elementa seu minimæ particulæ pollent. Sic si vires, quibus singula corporis elementa afficiuntur, conspirantes sunt, *Vis totalis* erit complexus seu aggregatum omnium virium partialium.

14. *Quantitas materiæ* cujusque corporis, quam *Massam* deinceps vocabimus, est complexus (aggregatum) omnium particularum, quibus corpus compositum est. Ipsæ verò particulæ corporis con-

constitutivæ, ejus *elementa* brevius dicentur. Idcirco materia fluida, quæ in corporum meatibus latere potest, ad corporis substantiam pertinere non censetur, perinde ac aqua in spongiæ poris delitescens ad spongiæ substantiam non refertur.

15. *Volumen* cujusque corporis est spatium, quod corporis Materiam cum interspersis poris occupat. Ex collatione Massæ seu quantitatis materiæ cum Volumine resultat

16. *Densitas*, quæ est ratio quam materiæ quantitas in quolibet corpore habet ad corporis Volumen. Ut, si corpus in massam poris carentem colliquatum intelligatur, facile etiam intelligitur ejusmodi massam minus spatium occupaturam, quam antea cum intermixtis poris occupârat: Ratio talis Massæ poris destitutæ ad corporis Volumen nobis est *Densitas corporis*. Aliis densitas major minorve consistit in majore vel minore pororum amplitudine, quod cum nostra definitione satis convenit; nam quo major est ratio massæ poris expertis ad corporis Volumen, eò minor erit meatuum amplitudo, atque adeo major corporis densitas.

17. *Raritas* est corporum qualitas reciproca densitati, consistens in ratione Voluminis ad Massam seu Materiæ quantitatem, hæc enim duo semper unum idemque significare sciendum est.

Ex hisce definitionibus prono alveo fluunt sequentia consectaria, quæ, quia in sequentibus maximo usui erunt, breviter hoc loco sunt indicanda. Dicantur Corpora inter se collata C, c; eorum Massæ M, m; Volumina V, v; Densitates D, d; Raritates R, r; atque, hisce nominibus positis, erunt

18. *Quantitates Materiæ seu Massæ* (M, m) *in composita ratione Densitatum* (D, d) *& Voluminum* (V, v). Id est, $M : m = D.V : d.v$. Nam (§. 16.) $D = M : V$ & $d = m : v$, ergo $M : m = D.V : d.v$.

19. *Volumina* (V, v) *erunt in composita ratione ex directa Massarum & inversa Densitatum*. Id est, $V : v = (M : D) : (m : d)$. Liquet ex §. 17.

Volumina sunt etiam in composita ratione ex directa Massarum & directa Raritatum. Hoc est $V : v = M.R : m.r$. Nam (§. 16.) $R = V : M$, & $r = v : m$ ergo $V : v = M.R : m.r$.

20. *Densitates Raritatibus sunt reciproce proportionales*, *seu* $D : d = r : R$. Nam (§. 16. 17.) est $D = M : V$, & $R = V : M$, erit $1 : R = M : V = D$ atque adeò $D.R = 1$, & $d.r = 1 = D.R$; hinc $D : d = r : R$.

21. *Directio* cujuslibet vis motricis est linea, juxta quam hæc vis

vis in corpus agit, estque illa recta, quam mobile hac vi citatum actu describit aut saltem describere conatur.

22. *Vires* & *Motus conspirantes* sunt, quorum directiones congruunt, aut saltem parallelæ sunt, & easdem ad partes tendunt.

23. *Vires* verò & motus *Contrarii* hoc est, directe oppositi, quorum directiones quidem congruunt aut saltem æquidistantes sunt, sed in oppositas partes vergunt.

Hactenus generales corporum affectiones, quibus recensitæ virium species applicari possunt, breviter attigimus. Ordinis ratio insuper requirit ut corporum species, quibus vires illæ variè possunt applicari, ab invicem distinguantur; corpora enim sunt vel solida vel fluida; & ex diversis hisce speciebus diversa resultant phænomena.

24. *Corpora solida* aut *consistentia* dicuntur ea, quorum elementa saltem eousque cohærent, ut nulla corporis pars sensibiliter moveri possit, quin tota massa eundem motum participet. Cæterum ex observationibus Celeb. Dominici Cassini constat metalla frigori exposita nonnihil contrahi, & vice versa, quoad Volumen, extendi in locis calidis; & ejusmodi metallorum extensiones & contractiones, quibus haud dubie durissima quæque alia corpora plus minus obnoxia sunt, absque interno partium motu fieri nequeunt: sed quia hi motus, ex solis phænomenis per ratiocinia colligendi, in sensus immediate non incurrunt, definitioni isti nihil officere possunt; quandoquidem in ea corporum durorum, seu solidorum, elementa non absolute cohærere dicuntur, sed tantum eousque, ut ea ab invicem avelli aut moveri sensibiliter nequeant, quin totum corpus eodem motu abripiatur.

25. *Fluida* verò corpora sunt, quorum particulæ agilissimæ non cohærent, sed facile moveri possunt non motâ universâ fluidi massâ. In fluidis viscidis particulæ nonnihil cohærere videntur, sed talis earum adhæsio miram earumdem inter se mobilitatem non tollit, ac propterea talia fluida ex allata hac definitione non excluduntur.

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM

LIBER PRIMUS.

HIc Liber respicit *Corpora solida* dividiturque in duas sectiones, quarum prima versatur circa Æquilibra solicitationum gravitatis aliaque huc pertinentia, & sectio altera expendit motus, qui ex ejusmodi solicitationibus, ut libet variatis, resultant.

SECTIO I.

De Solicitationum Corporibus varie applicatarum Æquilibriis & Mediis Directionibus.

26. CUm Solicitationes variis corporibus applicatæ ita inter se committuntur, ut nulla earum reliquas vincere queat, ipsæ in *Æquilibrio* consistere dicuntur. Ejusmodi Solicitationes *Potentiarum Mechanicarum* nomine apud veteres insigniebantur, quam nomenclationem nos etiam passim retinebimus. Quæ igitur ad harum Solicitationum seu Potentiarum mechanicarum Æquilibria, Medias Directiones, & id genus alia, pertinent, hac prima sectione excutiemus, sive corpora, ad quæ tales potentiæ pertinent, rigida sint sive flexibilia.

CAPUT I.

De proportione inter Solicitationes gravitatis, seu pondera corporum, cum proportione Massarum eorundem corporum collata.

APud Philosophos Geometras elegans corporum proprietas celebratur, in eo consistens quod corporum pondera in eadem prorsus ratione crescant in qua ipsorum Massæ seu Quantitates Materiæ;

teriæ; aut Geometrica phrasi eandem proferendo, *quod corporum gravitates seu pondera Massis ipsorum proportionalia sint.* Illustr. Newtonus, sumtis accuratissimis pendulorum experimentis hanc, gravium proprietatem se semper comperisse testatur pag. 305. Princ. Phil. Nat. Math. primæ edit. quam etiam ex Coroll. I. Prop. XXIV. Lib. II. eleganter elicuit. Nobiliss. Hugenius hanc proprietatem non solum admittit, sed etiam pag. 140. Diatribæ De Caussa Gravitatis ex regulis motus deducit. Et quia hæc corporum affectio per universam Philosophiam Naturalem magni momenti est, aliam adhuc ejus demonstrationem adducere tentabo, admissâ unicâ quæ sequitur hypothesi.

HYPOTHESIS.

27. *Eadem manente Materiæ quantitate, & directionibus gravium existentibus parallelis, seu in Centro indefinite distanti convergentibus, pondera corporum non mutantur, variatis eorum positione respectu horizontis & figuræ.*

Hoc est, corpus quodvis idem pondus retinet, quocunque modo id positum sit respectu horizontis, nec ejus pondus mutari censendum, si ejus figura in aliam, quamcunque scilicet, in globum, cylindrum, conum &c. mutata sit, modo eadem manserit materiæ quantitas, seu massa.

PROPOSITIO I. Lemma.

28. *Caussa gravitatis, quæcunque ea sit, non tantum agit in partes exteriores corporum, sed etiam in interiores omnes.*

Nam si gravitatis caussa in exteriores tantum corporum partes ageret, in eas solum ageret, quæ horizonti aversæ sunt corporum superficies, atque adeo corporum pondera hisce superficiebus proportionalia essent: atqui, pro varia corporis positione & situ, superficies horizonti aversa modo major modo minor est; ergo, si gravitatis impressiones superficiebus hisce proportionales essent, sequeretur, mutari corporis pondus, pro alio atque alio ejus situ, contra hypothesin.

Deinde, si gravitas tantum ageret in exteriores corporum partes, non verò in interiores omnes, sequeretur, quod, mutatâ figurâ corporis, sed eadem manente materiæ quantitate, aliud atque aliud inde resultet corporis pondus; quandoquidem variatis figuris, varian-

riantur simul particularum & superficierum horizonti aversarum positiones ac quantitates, atque adeo variarent corporum pondera eadem manente eorum materiæ quantitate. Quæ omnia sunt contra hypothesin articulo 27. assumtam.

Corollarium.

29. Idcirco nullius corporis pondus in omni positione & figura idem manere potest, nisi singula ejus elementa æqualia æquales gravitatis impulsus excipiant. Quo posito facilis erit probatu sequens

PROPOSITIO II. Theorema.

30. *Pondera corporum quantitatibus materiæ seu massis eorum proportionalia sunt.*

Sint primùm duo corpora commensurabilia C, c, unum eorum elementum e, numerus elementorum in Corpore C, N & numerus in altero c, dicatur n, & denique massæ corporum seu materiæ quantitates dicantur respective M, m. Quibus positis, quia (§. 29.) singula utriusque corporis elementa æqualem à gravitate impressionem subeunt, si una ejusmodi impressio nominetur i, pondus corporis C seu solicitatio totalis à gravitate, qua corpus ad descensum urgetur (§. 13.) est aggregatum solicitationum, quibus singula elementa urgentur, & quoniam harum solicitationum directiones ex hypothesi parallelæ sunt, ipsæ solicitationes seu gravitatis impressiones conspirantes erunt; atque adeo solicitatio totalis gravitatis in corpore C erit una solicitatio seu impressio i ducta in numerum N elementorum, quæ in hoc corpore continentur, hoc est pondus ipsius C quod indicabo per pC fiet $= N.i$ ac $pc = ni$. Est verò $N.i : n.i = N.e : n.e$; ergo quia N. e est aggregatum particularum e in corpore C, seu hujus corporis massa M, & n.e massa alterius c seu m, erit omnino $pC : pc = M : m$ hoc est pondera corporum C, c sunt massis eorum proportionalia. Q. E. D.

Corollarium I.

31. Si corporis massa, quæ subinde eâdem literâ designabitur, qua ipsum corpus signatur, ducetur in solicitationem seu gravitatis impressionem (hæc enim duo hoc loco & ubique unum idemque significant) qua unum corporis elementum urgetur, factum exponet semper

per pondus absolutum corporis, ut si corpus fuerit C, & gravitatis solicitatio, qua singula ejus elementa afficiuntur, nominetur G, quantitas seu factum C.G exponit pondus absolutum corporis C, intelligendo per hanc literam C massam hujus corporis.

Corollarium II.

32. Hinc si, ut supra, Corporis hujus volumen & densitas dicantur V & D, & pondus pC, erit pC ut G.D.V. Id est, pondus cujusque Corporis est ut factum ex solicitatione gravitatis G, qua singula ejus elementa *e* urgentur, & densitate D in Volumen V. Nam (§. 31) pC est ut CG, & (§. 18) C, quæ hoc loco idem significat ac illic M, scilicet massam corporis, est ut D.V, ergo pC seu CG est sicut G.D.V.

Corollarium III.

33. Et quia gravitas specifica corporum consistit in proportione ponderum absolutorum corporum, sub voluminibus æqualibus, ideo gravitates specificæ densitatibus proportionales erunt, cum (§. 16.) massæ corporum volumine æqualium densitatibus proportionales sint, & per præsentem propositionem pondera corporum, eorum massis. Idcirco si corporis nostri C gravitas specifica dicatur S, erit ejus pondus absolutum seu pC ut S.V, quandoquidem S est ut D.G.

SCHOLION.

34. Hæc ipsa propositio ex theoria motus pendulorum aliter adhuc demonstrari potest, ut à Cel. Newtono, in loco supra in proëmio hujus capitis jam indicato, præstitum. Similem propositionem ex principiis, quibus ad derivanda symptomata motuum acceleratorum gravium utemur, facillimo etiam negotio eliciemus.

CAPUT II.

De Solicitationibus quibus Corpora rigida, id est inflexibilia, urgentur, earumque mediis directionibus.

DEFINITIONES.

I.

Fig. 1. 35. CUm quælibet vires, ac per consequens etiam solicitationes sint ex genere quantitatis, per lineas rectas hisce solicitationibus proportionales rectè possunt exponi. Idcirco si puncta A, C, E a rectæ AE a solicitationibus secundum directiones AB, CD, EF agentibus urgentur, hæ solicitationes seu potentiæ exprimentur rectis AB, CD, EF in ipsis earundem directionibus homologe sumtis, adeo ut hæ lineæ solicitationes vel potentias earumque directiones simul designent, & hoc in sequentibus tantum non semper observabitur.

II.

Fig. 1. 36. Si plurium solicitationum vel potentiarum, in æquilibrio consistentium, nonnullæ positæ sint ad unam partem corporis ad quod pertinent, reliquæ verò vel reliqua ad partem oppositam, Solicitationes, quæ sunt ad unam partem, reliquis in parte opposita *æquipollere* dicentur. Ut si rectæ AE, aut cuilibet alii corpori potentiæ AB, CD, EF applicatæ sint ab una parte, in parte verò oppositâ potentia GH agens ex G in H, & hæc cum reliquis ipsi oppositis in æquilibrio consistat. Potentia unica GH, reliquis omnibus AB, CD, EF æquipollere dicitur. Cæterùm monendus est tyro, quod potentia vel solicitatio, quæ reliquis æquipollere dicitur, ipsis ideo æqualis censenda non sit; etenim *æquipollere* & *æquale esse* in Mechanicis non sunt phrases synonimæ. Unicus enim est
Fig. 2. casus, quo potentia GH oppositis AB, CD, EF æquipollens ipsis simul sumtis æqualis est, tunc scilicet, cum hæ conspirantes sunt (§. 22.) ipsisque altera GH (§. 23.) directè contraria.

III.

37. Producta GH in I, ejus continuatio GI *media directio* vel *axis*

axis æquilibrii deinceps nominabitur potentiarum AB, CD, EF, & denique punctum G, in quo media directio corpori occurrit, & cui impedimentum O suppositum potentias ad æquilibrium compositas sustinet, quod impedimentum seu sustinaculum aliàs *hypomochlium* vocari solet, *centrum æquilibrii* posthac appellabitur. Fig. 1, 2.

AXIOMA.

38. *Solicitatio quæ ex aliis solicitationibus conspirantibus juxta directiones congruentes nascetur, hisce omnibus æquabitur directionemque habebit congruentem pariter ipsarum directionibus.*

Solicitatio vero ex directè oppositis resultans, æquivalebit excessui quo fortiores superant oppositas debiliores.

PROPOSITIO III. Theorema.

39. *Solicitatio ex duabus non conspirantibus, nec directè oppositis, mobili cuidam impressis, nascens, se habet ad alterutram earum ex quibus resultat, ut diameter parallelogrammi, cujus latera exponunt has solicitationes earumque directiones, ad latus quod solicitationem exponit.*

Citetur mobile A solicitationibus quibuscunque AB, AC quarum directiones angulum quemcunque CAB contineant: descripto parallelogrammo ABCD, ejus diameter AD directionem & solicitationem exponet, quæ ex lateralibus AC & AB resultat. Fig. 3.

Demonstr. Cogitetur mobile A rectæ mobili AB inhærere; sed ita tamen ut in ea liberè moveri queat ex A versus B, lineam verò AB duntaxat motu parallelo sibi ipsi & rectæ CD super AC ferri posse, deinde rectam mobilem AB corpus A secum deferentem urgeri versus CD solicitatione AC; mobile vero A in linea AB urgeri solicitatione AB; & manifestum erit conatum A2A, quo linea mobilis AB ad rectam ipsi parallelam CD accedere conatur, urgente solicitatione AC, se habere ad conatum 2A2D urgente solicitatione AB corpus A in hac rectâ mobili, ut AC se habet ad AB vel CD; jam quia ex hypothesi 2A2B ipsi CD parallela est, &, ut modo vidimus, A2A : 2A2D = AC : CD, erit punctum 2D in diametro AD parallelogrammi BC: Porrò, quia mobile A participat motum A2A, vel potius conatum ad motum lineæ mobilis AB, in qua moveri posse intelligitur, & motum proprium, seu potius conatum, ad hunc motum

tum 2A2D, ac quia, si linea mobilis & corpus spatiola utlibet parva A2A & 2A2D simul describere potuissent, idem id fuisset quam si corpus A spatiolum A2D transmisisset; liquet utique, ex conatibus lineæ mobilis & corporis, A2A & 2A2D nasci conatum A2D juxta directionem AD, qui se habeat ad A2A vel ad 2A2D sicut AD ad AC, vel ad AB; ergo ex solicitationibus AC & AB resultat solicitatio AD in directione A2D. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

40. Solicitationes, quæ exponuntur lateribus AC, AB parallelogrammi BC, ideo dici possunt solicitationes *laterales*. Deinde in communi Mechanicæ scriptorum phraseologia motus vel solicitatio juxta diagonalem AD ex motibus seu solicitationibus lateralibus AC, AB componi dicitur. Sed quia video non deesse Autores, qui nescio quæ difficultatum spectra in hac re sibi somnient, perperam existimantes per compositionem & resolutionem, additionem vel subductionem motuum vel potentiarum componentium intelligendas esse, ne ejusmodi æquivocatio tyronibus negotium facesseret, motus vel potentias ex aliis componi dici solitas, ex iis nascentes vel resultantes appellare, consultius duxi.

COROLLARIUM I.

41. Producta parallelogrammi diametro in M, ac facta AM = AD, solicitatio AM in hac directione AM reliquis AC & AB æquipollebit. Nam solicitatio AM alteri æquali & directè contrariæ AD æquipollet, atqui AD nascitur ex lateralibus AC & AB; neque plus aut minus præstare potest quam solicitationes hæ laterales simul agentes, propterea que perinde est sive mobile A unica solicitatione AD, sive duabus collateralibus AC, AD urgeatur, ergo AM ipsi AD contraria & æqualis lateralibus AC & AB omnino æquipollet.

COROLLARIUM II.

Fig. 4. 42. Hinc si tres solicitationes eidem mobili impressæ AM, AB, AC in æquilibrio consistant, erit quælibet earum ad alterutram ex reliquis, id est AM ad AB, ut sinus anguli BAC à reliquis comprehensi, ad sinum anguli MAC à solicitatione AM & altera AC ex reliquis formati. Nam (§. 41.) AM = AD, atque adeo AM:

AM : AB ſicut AD ad AB, verum ex trigonometria conſtat, eſſe AD ad AB, ut ſinus anguli ABD ad ſinum anguli BDA, ergò etiam AM eſt ad AB ut ſinus anguli ABD, vel ejus ſupplementi ad duos rectos BAC ad ſinum anguli BDA, vel ejus alterni æqualis DAC, aut etiam hujus ad duos rectos ſupplementi MAC. Et ſic ex ternis ſolicitationibus, ad æquilibrium compoſitis, duæ quælibet ſunt inter ſe ut ſinus angulorum ipſis oppoſitorum, hoc eſt AB : AC = ſin. MAC : ſin. MAB, & AM : AC = ſin. BAC : ſin. MAB. Et ſic ubique.

Elegans hoc theorema à Cel. Petro Varignon primùm, quod ſciam, demonſtratum eſt, cui ferme totam ſuam novam Mechanicam, anno 1687. Lutetiæ editam, ſuperſtruxit.

Corollarium III.

43. Ex hiſce etiam patet ratio theorematis non inelegantis, quod Robervallius Torricellio quondam propoſuit, ſed ſine demonſtratione, ut videre eſt in Opere Academiæ Regiæ Scientiarum Pariſienſis, quod inſcribitur *Divers Ouvrages de Mathematique & de Phyſique de Meſſieurs de l'Academie Royale des ſciences*, fol. 301. Theorema vero noſtris loquendi phraſibus expreſſum, eſt hujusmodi: Si per terminos rectarum AM, AB, AC trium ſolicitationum eidem puncto A applicatarum, repræſentatricium, ducantur rectæ MB, BC & MC, punctum A, cui ſolicitationes in æquilibrio conſiſtentes impreſſæ ſunt, exiſtet in centro gravitatis trianguli MBC. Circa AM, AB & AM, AC deſcripta ſint parallelogramma AMSB, ARMC, quibus deſcriptis, & quia tres ſolicitationes AM, AB, AC in æquilibrio ſunt, ſecundùm hypotheſin AC æquipollebit (§. 36.) ipſis AM & AB atque adeo (§. 41.) AC = AS, & hæ duæ in directum poſitæ erunt, unde CA producta latus trianguli MB ſecabit in medio Q, ſimiliter AB producta ſecabit latus trianguli MC in ejus medio P; jam ex ſtaticis conſtat trianguli MBC centrum gravitatis eſſe in ſingulis lineis CQ, BP ex quibusvis trianguli angulis C & B ad puncta Q & P in medio laterum BM ac CM angulis illis oppoſitorum ductis, propterea centrum gravitatis trianguli BMC, eſt in communi interſectione A harum linearum CQ & BP.

Propositio IV. Lemma.

44. *Si ſingula corpora poſitione data* A, B, C, D &c. *in ſuam quod-*

quæ distantiam à plano positione dato a P d *ducantur, erunt omnium facta æqualia facto ex aggregato omnium corporum in distantiam* E e *centri eorum gravitatis* E *à dato plano, in casu quo omnia corpora ad eandem plani* a P d *partem sita sunt.*

Sin verò nonnulla corpora A, B &c. *posita fuerint ad unam plani* PQ *partem, & reliqua* C, D *ad alteram partem; Excessus, quo facta ex corporibus ad partes centri omnium gravitatis* E *sitis, in suas homologas à plano* PQ *distantias, superant facta ex corporibus reliquis in suas ab eodem plano distantias, æquabitur facto ex omnibus corporibus simul sumtis in distantiam* e P, *communis omnium centri gravitatis* E *à plano* PQ.

Fig. 5. Casu primo ostendi debet, quod, positis $A + B + C + D + \&c. = M$, sit $A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd = M.Ee$. Et secundo casu, esse $C.cP + D.dP - A.aP - B.bP = M.eP$, designantibus cP, dP, aP, bP distantias corporum C, D, A, B &c. à plano PQ.

Demonstr. I. Per centrum gravitatis E omnium corporum transeant $\alpha\delta$ parallela plano ae, & eE parallela plano PQ alteri ad recto, & $\alpha\delta$ considerari potest tanquam axis æquilibrii ponderum A, B, C, D, atque adeò erit ob casum æquilibrii $A.A\alpha + D.D\delta = B.B\beta + C.C\kappa$, vel quod eodem recidit, $B.B\beta + C.C\kappa - A.A\alpha - D.D\delta = 0$. Item $A.ae + B.be = C.ce + D.de$, vel $C.ce + D.de - A.ae - B.be = 0$ respectu axis æquilibrii eE.

II. Quia $Aa = \alpha a - \alpha A = Ee - A\alpha$, $Bb = Ee + B\beta$, $Cc = Ee + C\kappa$, & $Dd = Ee - D\delta$, erit $A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd = A.Ee + B.Ee + C.Ee + D.Ee + B.B\beta + C.C\kappa - A.A\alpha - D.D\delta = M.Ee$, quia $A + B + C + D = M$, & (num. 1 hujus.) $B.B\beta + C.C\kappa - A.A\alpha - D.D\delta = 0$. Quod est primùm.

III. Quia $aP = ae - eP$, $bP = be - eP$, $cP = ce + eP$; & $dP = de + eP$, erit $C.cP + D.dP - A.aP - B.bP = C.eP + D.eP + A.eP + B.eP + C.ce + D.de - A.ae - B.be = M.eP$, quia (num. 1 hujus.) est $C.ce + D.de - A.ae - B.be = 0$, & $C + D + A + B = M$ ut antea. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

Fig. 6. 45. Si corpora rectà ascendant in lineis Aa, Bb, Cc, Dd &c. horizonti perpendicularibus, eorumque centrum gravitatis E in recta Ee illis parallela, erit $A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd = M.Ee$. Nam ducta ut libet recta $\alpha\delta$ ipsis Aa, Bb &c. perpendiculari, erit que (§. 44.) $A.A\alpha + B.B\beta + C.C\kappa + D.D\delta = M.E\varepsilon$, & $A.\alpha a +$ B.

B. βb + C. κc + D. δd = M. ϵe, ergo A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee.

Corollarium II.

46. Si omnia corpora A, B, C, D &c. sint æqualia, omnes eorum distantiæ à plano aPd, erunt multiplum distantiæ communis eorum centri gravitatis E ab eodem plano secundum ponderum numerum. Excessusque quo distantiæ illorum à plano PQ secundi casus, quæ ad partes centri omnium gravitatis posita sunt, excedunt distantias illorum, quæ sunt in parte opposita, est distantiæ centri omnium gravitatis E ab eodem plano PQ multiplum, secundùm corporum A, B, C, D &c. numerum. Fig. 5.

Scholion I.

47. Ex hisce nunc tam facile deduci potest regula Guldini jam à Pappo disertè indicata, ut haud abs re futurum existimem, si eam hoc loco demonstratam darem, quanquam ea à pluribus jam demonstrata sit. Guldini Regula ita habet: *Figuram ex conversione cujuslibet magnitudinis circa aliquam rectam positione datam oriundam, æquari facto ex Magnitudine genitrice in viam centri ejus gravitatis.* Figura genitrix dicatur F, distantia centri ejus gravitatis ab axe rotationis D, ordinata figuræ y ad axem rotationis, dx elementum axis, solidum ex conversione figuræ F circa axem x dicatur S, ejus elementum dS; quibus positis per præsentem propositionem erit D. F = summæ momentorum elementorum magnitudinis F $= \int \frac{1}{2} yydx$, nam elementum ipsius F est ydx, & hujus momentum $\frac{1}{2}yydx$. sit p circumferentia circuli cujus radius est 1, & ducatur antecedens æquatio in p, ut fiat pD. F $= \int \frac{1}{2} pyydx$. Jam pD est circumferentia radii D, & py circumferentia radii y, atque adeò $\frac{1}{2}pyy$ area circuli ejusdem radii y, & per consequens $\frac{1}{2}pyydx$ cylindrulus solido S inscriptus, seu ejus elementum dS; ergo pD. F $= \int$dS = S. Quod erat ostendendum pro solidis rotundis; eadem est demonstratio in aliis.

Scholion II.

48. Quanquam in hac propositione gravitas in singulis corporibus A, B, C, D eadem seu uniformis sumta sit, ita ut pondera eorum absoluta massis proportionalia sint, quoniam tamen gravitas di-

diversa esse posset, & hoc lemma etiam generaliter verum est, scilicet tunc etiam, cum revera gravitatis solicitationes ipsis corporum massis A, B, C, D proportionalia non existunt, id saltem indicandum fuit hoc loco. Nam si per A, B, C &c. non amplius, ut in propositione, massæ horum corporum, sed pondera eorum absoluta intelligantur, canon propositionis adhuc obtinebit. Verum satius foret, per A, B &c, ut in propositione, intelligere massas horum corporum, &, juxta articulum 31, eorum pondera designare per facta ex massis in gravitatis solicitationes P, Q, R, S quibus singula A, B, C, D respectivè urgentur, id est per AP, BQ, CR, & D. S &c. Quod alibi in applicatione observabimus.

PROPOSITIO V. Theorema.

Fig. 7. 49. *Solicitationum quarumlibet* PR, PB, PC, PD &c. *eidem mobili* P *impressarum media directio* PE *est recta jungens centrum gravitatis mobilis* P *& centrum gravitatis* E *omnium punctorum* A, B, C, D &c. *quibus rectæ solicitationum repræsentatrices terminantur; & solicitatio ex omnibus corpori impressis resultans exponi debet multiplo rectæ* PE, *secundum punctorum seu solicitationum impressarum numerum.*

Per mobilis P centrum gravitatis ducta intelligantur plana PS & *a*P*d* sibi invicem recta, & per terminos rectarum PA, PB &c. perpendiculares ad planum *ad* demittantur A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, & ex centro gravitatis E punctorum A, B, C &c. normalis E*e*. Solicitationum numerus dicatur N, & in producta PE sumatur PR = N, PE. Dico PR exponere solicitationem ex omnibus mobili P impressis PA, PB, PC, PD &c. nascentem.

I. Per E & R agantur EL & RS plano *a*P*d* æquidistantes, ob triangulorum PLE & PSR similitudinem, & propter PR = N, PE, erunt PS = N, PL & SR = N, LE.

II. Quia E est centrum gravitatis punctorum A, B, C, D &c. quorum numerus secundum hypothesin est N, erit (§. 46.) *a*A + *b*B + *c*C + *d*D + &c. = N. *e*E, & Pc + Pd + &c. − Pa − Pb − &c. = N. Pe.

III. Quia singulis solicitationibus obliquis (§. 39.) æquipollent solicitationes earum laterales plano *a*P*d* perpendiculares & parallelæ, scilicet ipsi PA æquipollent laterales *a*A, P*a*, ipsi PB verò laterales *b*B & P*b* & sic in cæteris, omnibus obliquis æquipollebunt omnes earum laterales solicitationes, id est conspirantes *a*A, *b*B, *c*C,

cC, dD, & oppositæ Pa, Pb ex una & Pc ac Pd ex altera plani PS parte; atqui ex conspirantibus resultat solicitatio ipsis omnibus (§. 38.) æqualis id est solicitatio $aA + bB + cC + dD +$ &c. (n. 11.) $= N.eE$ (n. 1.) $= PS$, & ex omnibus contrariis (§. 38.) nascitur solicitatio æqualis excessui quo fortiores excedunt debiliores, id est ipsi $Pc + Pd +$ &c. $- Pa - Pb -$ &c. (num. 11.) $= N.Pe$. (num. 1.) $= SR$, ergo omnibus obliquis PA, PB &c. æquipollent duæ laterales PS & SR, & (§. 39.) hisce unica PR: hæc ergo denotat mediam directionem solicitationum PA, PB, PC, PD &c. & solicitationem ex ipsis nascentem, vel quod idem est, ipsis æquipollentem. Quod erat demonstrandum.

Elegans hoc theorema Illustri Leibnitio acceptum est ferendum, utpote quod in aliqua ejus epistola, jam pridem ad Wallisium data, sine demonstratione exhibetur. Vid. Tom: III. Oper. Wallisii fol. 687.

Corollarium I.

50. Hinc punctum P, cui quatuor solicitationes PA, PB, PC, PT ad æquilibrium quidem compositæ; sed non in eodem plano existentes, impressæ sunt, erit in centro gravitatis pyramidis TAC, in cujus angulis solicitationum repræsentatrices lineæ terminantur. Sit E centrum gravitatis punctorum A, B, C & jungatur PE, quæ media directio erit solicitationum PA, PB & PC, ac hisce æquipollebit solicitatio 3.PE; hinc quia omnes in æquilibrio sunt, erit $PT = 3.PE$; atque adeo est $PT : PE = 3 : 1 = A + B + C : T$ considerando hæc puncta tanquam ponduscula æqualia, ac proinde P est in centro gravitatis punctorum quatuor angularium pyramidis A, B, C, T. Sed idem est centrum gravitatis pyramidis, quod punctorum ejus angularium. Ergo liquet assertio. Fig. 8.

Hoc est alterum theorema, quod Robervallius Torricellio olim proposuerat in loco supra (§. 43.) jam indicato.

Corollarium II.

51. Hinc etiam, si mobile P ad singula superficiei curvæ ABC puncta urgeatur solicitationibus expressis punctorum superficiei distantiis à mobilis centro; media omnium solicitationum directio erit recta PE, jungens centra gravitatis mobilis P & superficiei curvæ ABC, ac solicitatio ex omnibus nascens ipsisque æquipollens Fig. 9.

C est,

est, ut factum ex superficie ABC in distantiam EP centri ejus gravitatis à centro corporis P. Nam numerus punctorum seu solicitationum est ipsa superficies ABC, ejusque centrum gravitatis est centrum omnium punctorum, quibus rectæ solicitationum repræsentatrices terminantur.

Corollarium III.

Fig. 10. 52. Quinimo si idem mobile P, ad singula curvæ ABC puncta urgeatur, sed solicitationibus non ipsis PB distantiis punctorum à mobili, sed ipsis LP in singulis BP sumtis, & in curva quacunque DLH terminatis, proportionalis. Erit etiam nunc omnium solicitationum PL media directio PE recta jungens centra mobilis P & curvæ DLH, ac solicitatio ex illis omnibus resultans, factum ex gravitate curvæ DLH in rectam EP; sed hujus curvæ partes non uniformiter graves intelligendæ, verùm difformiter; ita ut ductis per homologa utriusque curvæ AB & DLH puncta B, L tangentibus BM & LM in puncto M concurrentibus, gravitas puncti B curvæ ABC uniformiter gravis, sit ubique ad homologi puncti L curvæ DLH, gravitatem ut rectangulum MBP ad rectangulum MLP.

PROPOSITIO VI. Problema.

Fig. 11. 53. *Invenire mediam directionem solicitationum quarumvis* AG, BG, CG, DG *quibus puncta* A, B, C, D *lineæ rectæ inflexilis* AD *urgentur.*

Ex quolibet extra lineam AD puncto O agantur per singula lineæ puncta A, B, C, D in quibus linea juxta directiones AG, BG &c. urgetur, rectæ indefinitæ OAF, OBF, OCF, ODF, ductisque per singula puncta G in quibus lineæ solicitationum aut potentiarum applicatarum repræsentatrices terminantur rectis indefinitis FG lineæ AD parallelis & lineis OA, OB, OC, OD &c. quantum opus est productis in punctis F occurrentibus. Dehinc singulis AF, BF, CF, DF &c. in suis directionibus transferantur à puncto concursus O, respectivè æquales O*a*, O*b*, O*c*, O*d* &c. punctorumque *a*, *b*, *c*, *d* centrum gravitatis *e* inveniatur atque in linea OM per hoc centrum *e*, & punctum O ducta lineæque AD occurrente in E, sumatur EM, quæ sit ad O*e* ut numerus punctorum *a*, *b*, *c*, *d* ad unitatem; ductaque per punctum M recta NL æquidistante ipsi AD, assumatur in ea ML omnibus FG inter AF,

BG,

BG, & BF, BG &c. interceptis, æqualis, eo casu, quo omnes GF conspirantes sunt, vel juxta ordinem literarum ex F versus G sumtæ omnes ad eandem plagam vergunt, tunc enim ML in eandem plagam & omnibus FG æqualis sumenda est; sin vero nonnullæ FG vergerent ad unam plagam, reliquæ vero FG in plagam oppositam, eo casu ML æqualis facienda esset excessui quo fortiores FG simul sumtæ, excedunt reliquas FG in plagam priori oppositam agentes eamque in partem ducenda esset in quam agunt fortiores FG: Linea EL jungens puncta E, L dabit mediam directionem omnium solicitationum AG, BG, CG, DG &c. ejusque longitudo EL exponet solicitationem omnibus applicatis æquipollentem in hac media directione EL, seu etiam onus quod sustinaculum V puncto E subjectum ab iisdem applicatis potentiis AG, BG, CG &c. sustineret. Quod erat inveniendum.

Demonstratio. Quælibet solicitatio vel potentia applicata AG æquipollet (§. 39.) lateralibus AF & FG; atque adeo omnes AG, BG, CG &c. æquipollebunt omnibus AF, BF, CF, DF secundum hypothesin in puncto O convergentibus, omnibusque harum collateralibus FG. Cogitetur jam virga seu linea AD, cui potentiæ applicatæ vel solicitationes AG, BG &c. impressæ sunt, plano gravitatis experti, perinde ac ipsa linea, infixa esse, ita ut linea moveri nequeat, quin planum simul moveatur; hoc enim modo fiet ut potentia AF eandem vim habeat movendi planum, in quocunque directionis OA puncto ipsi plano applicata sit, sive in puncto A, aut in quovis alio *a*, O &c. hoc per se satis evidens est; nam si potentia AF rectæ AD in A applicata in directione OA majorem vim haberet ad movendum planum AODF quam hæc eadem potentia AF ac in eadem directione OA sed plani AOD puncto O applicata, sequeretur potentiam AF cum alia ipsi æquali, puncto O applicata in eadem directione, sed in partem oppositam ex *a* versus O, vel potius in linea AO extrorsum trahent punctum plani O, non esse in æquilibrio, sed ipsi prævalere, aut hanc illa fortiorem existere; atque adeò duæ potentiæ æquales AF & *a*O juxta eandem lineam AO in oppositas partes agentes se mutuo in æquilibrio non tenerent, quod est absurdum. Ergo potentia AF rectæ AD applicata eundem effectum præstat ac potentia O*a* ipsi AF æqualis & in eadem directione OA puncto plani O applicata, quod de reliquis BF, CF &c. etiam intelligendum: ac proinde potentiarum AF, BF, CF, DF eadem est media directio, quæ potentia-

 rum

rum hisce æqualium Oa, Ob, Oc, & Od &c. atqui harum media directio OeM (§. 49.) est linea jungens punctum O & centrum gravitatis e punctorum a, b, c, d &c. & potentia omnibus applicatis puncto O; aut rectæ in punctis A, B, C, D &c. æquipollens est multipla ipsius Oe secundum punctorum a, b, c, d &c. numerum, atque adeo exponitur recta EM, quæ (constr.) est ad Oe ut numerus punctorum a, b, c &c. ad unitatem. Æquipollet ergo potentia EM omnibus AF, BF, CF & DF, ex omnibus vero FG lineæ AD parallelis nascitur solicitatio ipsis omnibus æqualis, si conspirantes fuerint, vel æqualis excessui, quo fortiores FG superant debiliores & oppositas FG, ac proinde utroque casu exponitur recta ML quæ pro varietate circumstantiarum (constr.) æqualis est summæ omnium FG eandem plagam respicientium, vel differentiæ earum quæ in diversas plagas tendunt, unde cum omnibus AF, BF, CF, DF & omnibus FG æquipolleant duæ laterales EM & ML & hisce duabus (§. 39.) unica EL, omnino patet hanc EL etiam æquipollere omnibus AG, BG, CG, & DG, quæ lineæ AD applicatæ sunt. Propterea EL significat mediam directionem potentiarum applicatarum & solicitationem in hac media directione ipsis omnibus æquipollentem. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

Fig. 11. 54. Si lineæ AD perpendiculares AH, BH, CH, DH agantur ipsis FG occurrentes in punctis H, hæ perpendiculares totidem potentias lineæ AD applicatas repræsentabunt, momentaque omnium earum, quæ sunt ex una parte puncti E, æquabuntur momentis earum, quæ sunt ex altera parte, id est, AH. AE + BH. BE = CH. CE + DH. DE. Ductis enim af, bh, dg, ci rectæ AD & AI, BI, CI, DI &c. rectæ OM parallelis, eritque propter centrum gravitatis e, $af + bh = dg + ci$, vel adscita communi altitudine OE erunt facta seu rectangula OE. af + OE. bh = OE. dg + OE. ci. Vel Of. AE + Oh. BE = Og. DE + Oi. CE, quia OE. af = Of. AE propter triangula similia OAE & Oaf, item OE. bh = Oh. BE, ob triangulorum OBE & OBh similitudinem, & quia ob similes rationes rectangula reliqua OE. dg, OE. ci rectangulis Og. DE, OI. CE respective æquantur. Porrò ob AI, BI, CI &c. parallelas (constr.) rectæ OM, & singulas Oa, Ob, Oc, Od æquales singulis AF, BF, CF, DF, æquabuntur etiam Of, Oh, Oi, Og ipsis AI, BI, CI, DI,

quia

quia quodvis triangulum Oaf respectivo AFI simile & æquale est, propterea substitutis in rectangulis æqualibus Of. AE + Oh. BE = Og. DE + Oi. CE, loco rectarum Of, Oh, Og & Oi, æqualibus AI, BI, DI ac CI eodem ordine sumtis, fiet AI. AE + BI. BE = DI. DE + CI. CE. Vel substitutis adhuc loco ipsarum AI, BI, CI, DI, aliis rectis AH, BH, CH, & DH, quæ ipsis propter triangula similia AHI, BHI, CHI, DHI analoga sunt, hoc est, proportionalia, erunt tandem AH. AE + BH. BE = DH. DE + CH. CE. Porrò sicut EM = Of + Oh + Og + Oi, = AI + BI + DI + CI, ita etiam EN rectæ ML perpendicularis, erit = AH + BH + DH + CH.

Corollarium II.

55. Ex centro æquilibrii E demissis ad directiones potentiarum AG, BG, CG, DG productas perpendicularibus EP, EQ, ER & ES, momenta potentiarum obliquarum ex una parte, æqualia erunt momentis potentiarum in parte altera. Hoc est, AG. EP + BG. EQ = DG. ES + CG. ER. Nam quia quælibet triangulorum PAE, & HAG paria similia sunt, fient rectangula AH. AE, BH. BE, DH. DE ac CH. CE æqualia homologè rectangulis AG. EP, BG. EQ, DG. ES & CG. ER, unde quia (§. 54.) AH. AE + BH. BE = DH. DE + CH. CE, erit etiam AG. EP + BG. EQ = DG. ES + CG. ER. Fig. 12.

Scholion.

56. Casus Corollarii hujus secundi obtinet non solum tunc, cum linea AD est recta, cui potentiæ obliquæ AG, BG &c. applicantur; sed etiam in casu, quo ipsa linea applicatas potentias habens est curva, imo etiam in rotis aliisque ejusmodi organis. Uno verbo, si circa aliquod punctum potentiæ aut solicitationes quæcunque in æquilibrio sunt, momenta potentiarum, quæ agunt in unam partem, æqualia sunt momentis potentiarum, quæ agunt in partem oppositam; atque sic inopinatò incidimus in demonstrationem directam & immediatam principii Archimedei de æqualitate momentorum, in casu æquilibrii potentiarum inter se commissarum, quod varii varie demonstrare conati sunt. Cæterum ope Corollarii primi hujus, ipsum problema hujus propositionis multo simplicius jam solvetur, imò plura alia præstabuntur quam antea, ut ex sequentibus facile patescet.

PROPOSITIO VII. Theorema.

57. *Si lineæ inflexili & gravitatis experti (qualis etiam in præcedenti Propositione est ponenda) AD quotcunque solicitationes seu potentiæ obliquæ* A1A, B1B, C1C, D1D *applicatæ, atque hæ potentiæ omnes in suas laterales potentias lineæ* AD *perpendiculares & parallelas resolutæ fuerint, erit, ductis per centrum æquilibrii* H *potentiarum lineæ* AD *perpendicularium* A2A, B2B, C2C, D2D, *rectâ* HI *ipsis omnibus simul sumtis æquali & parallela, & per punctum* I *recta* IK *lineæ* AD *parallela ac æquali excessui, quo potentiæ lineæ æquidistantes, quæ sunt ad unam lineæ* HI *partem ut* 2D1D, *superant eas, quæ ipsi in parte contraria oppositæ sunt* 2A1A, 2B1B, 2C1C, *recta jungens puncta* H, K *erit media directio potentiarum obliquarum virgæ seu lineæ* AD *applicatarum, ejusque magnitudo exponet onus, quo hypomochlion, seu sustinaculum puncto virgæ* H *subjectum, juxta mediam directionem* HK *ab omnibus potentiis urgetur.*

Fig. 13. Cum quælibet solicitatio seu potentia obliqua A1A (§. 39.) spectari possit, tanquam nascens ex suis lateralibus solicitationibus A2A & 2A1A virgæ AD perpendiculari & parallela, omnes potentiæ obliquæ considerari possunt tanquam nascentes ex omnibus perpendicularibus A2A, B2B, C2C, D2D, & ex omnibus parallelis 2D1D, 2C1C, 2B1B, & 2A1A. Atqui (§. 54.) ex omnibus perpendicularibus resultat solicitatio vel potentia ipsis omnibus simul sumtis æqualis & parallela, transiens per earum centrum æquilibrii H, id est (constr.) solicitatio $HI = A2A + B2B + C2C + D2D$, ex parallelis verò nascitur solicitatio æqualis (§. 38.) excessui, quo fortior vel fortiores excedunt debiliores ipsis contrarias, unde cum (constr.) sit $IK = 2D1D - 2A1A - 2B1B - 2C1C$, hæc IK exponet solicitationem ex solicitationibus virgæ parallelis nascentem; adeoque cum ex omnibus potentiis lateralibus virgæ perpendicularibus & parallelis nasci intelligantur, tum omnes obliquæ A1A, B1B &c. tum etiam duæ laterales HI & IK & ex hisce (§. 39.) unica HK, patet hanc solicitationem HK omnibus obliquis æquipollere ejusque directionem harum esse Mediam directionem, atque adeo punctum virgæ H in hac media directione urgeri solicitatione seu onere, quod exponitur magnitudine rectæ HK. Quod erat demonstrandum.

Scho-

SCHOLION.

58. Eadem methodo, mutatis mutandis, obtinetur media directio potentiarum lineæ curvæ DAA' utlibet applicatarum. Nam si potentiæ vel solicitationes applicatæ repræsententur per lineas AB, quarum unaquæque resolvatur in suas laterales potentias AC, axi curvæ DE perpendiculares, & CB eidem æquidistantes, productisque CA ultra axem DE, ut singulæ EF singulis AC æquales fiant, potentia IN singulis EF simul sumtis æqualis & per earum centrum æquilibrii ducta axique perpendicularis (§. 54.) erit potentia seu solicitatio omnibus EF æquipollens, unde cum singulæ hæ EF singulis AC æquales atque directæ, oppositæ sint, omnes EF cum omnibus AC in æquilibrio manebunt, ergo etiam unica potentia IN universis EF æquipollens cum iisdem AC in æquilibrio consistet; pariter ductis DG axi DE normali, & rectis indefinitis AH eidem axi parallelis, & in iis factis GH singulis CB respectivè æqualibus, erit potentia IL universis GH æqualis & parallela transiens per centrum æquilibrii K harum GH, cum iisdem GH (§. 54.) in æquilibrio, ergo duæ potentiæ laterales IN & IL cum universis AC & universis CB in directionibus AG agentibus, id est, universis GH in æquilibrio consistent, atque adeo cum omnibus obliquis; at vero ex potentiis IN & IL (§. 49.) nascitur potentia, cujus directio IO transit per punctum I & centrum gravitatis O punctorum L & N, & quæ exponitur per multiplum rectæ IO secundum punctorum L & N numerum, hoc est per 2.IO; ergo talis potentia sola in æquilibrio erit cum universis AB curvæ DAA applicatis, idcirco (§. 37.) recta OI producta in M, dat mediam directionem IM omnium potentiarum AB, & hypomochlium R curvæ DAA applicatum sustinebit onus æquale 2.OI ab omnibus applicatis potentiis AB. Quod erat inveniendum. Cæterum etsi punctum I, quod est communis intersectio rectarum KL & SN in curva DA esse videtur, in eam tamen incidere non debet, ac propterea puncta I & R sunt semper diversa. Fig. 14.

Constructioni hujus Scholii non multum absimilem etiam reperit Cl. Varignon. Verum in hac constructione non omnia curvæ puncta ab applicatis potentiis urgentur, nam casus quo singulis ejus punctis potentiæ applicantur, pendet à quadraturis & centris gravitatis quarundam figurarum curvilinearum, ut ex sequenti Propositione elucescet.

PRO-

PROPOSITIO VIII. THEOREMA.

Fig. 15. 59. *Si Vectis curvilineus* ABB, *cujus axis* AT *ordinatas* BC *ad angulos rectos excipit, à potentiis vel solicitationibus utlibet obliquis* BG, BG &c. *in singulis punctis urgeatur, protracta* GB *in* T, *ductisque per* B *rectis* BS *curvæ* ABB *normali, &* BE *axi* AT *parallela, demissaque ex* S *normali* SV *super* BT, *in ordinata* BC *producta sumatur* CD, *quæ sit ad* BG *potentiæ curvæ puncto* B *applicatæ repræsentatricem, ut* BV *ad* BT, *& in recta* BE *producta accipiatur* EF, *quæ sit ad eandem* BG, *ut rectangulum* BV.CT *ad rectangulum* SC.BT, *& hoc respectu cujusvis alius curvæ puncti* B *fieri intelligatur, indeque nascentur figuræ mixtilineæ* AXDC, AXFE, *quarum centra gravitatis sint in* R *&* Q, *per quæ agantur* MR *rectæ* AN, *&* QO *axi* AT *æquidistantes, seque mutuo secantes in* M; *si rectangulum sub* MO *& data recta* A *æquale areæ* AXFE, *& rectangulum sub recta* MR *& eadem data* A *æquale areæ* AXDC *facta fuerint, linea recta* IM *per punctum concursus* M *rectarum* QO *&* LR, *& per medium* I *rectæ* OR *jungentis puncta* O *&* R *ducta atque versus* P *protracta, dat mediam directioniem* MP, *omnium potentiarum* BG *curvæ* AB *applicatarum, & Onus quod hypomochlion* Z *ab omnibus potentiis sustinebit, exponetur rectangulo* 2MI.A *sub dupla* MI *& data* A.

Sic B*b* elementum curvæ AB, per cujus terminum *b* ducantur *bd* rectæ BD & *bf* lineæ BF parallelæ, tum etiam per terminum G potentiæ BG recta GH axi parallela, quæ ordinatæ CB productæ occurrat in H, & denique demittatur *ba* perpendicularis ad GT, quibus positis,

I.° Quia (constr.) CD : BG = BV : BT, & propter triangula similia BHG & BCT, est BG : BH = BT : BC, erit etiam ex æquo CD : BH = BV : CB. Porrò quia triangula BVS & B*ba*, propter angulos *b*B*a*, VBS recto æquales, atque adeò ipsis VBS & VSB (qui simul sumti etiam recto æquantur) æquales, adeò ut ablato communi VBS remaneant æquales *b*B*a* & VSB, & propter angulos ad *a* & V rectos, similia sunt; habebimus insuper BV : BS = *ba* : B*b*, triangula verò similia *b*Bβ & BCS præbent BS : BC = B*b* : Bβ, igitur denuo ex æquo BV : BC = *ba* : Bβ. Sed initio hujus inveniebatur etiam BV : BC = CD : BH, ergo CD : BH = *ba* : Bβ, adeoque BH.*ba* = CD.Bβ = rectangulo C*δ* areæ AXDC inscripto.

II. Quoniam (constr.) EF : BG = BV.CT : SC.BT, & BG : GH

GH = BT : CT = SC. BT : SC. CT, erit ex æquo EF : GH = BV. CT : SC. CT = BV : SC. Præterea, ut num. I. ostensum, est etiam BV : BS = *ba* : B*b*, & BS : SC = B*b* : *b*β, ergo iterum ex æquo BV : SC = *ba* : *b*β, at modo habuimus etiam BV : SC = EF : GH, ergo EF : HG = *ba* : *b*β, atque adeò HG. *ba* = EF. *b*β = rectangulo Eφ areæ AXFE inscripto.

III. Jam quia potentia BG curvæ puncto B applicata (§. 39.) resultat ex lateralibus BH axi AT perpendiculari, & HG eidem parallela, & singula puncta elementi B*b* ab eadem potentia obliqua BG urgentur, potentia, qua totum elementum afficitur, est ut rectangulum BG. *ba* cujus altitudo *ba* multitudinem potentiarum obliquarum omnibus elementi B*b* punctis applicatarum exponit, rectangulum BH. *ba*, exponet potentiam axi perpendicularem, & HG. *ba* potentiam eidem axi parallelam, quæ ex obliqua BG. *ba* ad elementum curvæ B*b* pertinente derivantur, & ex quibus hæc (§. 40.) resultat. Unde, quia (num. I. & II.) ostensum BH. *ba* = rec-lo Cδ & HG. *ba* = rec-lo Eφ, omnes potentiæ BG. *ba* resultabunt ex omnibus Cδ areæ AXDC inscriptis, & ex omnibus Eφ areæ AXFE inscriptis, cum singulæ BG. *ba* ex singulis Cδ & Eφ nascantur. Atqui ex omnibus potentiis Cδ (§. 54.) resultat potentia A. MR cum hoc rec-lum (constr.) æquale sit omnibus Cδ, seu areæ AXDC, cui inscripta sunt, & potentiæ A. MR directio transeat per centrum gravitatis areæ AXDC; & ex omnibus potentiis Eφ resultat potentia A. OM, quoniam (constr.) hoc rec-lum A. MO = AXFE ejusque directio OQ transit per centrum gravitatis Q ejusdem areæ AXFE. Propterea potentiæ A. MO & A. MR in directionibus suis MO, MR in æquilibrio consistent cum omnibus potentiis obliquis BG, BG, &c. curvæ AB in singulis punctis applicatis. Sed ex potentiis A. MO & A. MR resultat (§. 49.) potentia 2. MI. A cujus directio MI transit per centrum gravitatis I punctorum O & R, quorum gravitas fingitur esse A. Ergo etiam hæc potentia 2. MI. A in æquilibrio erit cum omnibus BG, &c., atque adeo ejus directio MI in contrariam partem P producta MP (§. 37.) erit media directio omnium potentiarum BG, BG &c. & 2. MI. A exponet onus quod hypomochlium Z in media directione MP à potentiis rectis sustinebit. Quod erat demonstrandum. In figura male confunduntur puncta Z & M, quorum hoc non in curva AB, sed intra figuram ABC situm esse debet.

Corollarium I.

60. Si omnes potentiæ BG curvæ AB perpendiculares sint, evanescent anguli TBS, eritque ubique CD = EF = BG. Nam coincidentibus BF & BS, rectæ BV & BT æquales fient ipsi BS, & CT = CS; unde cum (constr.) sit CD : BG = BV : BT fiet omninò CD = BG. Sic etiam quia TE : BG = BV.CT : SC.BT, & hoc casu BV = BS, CT = CS, & BT = BS, ratio BV.CT ad SC.BT erit ratio æqualitatis, atque adeo EF = BG.

Corollarium II.

61. Et si præterea omnes BG inter se æquales fuerint, figuræ mixtilineæ AXCD & AXFE mutabuntur in parallelogramma rectangula CAX & EAX.

Corollarium III.

Fig. 16. 62. Unde si singulis curvæ AOM punctis potentiæ perpendiculares curvæ, & omnes inter se æquales BG applicatæ sint; vis totalis qua curva AOM urgebitur, eadem erit ac vis totalis, qua urgeretur curvæ basis AM, si etiam singulis ejus punctis potentiæ æquales ipsis BG, & basi AM etiam perpendiculares applicatæ essent, atque adeo exponetur rectangulo MAXZ. Nam descriptis circa curvam rectangulo ME, EA, cujus latus EE basi æqualis tangat curvam in O, & ad latera ME, AE rectangulis MXFE, AXFE, consideretur basis MA instar axis curvæ AOM, & quoniam secundùm hypothesin omnes potentiæ BG curvæ normales sunt atque inter se æquales, erunt (§. 61.) ef = CD = BG & hisce æquales existent homologæ lineæ respectu cujusvis alius curvæ puncti B; adeoque omnes potentiæ curvæ parti ABO normales, æquipollebunt duabus potentiis, quarum una axi perpendicularis exponitur rec-lo AXQP, alteraque axi parallela exponitur rectangulo AXFE. Sic etiam omnes curvæ OBM potentiæ æquipollent duabus, quarum una axi perpendicularis alteraque eidem parallela, & quarum hæc rec-lo MXFE, illa verò rec-lo PQZM exponitur. Atqui ob æqualia rec-la MEFX & AEFX, potentiæ axi AM parallelæ & directè oppositæ pertinentes ad curvæ partes ABO, MBO, utpote inter se æquales, se mutuo elidunt, solæque potentiæ axi perpen-

pendiculares considerandæ veniunt; illæ scilicet, quæ exprimuntur rec-lis XAPQ, & ZMPQ; ergo vis, qua tota curva AOM ab omnibus ipsi applicatis potentiis BG urgetur, exponitur rectangulo AXZM. Sed eandem vim basis AM quoque subibit, sicubi in singulis suis punctis ejusmodi æqualibus potentiis perpendiculariter premitur vel trahitur. Potentia enim, qua tota basis afficitur, est, ut hæc basis ducta in potentiam, qua singula ejus puncta urgentur, id est ut rectangulum AMXZ.

Corollarium IV.

63. Pariter, si loco curvæ AOM intelligatur superficies cylindri recti, cujus altitudo sit Mm; ac superficiei isti in singulis punctis potentiæ perpendiculares & æquales BG applicatæ cogitentur; tunc potentia, qua cylindrica superficies ab omnibus ipsi applicatis potentiis urgetur, sive id fiat pressione ejus contra planum *m*M, A*a*, sive tractione ab eodem plano, exponetur per parallelepipedum baseos AZ altitudinisque M*m*; adeoque æquatur potentiæ, qua afficeretur planum *m*MA*a*, si pariter singula ejus puncta æqualium potentiarum impressiones subirent. Nam in superficie cylindrica tot curvæ intelligi possunt ipsi AOM parallelæ similes & æquales, quot puncta sunt in altitudine cylindri vel prismatis *Mm*, quarum quælibet urgetur à potentia exprimenda rec-lo æquali AZ. Adeoque vis, qua omnes curvæ, id est cylindrica superficies, urgentur, exponetur per omnia rec-la ipsi AZ æqualia, quæ in parallelepipedo continentur, id est per parallelepipedum ipsum, sub basi AZ & altitudine M*m*. Et tanta potentia etiam urgetur rec-lum M*ma*A à potentiis æqualibus, singulis ejus punctis applicatis.

Definitiones.

IV.

64. *Solidum patiens* dicitur omne solidum ABCD, cujus singula superficiei curvæ CBAD puncta à potentiis quibuslibet superficiei perpendicularibus, BM, *bu* &c. urgentur, sed ita tamen, ut singula puncta curvæ *cbd*, sectionis solidi basi parallelæ, eadem potentia *bu* vel huic æqualibus afficiatur. Potentiarum verò *actio* in solidum patiens generali nomine *Pressionis* deinceps insignietur. Fig. 19. 20.

V.

65. *Pressio interna* est, cum potentiæ BM, *bu*, &c. cavæ superficiei punctis B, *b* &c. applicatæ, eam extrorsum juxta BM, *bu* premunt.

VI.

66. *Pressio externa* verò, cum convexæ superficiei puncta B, *b* &c. à potentiis ipsis applicatis introrsum premuntur, juxta MB, *ub* &c.

Ex ordine igitur literarum, quibus lineæ potentiarum applicatarum repræsentatrices signantur, statim dignosci poterit utrum applicatæ potentiæ introrsum, an verò extrorsum premant. Nam si litera vel signum, quo punctum superficiei signatur, cui potentia applicata est, primum locum tenet, pressio est interna, externa verò, si secundum locum. Sic BM, *bu* &c. denotant pressiones internas, quia puncta applicationis B, *b* &c. primum locum tenent, & MB, *ub*, &c. significant pressiones externas.

VII.

67. Per *Basin solidi patientis* intelligo quodvis ejus planum vel sectionem planam CBD horizonti æquidistantem.

VIII.

68. *Sectio* verò *recta solidi patientis* nobis est figura plana CAD solidi nostri, basi ejus recta, cujus sectionis rectæ *vertex* est punctum curvæ CAD à sua basi CD maxime distans, & linea AE ex vertice A ad CD perpendiculariter ducta dicetur *axis sectionis rectæ*, & forte etiam ipsius solidi patientis.

IX.

69. *Scala potentiarum* solido patienti applicatarum, est figura mixtilinea KL*r*QP in plano sectioni rectæ solidi patientis recto, atque per axem sectionis rectæ AE, transeunti, cujus figuræ ordinata quælibet 3*er* ejus axi KP, qui ipsi AE æquidistans ponitur, perpendicularis, exponit potentiam, qua unumquodque punctum curvæ *cbd* sectionis *cbdc* basi CBDC parallelæ, afficitur. *Origo* seu *vertex* hujus curvæ O est punctum occursus curvæ Q*r*L cum suo axe KP.

X.

X.

70. *Planum sublime* est GFI, quod basi patientis solidi æquidistans, per originem O scalæ potentiarum transit.

XI.

71. *Planum humile* est, quod sublimi parallelum, per maximam ordinatam PQ, scalæ potentiarum transit.

XII.

72. *Prisma redundans* est solidum GFBADIG, quod componitur ex solido patiente CBAD vertice ejus deorsum respiciente, & ex prismate recto GFBDI super basi CBD & terminato ad planum sublime GFI. Fig. 19.

XIII.

73. *Prisma deficiens* est solidum GFBADIG, quod remanet detracto scilicet solido patiente CBAD, vertice ejus A nunc sursum converso ex prismate recto GFBDI super basi CBDC, & terminato itidem ad planum sublime GFI. Fig. 20.

XIV.

74. *Solidum patienti analogum* juxta scalam potentiarum est solidum 2C2B2A2D, cujus quælibet sectio *2c2b2d* homologæ sectioni *cbd* in solido patienti similis, æqualis & parallela intervallo 2H2e æquali respectivæ ordinatæ *3er* scalæ potentiarum à plano humili 2G2F2I distat, dum homologa solidi ipsius patientis sectio cbd, intervallo He æquali abscissæ O3e ad ordinatam *3er* pertinenti, distat. Fig. 19, 20.

XV.

75. *Solidum prismati redundanti analogum* est solidum 2G2F2B 2A2D2I, quod componitur ex solido patienti analogo 2C2B2A2D & ex Prismate recto 2G2F2B2D2I, super basi 2C2B2D atque terminato ad planum humile 2G2F2I. Fig. 19.

XVI.

76. *Solidum prismati deficienti analogum* est solidum 2G2F2B2A 2D2I, quod relinquitur ablato solido 2C2B2A2D patienti analogo ex prismate recto 2G2F2B2D2I ad planum humile 2G2F2I etiam terminato. Fig. 20.

XVII.

Fig. 19, 29. 77. *Pseudo-cuneus* sectionis rectæ solidi patientis est solidum, cujus sectiones, plano humili vel sublimi parallelæ, sunt rectangula, quorum bases sunt ordinatæ figuræ cujusdam similis & æqualis sectioni rectæ solidi patientis; altitudines verò ordinatis modo nominatis respondentes ordinatæ Scalæ Potentiarum.

Circa axem KP sit figura 3C3A3D similis & æqualis sectioni rectæ CAD solidi patientis, cujus ordinata quælibet 3c3d proinde æquabitur ordinatæ cd transienti per punctum e, quod respondet puncto 3e, per quod ordinata 3c3d ducta est, quæ ordinata in scala potentiarum respondentem habet 3*er*. Pseudo-cuneus sectionis rectæ CAD est solidum, cujus singulæ sectiones plano GFI parallelæ sunt parallelogramma rectangula, quorum bases sunt ordinatæ 3c3d & altitudines ordinatæ 3*er* scalæ potentiarum, in eodem plano secante positarum, id est rectangula 3c3d. 3*er*. &c.

Hi Pseudo-cunei hac etiam ratione generari intelligentur: super figuris 3C3A3D & PLQ, tanquam basibus, erecta intelligantur prismata recta, quæ, ob bases suas ad angulos rectos sibi invicem occurrentes, se mutuo perforabunt. Solidum illud, quod à prismatis ad angulos rectos transversim se invicem perforantibus intercipitur, est Pseudo-cuneus, de quo agitur.

Si scala potentiarum est triangulum vel trapezium, tunc ex Pseudo-cuneo fit verus Cuneus.

XVIII.

78. *Projectio* cujusque figuræ in plano quodam, quod ideo etiam *projectionis planum* audit, est figura, quæ in plano projectionis formatur, demittendo ex singulis figuræ projectæ punctis perpendiculares ad planum projectionis. Sic curvæ *kim* projectio in plano projectionis 2G2F2I est curva 1*p*1*n*1*q*, quæ à perpendiculis ex singulis punctis curvæ *kim* ad planum 2G2F2I demissis, formatur.

PROPOSITIO IX. Theorema.

Fig. 17, 18. 79. *Si in singulis punctis conicæ superficiei* kcbimd *duobus planis* cbd *&* kim, *ad distantiam indefinite parvam* el *vel* ni *aut* pk *à se invicem distantibus, interjectæ, atque lineolis* ck *&* dm *terminatæ, potentia* fg *ad angulos rectos applicata fuerit, pressio, quam universa superficies*

ficies conica subibit, æquipollebit pressionibus, quas armilla pbq *duabus curvis* cbd *&* pnq (*quæ alterius* kim *projectio est in plano* cbd) *intercepta, & lineolis* cp, dq *terminata; & cylindrica superficies* knm *ad basin* kigm *& ad altitudinem* el *vel* ni *erectam terminatamque lineolis* pk *&* qm, *paterentur ab eadem potentia* gf, *in singulis armillæ & cylindricæ superficiei punctis perpendiculariter applicata*.

Sumatur in curva exteriore *cbd* quilibet arcus infinitesimus *sx* & per puncta *s*, *x* curvæ perpendiculares ductæ *st*, *xy* intelligantur curvæ interiori *pnq* occurrentes in punctis *t*, *y*. Porrò solidum *cbmd* sectum cogitetur duobus planis per lineolas *st*, *xy* ductis & plano *cbd* rectis, eruntque solidi *cbmd*, & planorum secantium communes sectiones triangula rectangula *stg*, *xyh* ac solidum hisce triangulis interjectum *txg* prisma erit. Quibus intellectis, pressiones, quas subibunt facies *tghy* & *styx* (quæ considerandæ sunt, tanquam continuam superficiem in *ty* incurvatam *stghyxs* basin *sghx* habentem) æquipollent (§. 63.) pressioni, quâ ab eadem potentia *gf* afficietur basis *sghx*. Et cum hoc accidat, respectu cujuslibet alius *sghx* in superficie conica *kbm*, & homologarum areolarum *styx* in armilla, & *tghy* in superficie cylindrica, perspicuum est, pressiones quas omnes areolæ *sghx* in superficie conica subeunt, æquipollere pressionibus, quas sustinent omnes areolæ *tsxy*, quæ sunt in armilla, & quas sustinent omnes *tghy*, quæ in cylindrica superficie *knm* continentur. Ac propterea pressio, quam subit zona conica *kbm* ab omnibus ipsi perpendiculariter applicatis potentiis æqualibus *gf*, æquipollet pressionibus, quas ab omnibus perpendiculariter applicatis potentiis ipsis *gf* æqualibus patientur armilla *pbq* & superficies cylindrica *knm*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X. Theorema.

80. *Si singulis punctis superficiei convexæ aut cavæ* CBAD, *qua solidum patiens* CBADC *ex parte terminatur, potentiæ inæquales quidem & superficiei perpendiculares* MB, ub &c. *vel* BM, bu &c. *applicatæ sint, sed quarum eæ saltem omnes, quæ singulis punctis cujusque sectionis* bcd *basi* CBD *parallelæ applicantur, æquales sint, & exponantur per homologam ordinatam* 3er *scalæ potentiarum; Pressio, quam superficies curva solidi patientis ab omnibus potentiis patietur, æquivalebit pressioni, qua urgeretur basis solidi patientis* CBD *juxta directionem basi perpendicularem* *per centrum gravitatis* δ *solidi* Fig. 19, 20.

2G2F2B2A2D2I *quod prismati redundanti (deficienti)* GFBADI *analogum est, ductam, quam pressionem idem hoc solidum analogum exponat; & simul etiam pressioni, quam exponit pseudocuneus sectionis rectæ in solido patienti, seu solidum* 3C3ALQ3D *exserendæ in sectionem solidi patientis rectam* CAD *juxta directionem* er *huic sectioni perpendicularem, & per centrum gravitatis* u *pseudocunei ductam.*

Hoc est, si β designet solidum illud prismati redundanti (deficienti) analogum, & *u* pseudocuneum memoratum in propositione, Potentiæ β & *u* in directionibus *u*β, e*u*, vel in directionibus β*u* & *u*e patienti solido applicatæ, in æquilibrio consistent cum omnibus potentiis BM, *bu* &c. cavæ superficiei CBAD, vel cum omnibus MB, *ub* convexæ applicatis.

Solidum patiens sectum intelligatur duobus planis *cbd*, *kim* basi CBD æquidistantibus & indefinite vicinis. Portio superficiei curvæ solidi patientis duobus planis secantibus intercepta, quam deinceps per *kbm* designabimus, est instar superficiei conicæ duabus curvis *cbd*, & *kim* atque lineolis *ck*, *dm* terminatæ. Curvæ *cbd* projectio in plano humili 2G2F2I sit 1*c*1*b*1*d*, & curvæ *kim* projectio in eodem plano humili 1*p*1*n*1*q*, in plano vero *cbd*, curva *pnq*.

Jam pressio quam superficies conica *kbm* subibit à potentia *bu* (secundum hypothesin) = 3*er*, in singulis ejus punctis perpendiculariter applicata (§. 79.) æquipollet pressionibus, quas paterentur armilla *pbq* (qualis in præcedenti propositione considerata) & Cylindrica superficies *knm*, si etiam singula armillæ & cylindricæ superficiei puncta eadem potentia *bu* = 3*er* perpendiculariter afficerentur; atqui potentia qua armilla *pbq* afficietur erit, ut hæc armilla ducta in potentiam *bu* vel 3*er*, qua singula ejus puncta urgentur, id est, exponi debet per solidum *pbq*. 3*er*, vel quia armilla *pbq* = suæ projectioni 1*p*1*b*1*q*, ac 3*er* (§. 74.) = 2H2*e* = 1*b*2*b*, per solidum 1*p*1*b*1*q* in 1*b*2*b*, id est per semitubum 1*p*1*b*2*b*1*q*1*d*, solido 2G2B2A2I inscriptum. Pressio verò quam superficies cylindrica *knm* ab applicatis potentiis pateretur, æqualis (§. 63.) pressioni, quam subiret rectangulum *kpqm*, quod cylindricam superficiem subtendit, exponetur solido seu parallelepipedo *km*. *el*. 3*er*, vel parallelepipedo 3*k*3*m*. 3*e*β*l*. 3*er*, quod alteri æquale est atque pseudocuneo inscriptum. Unde, quia pressio, quam quælibet alia zonula conica *kbm* solidi patientis ab applicatis potentiis patietur, similiter æquipollet pressionibus, quibus homologa armilla *pbq*, & homologa superficies cylindrica *knm* ab eadem potentia singulis zonulæ conicæ punctis perpendiculariter

lariter applicata, urgentur: ultrò ſequitur fore, ut preſſiones, quas ſubibunt omnes zonulæ conicæ, quæ in univerſa ſuperficie curva ſolidi patientis continentur, id eſt preſſio, quam ipſa hæc ſolidi patientis ſuperficies curva patietur, æquipolleant preſſionibus, quas omnes armillæ, & omnes cylindricæ ſuperficies zonulis conicis homologæ ab applicatis potentiis patientur; atqui cum paulo ante oſtenſum ſit, preſſionem à qualibet armilla *pbq* exceptam exponi homologo ſemitubo cylindrico *1p1b2b1q* cujus baſis *1p1b1q* duabus curvis *1p1n1q* lineolisque *1c1p* & *1q1d* intercepta æqualis eſt ipſi armillæ *pbq*, cujus projectio eſt, altitudo verò *1b2b* (§. 74.) æquatur ordinatæ *3er* ſcalæ potentiarum, preſſionemque cujusque ſuperficiei cylindricæ *knm* exponi parallelepipedo *3k3m. 3el. 3e3l* Pſeudocuneo inſcripto; preſſio omnium armillarum exponetur per omnes ſemitubos cylindricos *1p1b2b1q*, qui in ſolido 2G2F2A2D2I priſmati redundanti (deficienti) analogo continentur, id eſt per ipſum hoc ſolidum analogum, & potentia, quæ ex omnibus illis quæ ſuperficies cylindricas *knm* in ſolido patienti urgent, naſcitur, exponetur per omnia parallelepipeda Pſeudocuneo inſcripta; ſeu quia ejusmodi parallelepipeda collective ſumta figuræ, cui inſcripta ſunt, & in quam ultimo evaneſcunt, (perinde ac omnes ſemitubi ſolido analogo inſcripti, in hoc ſolidum priſmati redundanti vel deficienti analogum) æquantur, per ipſum Pſeudocuneum. Ergo omnes potentiæ ſingulis punctis univerſæ ſuperficiei curvæ CBAD applicatæ BM, *bu* &c. vel MB, *ub* &c. æquipollent duabus potentiis, quarum una, per ſolidum 2G2F2B2A2D2I exponenda, agat juxta directionem *αδ* (§. 54.) baſi CBD ſolidi patientis perpendicularem & tranſeuntem per centrum gravitatis *δ* ſolidi modo nominati, quod brevitatis gratiâ unica litera *δ*, qua ejus centrum gravitatis ſignatur, deinceps indicabimus, vel, quod idem eſt, omnium potentiarum conſpirantium planoque CBD perpendicularium, quæ per ſemitubos *1p1b1q* ſolido illi *δ* inſcriptos exponuntur; altera verò per Pſeudocuneum Q3C3A3D (unica itidem litera *ω* qua centrum ejus gravitatis ſignatur poſthac indicandum) juxta directionem *re* vel *by* per centrum gravitatis *ω* Pſeudocunei ductam, ſectionique rectæ CAD ſolidi patientis perpendicularem, quandoquidem parallelepipeda Pſeudocuneo *ω* inſcripta repræſentant potentias conſpirantes planoque CAD perpendiculariter applicatas, quarum media directio (§. 54.) per centrum earum gravitatis *ω* tranſibit. Propterea potentia *δ* in directione *αδ* plano CBD perpendiculariter applicata, & po-

E tentia

tentia ω plano CAD normaliter applicata in directione εγ, simul agentes eundem effectum præstabunt ac potentiæ BM, *bu* &c. atque adeò eædem potentiæ δ & ω contrario sensu agentes, secundum directiones αβ & εω, quæ omninò contrariæ sunt directionibus αδ & *b* , consistent in æquilibrio cum potentiis BM, *bu* &c. singulis punctis B, *b* universæ superficiei curvæ CBAD applicatis. Sed potentiæ eædem δ & ω agentes juxta directiones αδ & εγ etiam in æquilibrio manebunt cum omnibus potentiis MB, *ub* &c. Quæ erant demonstranda.

Corollarium I.

Fig. 21. 22. 21. Si nunc loco solidi BAE superficie curva BbA duobusque planis AE & BE invicem rectis terminati, intelligatur solidum BAS superficie curva BbAsS unicoque plano BS terminatum, quod totius solidi (§. 67.) basis sit, & planum EA (§. 68.) ejus sectio recta, sitque pro altera solidi parte EAsS eadem scala potentiarum, quæ partis solidi patientis EAbD, ita ut potentiæ *bu*, *su* singulis punctis sectionis *bs* parallelæ BS applicatæ inter se æquales sint & ordinatæ 3*er* hujus scalæ potentiarum; signentur, ut in propositione, in solido analogo omnes lineæ iisdem litteris, quibus homologæ lineæ in solido patienti, sed præposito binario tanquam nota diacritica, eruntque adeò solida 2F2B2*b*2A2H, & 2R2S2*s*2A2H analoga prismatis redundantibus (deficientibus) FB*b*AH, RS*s*AH. Analoga illa solida notentur literis δ & κ, quibus eorum centra gravitatis signantur, &, ut in præcedenti articulo, ω designet & pseudocuneum sectionis rectæ AE in solido patiente BAS, ejusdemque pseudocunei centrum gravitatis: quibus positis omnes potentiæ SM, *su* solido EAS applicatæ non aliam vim in solidum exserent, quam potentia κ trahens curvam AS secundum directionem ξκ sectioni rectæ AE parallelam & per centrum gravitatis κ transeuntem, una cum potentia ω trahente solidum juxta εω basi BS parallelam, adeoque omnes potentiæ BM, *su*, *bu*, SM &c. toti solido BAS applicatæ æquivalent potentiis δ, & κ solido in directionibus αδ & ξκ applicatis, cum ejus vertex A deorsum respicit ut fig. 21, vel in directionibus αβ & ξθ cum solidi vertex sursum conversus est ut fig. 22; ac insuper potentiæ ω solidi alis A*b*B, A*s*S hinc inde applicatæ in directionibus *b*γ *s*ω utroque casu. Sed si potentiæ solido patienti applicatæ sunt exterius prementes, eæ spectandæ sunt tanquam agentes juxta MB, *ub*, MS, *us* &c. eoque casu hæ potentiæ æquipollebunt iisdem

iisdem ac prius δ, κ, ω sed in directionibus, $\delta\alpha$, $\kappa\xi$; γb, & ωs prementibus solidum BAS in casu figuræ 21, & juxta directiones $\beta\alpha$, $\theta\xi$ in figura 22.

Corollarium II.

82. Adeoque, si solidi BAS partes BbA & SsA circa verticem A converti atque instar alarum alicujus follis ab invicem diduci atque iterum ad se mutuo constringi queant, erit $\gamma . Ae + \delta . \alpha E$ momentum totale potentiarum γ vel ω, & δ, quæ æquipollent potentiis curvæ superficiei AbB in singulis perpendiculariter applicatis BM, bu, &c. vel MB, ub &c. Et $\omega . Ae + \kappa . \xi E$ momentum totale potentiarum ω & κ solidi parti AsS applicatarum & æquipollentium potentiis SM, su &c. vel MS, us &c. singulis punctis superficiei curvæ AsS applicatis.

Corollarium III.

83. Si nunc solidum patiens aBAS unica superficie curva terminatum sit, cujus singula puncta à potentiis ipsi perpendicularibus urgentur & quæ potentiæ determinentur scala potentiarum KLQP, ita ut supremum punctum a urgeatur à potentia ba = KL, infimum A à potentia 2A2H = PQ, singulaque puncta circumferentiæ sectionis BS à potentia MB = MS = 3er & sic de cæteris respective: tale solidum aBAS in altum urgebitur juxta directionem planis FO, vel 2FQ perpendicularem, vi quam exponit solidum 2a2B 2A2S quod (§. 74.) patienti analogum est. Nam sicut supra (§. 81.) vis seu potentia æquipollens singulis potentiis toti superficiei curvæ BAS (figuris 21. & 22.) perpendiculariter applicatis, constat potentiis contrariis atque æqualibus γ & ω perpetuo in eadem directione $\gamma\omega$ basi BS parallela in contrarias partes agentibus, & potentiis δ & κ conspirantibus atque juxta directiones $\delta\alpha$, $\kappa\xi$ basi normales agentibus; quarum potentiæ γ & ω toties se mutuo destruunt, quoties totum corpus BAS firmum est, nec ejus partes BAE, SAE ab invicem deduci possunt, adeo ut solæ potentiæ κ & δ conspirantes supersint considerandæ, reliquis γ & ω, quasi non essent, sepositis; jam hæ potentiæ, quæ potentias efficaces significant, δ & κ simul sumtæ significant totum solidum 2F2B2A2S2R quod prismati redundanti (fig. 21.) vel deficienti (fig. 22.) FBASR analogum est. Ita etiam in solido nostro aBAS potentiæ directe contrariæ per pseudocu- Fig. 25.

 neum

neum *a* expositæ se mutuo elidunt, ipsæ verò, quæ juxta directiones planis BS vel FR perpendiculares agunt, hoc loco considerandæ veniunt; nam pars superior B*a*S solidi nostri deorsum urgebitur vi seu potentia 2F2B2*a*2S2R, & inferior BAS potentia, quam exponit solidum 2F2B2A2S2R, quod prismati redundanti FBASR analogum est, in altum urgetur juxta directionem plano BS rectam. Adeoque (§. 38.) detracta potentia minore, quæ exponitur solido 2F2B2*a*2S2R analogo prismati deficienti FB*a*SR, ex potentia majore, quam solidum redundanti prismati FBASR analogum exponit, quandoquidem minor potentia corpus patiens perpendiculariter deorsum, major verò verticaliter in altum urget; & remanebit vis corpus in altum cogens exponenda solido 2*a*2B2A2S, quod patienti solido *a*BAS analogum est.

CAPUT III.

De Figuris, quas Corpora flexibilia induere debent à potentiis ipsis quomodocunque applicatis; & de Mediis directionibus harum potentiarum.

EGimus hactenus de potentiis corporibus inflexibilibus applicatis, earum medias directiones assignavimus; in hoc verò capite potentias corporibus cedentibus seu flexibilibus appendemus, quæ circumstantia flexibilitatis duo indaganda jubet. Primum quamnam corpus flexile figuram debeat acquirere ab applicatis potentiis, vel potius, quamnam retinere debeat formam, ubi potentiæ ad æquilibrium sese composuerunt. Secundum respicit mediam directionem ejusmodi potentiarum in æquilibrio consistentium, & vim impulsus secundum hanc mediam directionem.

DEFINITIONES.

I.

84. Corporis perfecte flexilis ZAX terminis suis Z, X alicubi affixi *Figura* ZBABX *manens* dicitur, quam corpus retinet, posteaquam omnes potentiæ BH, βH &c. curvæ, punctis per totam ejus longitudinem quomodocunque applicatæ, ad æquilibrium se composuerunt.

II.

II.

85. *Tenacitas* vel *Firmitas* fili aut corporis in quolibet ejus puncto seu elemento curvæ, est vis illa fili aut corporis, qua potentiæ illi aut vi ex omnibus applicatis potentiis nascenti, atque filum in contrarias partes trahendo id dilacerare conanti, resistit; atque adeo æquipollet, vel æquatur, ipsi vi dilaceranti, ex omnibus corpori applicatis potentiis resultanti.

III.

86. *Potentiæ laterales* ex fili aut corporis tenacitate in quolibet ejus elemento, *derivatæ*, sunt duæ potentiæ secundum directiones sibi invicem ad angulum rectum occurrentes, ex quibus conjunctim agentibus resultaret vis aut potentia æqualis corporis tenacitati in dicto ejus elemento, aut etiam vi ejus dilaceranti.

Sic cum filum, vel potius fili elementum B*b*, vi quadam ex omnibus applicatis BH, βH &c. resultante tenditur, idque sua tenacitate æquali vi tendenti impedit ne extendatur aut prorsus rumpatur, hæc tenacitas, aut vis illa tendens tenacitati æqualis, intelligi potest, tanquam potentia resultans ex potentiis lateralibus, secundum BM & B*l* simul agentibus. Et vis qua tenditur elementum Bβ, cui tensioni id sua tenacitate resistit, spectari potest tanquam nascens ex duabus lateralibus potentiis juxta directiones BN & B*k*. Ejusmodi potentias laterales juxta BM vel B*l*, & juxta BN aut B*k* deinceps designabimus per *p*BM, *p*Bl, *p*BN & *p*Bk. Tenacitates vero duorum elementorum contiguorum B*b* & Bβ indicabimus per T & *t*. Fig. 29.

Cæterum in hisce supponimus filum quidem flexile esse in omnibus suis partibus, non vero extensibile.

PROPOSITIO XI. LEMMA.

87. *Si fuerint quotcunque decrescentes magnitudines* A, B, C, D, E, *erunt omnium differentiæ simul sumtæ æquales excessui maximæ supra minimam.* Nam ultro liquet, esse A − B, + B − C, + C − D, + D − E = A − E, unde si E = o, erit summa differentiarum maximæ A æqualis.

Scholion.

88. Quanquam hoc lemma simplicitate sua nullius usus prima fronte videatur, in eo tamen omnes quadraturarum methodi fundantur, quod prolixius quidem ostendi posset tam in antiquorum methodis quam recentiorum; sed brevitatis gratia id tantum in usu Calculi integralis uno alteroque exemplo illustrabitur. Calculus integralis vel summatorius est inversus calculi differentialis, & consistit in eo, ut inveniatur quantitas A ex indeterminata quadam & constantibus composita, ejus indolis, ut, si loco indeterminatæ in ea substituantur successive eadem indeterminata, sed elemento suo simplici, ejusve 2plo, 3plo, 4plo, 5plo &c. mulctata inde exsurgant quantitates B, C, D, E &c. quarum differentiæ A—B, B—C, C—D, D—E &c. sint ejusdem formæ cum elemento seu quantitate infinitesima summanda, ita ut prima differentia A—B, exhibeat ipsam quantitatem differentialem, cujus summa seu integrale quæritur. Ut si curva quædam sit quadranda, cujus axis dicatur x, & ordinatæ ad hunc axem y, ita ut areæ elementum futurum sit ydx. Area ipsa invenietur, si haberi possit, quædam quantitas A ex indeterminata x & quantitatibus datis seu constantibus composita, itaque comparata, ut, si in ea substituantur loco indeterminatæ x, aliæ $x-dx$, $x-2dx$, $x-3dx$, $x-4dx$ & sic deinceps in infinitum, inde proveniant magnitudines B, C, D, E, &c. quarum prima differentia A—B det ydx, secunda B—C det secundum elementum areæ ydx in quo ordinata y jam respondeat non axi x sed axi $x-dx$, suo scilicet elemento dx imminuto, atque sic de reliquis respective. Hac enim ratione perspicuum est, omnes A—B, B—C, C—D &c. exhibere aggregatum omnium ydx, quæ in area continentur, seu hanc aream ipsam; jam si in serie quantitatum decrescentium A, B, C, D, E &c. minima dicatur M, area quæsita, juxta Lemma (§. 87.) perpetuo erit A—M, & si contingat, ut aliquando M sit O, tunc area æquatur ipsi A. Minima verò quantitas M semper habebitur ex Maxima A, si scilicet loco indeterminatæ x substituatur in ea $x-ndx$, ubi n est numerus elementorum, in quæ axis divisus est, adeo ut ndx sit $=x$, vel quod eodem recidit, si loco x ibi substituatur o, quandoquidem $x-ndx$ est o; quantitasque ex hac substitutione resultans erit minima M. Unde si contigat ut, facta substitutione ipsius o loco indeterminatæ x in quantitate A, hæc evanescat, tunc M erit $=$o, atque adeo area quæ-

quæsita, seu summa omnium ydx, erit A composita ex indeterminata x varie affecta & cum constantibus implicata. Pro inveniendo vero valore ipsius A, ex dato elemento ydx, loco ipsius y substitui debet ejus valor in x & constantibus, quem æquatio curvæ quadrandæ præbet. Quod de quadratura spatiorum seu arearum dictum est, id etiam de dimensione solidorum imò, de omnibus summationibus, pariter est intelligendum.

89. In hisce supposuimus literas A, B, C, D, E &c. usque ad M denotare seriem magnitudinum decrescentium, sed infiniti etiam sunt casus, in quibus eædem literæ iisdem ac præcedenti articulo factis substitutionibus indeterminatarum $x-dx$, $x-2dx$ &c. loco ipsius x in magnitudine A, proveniant B, C, D &c. majores quam A, adeo ut tota earum series repræsentet progressionem earundem crescentem ita ut differentiæ futuræ sint $B-A$, $C-B$, $D-C$, $E-D$, &c. quo casu M, quæ antea minimam seriei magnitudinem denotabat, nunc sit maxima, & quæ antea erat maxima A nunc sit minima, necesse est. Utriusque casus exemplum est adducendum.

90. *Exempl.* 1. Sit summanda quantitas $mdm : \sqrt{(aa+mm)}$, in qua m est variabilis & a data seu constans. Eritque hoc casu $A = \sqrt{(aa+mm)}$, adeoque $B = \sqrt{(aa+mm-2mdm+dm^2)}$ $= \sqrt{(aa+mm)}, - mdm : \sqrt{(aa+mm)} + \&c.$ Hinc $A - B = \sqrt{(aa+mm)}$ $- \sqrt{(aa+mm)}, + mdm : \sqrt{(aa+mm)} = mdm : \sqrt{(aa+mm)}$, unde series magnitudinum A, B, C, usque ad M est descendens: & si loco ipsius m in quantitate A (§. 89.) ponatur o, fiet eo casu $A = a = M$; cum igitur summa omnium $A-B$, $B-C$ &c. vel omnium $mdm : \sqrt{(aa+mm)}$ sit (87.) $A-M$, erit $\int mdm : \sqrt{(aa+mm)} = \sqrt{(aa+mm)}, - a$.

91. *Exempl.* 2. Sin detur elementum summandum $aamdm : \overline{aa+mm}\sqrt{aa+mm}$, tunc erit $A = aa : \sqrt{aa+mm}$, atque adeo $B = aa : \sqrt{aa+mm-2mdm\ dm^2}$ hoc est extrahendo revera radicem ex denominatore $= aa : (\sqrt{aa+mm} - mdm : \sqrt{aa+mm})$ quæ fractio ob denominatorem minorem, quam in fractione A, hac ipsa fractione minor est, atque adeo hoc casu erit $B - A = aamdm : \overline{aa+mm}\sqrt{aa+mm}$. Hinc progressio quantitatum A, B, C, D &c. est ascendens seu crescens; atque adeo summa omnium (87.) $B-A$, $C-B$, &c. est $M-A$, verum hoc casu M iterum est a, quoniam facta $m=0$ in æquatione $A = \sqrt{\mu}$ fiet $\sqrt{(\mu+mm)} = a$, atque adeò $M - A = a, - aa : \sqrt{aa+mm}$.

92. *Exempl.* 3. Pari ratione infinitæ hyperbolæ intra aſymptotas poſſunt quadrari. Sit earum æquatio generalis $x^{\alpha}y =$, in qua x abſciſſas à centro in alterutra aſymptotarum, & y ordinatas ſignificant; elementum areæ abſciſſæ adjacentis erit $ydx = x^{-\alpha}dx$. Invenietur verò $A = 1 : (\overline{\alpha-1}).x^{\alpha-1}$, & $B = 1 : \overline{\alpha-1}.(\overline{x-dx})^{\alpha-1} = 1 : (\alpha-1).x^{\alpha-1} - (\overline{\alpha\alpha+2\alpha-1})..x^{\alpha-2}dx + \&c.$ hinc B major eſt quam A ob denominatorem minorem quam in A, atque adeo invenietur $B - A = dx : x^{\alpha} = x^{-\alpha}dx = ydx$, unde cum A, B, C, D ſit ſeries aſcendens, fient omnes $B - A$, $C - B$, $D - C$ &c. id eſt omnia ydx, $= M - A$, At verò ſubſtituendo in æquatione $A = 1 : \overline{\alpha-1}.x^{\alpha-1}$ vel $= (1 : x)^{\alpha-1} : \alpha-1$, loco x, o fiet $M = (1 : 0)^{\alpha-1} : \alpha-1$, at verò $1 : 0$ eſt magnitudo infinita, quam deſignabimus per ∞, ergo $M = \infty^{\alpha-1} : \alpha-1$, atque adeò $M - A$ ſeu area hyperbolarum abſciſſæ adjacens, erit $= \infty^{\alpha-1} : \alpha-1, - 1 : \overline{\alpha-1}\, x^{\alpha-1}$, vel quia $1 : x^{\alpha-1} = xy$, erit $M - A = (\infty^{\alpha-1} - xy) : \alpha-1$. Ex quo apparet ejuſmodi areas juxta diverſos gradus infinite magnas eſſe, ſiquidem α ſit quilibet numerus poſitivus & unitate major. Sed de his ſufficit.

PROPOSITIO XII. THEOREMA.

Fig. 29. 93. *Tenacitas fili* ZBABX *ad figuram manentem redacti à potentiis* BH, βH &c. *ipſi applicatis, æquatur in quolibet fili elemento* Bb, *tenacitati fili in vertice* A *auctæ omnibus* GH, *quæ ex ſingulis potentiis* BH, βH &c. *curvæ* AB *applicatis derivantur, reſolutione illarum* BH *in æquipollentes potentias laterales* BG *&* GH *ſingulis curvæ* AB *elementis* Bb *perpendiculares & parallelas. Hoc eſt exponendo tenacitatem fili in* A; *erit* $T = A + \int GH$.

Et demiſſa ex elementi curvæ Bb *termino* b *perpendiculo* bg *ad tangentem* Bg *curvæ in* B, *ſumatur in hac tangente,* Bh *æqualis elemento curvæ* Bβ, *& agantur* hm *parallela ordinatæ* BC, bf *verò æquidiſtans axi curvæ* AC, *& per curvæ punctum* B, *indefinita* BME *eidem* AC *etiam parallela, in quam* ME *cadat perpendicularis* HF *ex termino* H *lineæ* BH *potentiæ curvæ puncto* B *applicatæ repræſentatricis: ac denique jungantur lineola* bh, *atque hisce factis habebitur in angulo contactus* bBg *figura* bfhg *ſimilis, & ſimiliter poſita cum figura majore* BFHG, *ſi elementum* Bb *fuerit ad elementum* Bβ *ut illius tenacitas* T *ad hujus tenacitatem* t; *atque adeo erit quælibet lineola in figu-*

figura bfhg *ad elementum curvæ* Bb, *sicut homologa linea in figura majore* BFHG *ad lineam* T, *quæ tenacitatem ejusdem curvæ elementi* Bb *exponit.*

Demonstr. I. Quoniam potentiæ BH (§. 39.) laterales BG & GH æquipollent, & ex hisce potentia GH curvæ puncto B in directione tangentis vel elementi Bβ applicata potentia conspirans est cum potentia, qua idem elementum Bβ tenditur, cui tensioni (§. 86.) tenacitas elementi *t* æqualis dicta est, hæ potentiæ conspirantes scilicet GH & *t* æquales erunt directe contrariæ vel oppositæ potentiæ T, quia elementum B*b* tensioni resistit, cum (secundùm hypothesin) omnia in statu manenti seu æquilibrii existant, atque adeo T=t+GH, vel T−t=GH. Atqui (§. 87.) omnes differentiæ T−t, inter singulorum curvæ contiguorum elementorum tenacitates, æquantur excessui maximæ T supra minimam, quæ est tenacitas in vertice, A, ergo T−A=∫GH, vel T=A+∫GH.

II. Quia (§. 39.) *p*BM : *p*Bb quæ est T, =BM : Bb, per hypothesin verò T : t=Bb : Bβ, & *p*Bβ id est t ad *p*Bk=Bβ : Bk, erit ex æquo *p*BM : *p*Bk=BM : B*k* vel B*m* (quoniam in triangulis similibus βBN & Bhm hypothenusæ Bh, Bβ æquales sunt; atque adeo ipsa triangula æqualia), & convertendo *p*BM−*p*Bk : *p*BM=M*m* vel *bf* : BM. Atqui, quoniam omnia in æquilibrio sunt, duæ potentiæ conspirantes *p*Bk & BF, quæ (§. 40.) ex potentia BH derivatur, æquales erunt directe oppositæ *p*BM, unde *p*BM−*p*Bk=BF, atque adeo, ponendo hunc valorem in antecedenti analogia, habebimus BF : *p*BM=*bf* : BM, sed *p*BM : *p*Bb, id est T=BM : Bb ergo ex æquo BF : T=*bf* : B*b*.

Simili prorsus argumento probabitur, quod *p*BN−*p*Bl=FH, & (*p*BN−*p*Bl) vel FH : *p*Bl=*fh* : Mb; unde quia etiam (§. 39.) *p*Bl : *p*Bb vel T=Mb : Bb; erit pariter ex æquo FH : T=*fh* : Bb, vel invertendo T : FH=Bb : *fh*, & quia paullò ante habuimus BF : T=bf : Bb, erit denique ex æquo BF : FH=bf : fh, atque adeo triangula BFH, *bfh* sunt similia & propter parallelas *bf* ac BF similiter posita. Præterea, quia ipsæ BG, & *bg* utpote eidem tangenti B*g* perpendiculares inter se parallelæ sunt, æque ac lineæ BH & bh, liquet etiam triangula BGH & *bgh* similia esse, ac propterea figuræ BGHF & *bghf* ex triangulis similibus compositæ, similes erunt & similiter positæ. Porrò cum invenerimus supra FH : T=*fh* : Bb, erit permutando FH : fh=T : Bb, atque adeo duæ quælibet aliæ lineæ homologæ in figuris similibus BFHG & *bfhg* erunt in hac

eadem

eadem ratione T ad Bb, vel permutando, quælibet lineola in figura minore erit ad elementum curvæ Bb, sicut homologa linea in figura majore ad tenacitatem T ejusdem curvæ elementi. Quæ erant demonstranda.

Corollarium I.

94. Ducta, si placet, per verticem A recta AO arbitrariæ magnitudinis, axi AC perpendiculari, ac super ea descripto semicirculo APO, agantur AP parallela elemento Bb, & Ap æquidistans alteri curvæ & elemento contiguo Bβ, & jungantur cum Po rectam Ap secans in Q, tum etiam pO; quibus peractis, erit BG : T = PQ : AP. Nam (§. 93.) est BG : T = bg : Bb, atque ob parallelas AP, Bb & Ap, Bβ, sectores seu triangula Bbg & APQ similia sunt, atque adeo *bg* : B*b* = PQ : AP; ergo etiam BG : T = PQ : AP.

Corollarium II.

95. Quælibet recta in figura BGHF est ad homologam in figura *bghf*, ut alterutra ex potentiis pBl vel pBM, quæ elementi Bb tenacitati T æquipollent, ad homologum, id est respondens latus in triangulo characteristico BMb: hoc est, quælibet linea in figura majori est ad homologam in minori sicut *p*Bl ad Bl; vel sicut *p*BM ad BM. Nam quia in utraque figura duæ quælibet lineæ homologæ sunt inter se, sicut T ad Bb, & quia T ad Bb, sicut *p*Bl ad Bl vel Mb, aut sicut *p*BM ad BM, liquet assertio hujus corollarii.

Corollarium III.

96. Si omnes applicatæ potentiæ BH curvæ perpendiculares sint, ut BD, puncta G & H confundentur cum puncto D, evanescentibus GH, *gh* in utraque figura majore & minore; atque adeò tenacitas curvæ ubique æqualis erit tenacitati in vertice A, atque adeo constans seu data. Id est habebitur ubique T = A.

Corollarium IV.

97. Idcirco, cum (§. 94.) sit BG : T = PQ : AP = sin. anguli PAQ seu anguli gBb, id est sinus curvitatis in B ad radium, erit in casu potentiarum curvæ perpendicularium una earum BD cuilibet curvæ puncto B applicata ad tenacitatem fili (§. 96.) constantem

tem A, sicut sinus curvitatis in curvæ puncto, cui potentia applicata est ad radium; & permutando erit potentia applicata BD ad sinum curvitatis in B sicut A ad radium, id est, in ratione data.

Elegans hæc proprietas ab Acutissimo Geometra Joh. Bernoulli primùm animadversa est; sed eam, quantum ex Commentariis Acad. Reg. Scient. Paris. 1706. ad diem 12. Maji apparet, ex alio fundamento deduxit.

Corollarium V.

98. Iisdem adhuc positis, quæ in duobus proxime antecedentibus Corollariis, quia (§. 93.) HF : hf = BF : bf = T : Bb (vel §. 96.) = A : Bb, erit ∫FH : ∫fh = ∫BF : ∫bf = A : Bb, si singula curvæ elementa æqualia assumta fuerint. Atqui (§. 87.) ∫hf, seu omnes hf vel Nn, posita Bn = bM, respectu curvæ portionis AβB æquantur excessui maximæ ordinatarum differentiæ ae (posito arculo curvæ Aa = Bb = Bβ = Zz) supra minimam bM, id est; ae − bM (vel etiam, quia ae ac aA æquales fiunt cum axis CA curvæ perpendicularis est in A) Aa − bM = Bb − bM; & ∫bf = ∫Mm = BM − Ae (vel quia Ae hoc casu evanescit præ Aa vel Bb) = BM. Ergo ∫FH : Bb − bM = ∫BF : BM = A : BC. Ubi omnes FH seu ∫FH, & ∫BF pertinent ad arcum curvæ AβB.

Sin verò ∫FH & ∫BF pertinuerint ad arcum curvæ BZ & tangens hujus arcus in Z axi AC parallela fuerit, erit Zy − o, posita ut supra Zz = Bb = Bβ &c. atque adeo zy = Zz = Bβ; unde ∫hf vel ∫Nn erit hoc casu (§. 87.) BN − Zy = BN, & ∫bf − ∫Mm = yz − Nβ = Zy − Nβ = Bβ − Nβ, atque adeò ∫FH : BN = ∫BF : Bβ − Nβ = A : Bβ.

Corollarium VI.

99. Si potentiæ curvæ applicatæ BH, βH &c. axi AC æquidistantes sunt, coincident BH, BE, & *bh* ac *bf* evanescentibus HF, *bf*; atque adeò omnia ordinatarum elementa bM, BN &c. hoc casu æqualia sumenda sunt; ac proinde omnes potentiæ secundùm directiones ordinatarum ex tenacitate elementorum curvæ derivatæ in ista hypothesi æquales existent. Propterea, vocando unamquamque harum æqualium potentiarum B, fiet nunc (§. 95.) BE : bf vel Mm = B : bM, adeoque cum B & bM constantes sint hoc casu, erit ∫BE : ∫Mm = B : bM, vel quia (§. 98.) ∫Mm = BM − Ae = BM evanescente Ae præ Aa, fiet ∫BE : BM = B : bM & permutando

 ∫BE:

$\int BE : B = BM : bM$. Porro, quia ordinata *ae* vertici A proxima in ipsam curvam Aa desinit, & B generaliter constantem potentiam juxta ordinatarum directiones denotans, etiam eam, quæ juxta directionem *ea* vel A*a* agit, exponet, sed potentia juxta A*a* est tenacitas curvæ in vertice A, ergo $A = B$, atque adeo $\int BE : B = \int BE : A = BM : bM$.

SCHOLION.

100. Ex Corollariis theorematí nostro adjectis satis constare potest quam latè pateat ejus usus, revera enim infinitorum id problematum solutionem continet, quorum Problemata *Catenariæ*, *Velariæ*, & figuræ lintei ab incumbente liquore inflexi nonnisi casus sunt specialissimi nostri theorematis. Sed priusquam ad applicationem ejus nonnullis specialibus ejusmodi casibus accedam, monendum est atque notandum, potentias applicatas BH, βH, etsi simplicibus & finitæ magnitudinis lineis expressas, nonnunquam lineolas tantum infinitè parvas, quandoque etiam rectangula infinitesima significare; & tenacitates fili in singulis punctis ejusdem semper generis magnitudines existere quidem cum potentiis applicatis, sed præ hisce infinitas; ut id ex ipsa applicatione clarius elucescet.

101. Sint ergo $AC = x$, $CB = y$, $BM = dx$, $bM = dy$, $Bb = ds$, $AO = a$; $AP = m$ & $PO = n = \surd(aa - mm)$. Hinc $PQ = dn$, & $Qp = dm$. Hisce positis, triangula similia BbM, & OAP præbent $ds = adx : n$, & $dy = mdx : n$. Idcirco substitutis his valoribus in analogia $BG : T = PQ : AP$, §. 94. reperta, erit $BG : T = dn : m$, primus Canon. Et $T = A + \int GH$, altera formula generalis.

102. Sint potentiæ applicatæ BH curvæque perpendiculares $= bds$, ubi *b* est magnitudo data, eritque hoc casu (§. 96.) $T = A$, & A (§. 100.) ejusdem generis magnitudo cum potentia applicata, atque adeò dicatur $= ab$. Hinc ex $BG : T$ fiet $bds : ab$, vel $ds : a$ atque adeo $ds : a = dn : m = BG : T$, vel quia (§. 101.) $ds = adx : n$, erit $(adx : n) : a = dn : m$; atque adeò $dx : n = dn : m$ ergo $mdx = ndn = -mdm$, & $dx = -dm$, & integrando $x = a - m$ vel $m = a - x$, ergo $n = \surd(aa - mm) = \surd(2ax - xx)$, hine $dy (= mdx : n) = adx - xdx : \surd(2ax - xx)$, ergo $y = \surd(2ax - xx)$ quæ est æquatio ad circulum.

103. Si potentia curvæ perpendicularis BD vel BG aut BH (hæ tres in hoc casu unum idemque significant) sint $= dy^2 : ds$; qui est casus

casus *Velariæ*, ut suo loco plenius ostendetur, erit, factis debitis substitutionibus, BD $= mmdx : an$, atque posita A $(= T.) = a$, analogia (§. 101.) BG : T $= dn : m$, nunc fiet $mmdx : aan = dn : m$, hinc $aandn = m^3dx$ & $m^3dx = aamdm$ vel $dx = -aadm : mm$, hinc $x = aa : m, - a$ atque $m = aa : a + x$ & $n = \sqrt{(aa - mm)} = a\sqrt{(2ax + xx)} : a + x$, ergo $dy (= mdx : n) = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$. Pro æquatione *Velariæ*.

104. Si potentia applicata curvæ itidem perpendicularis BD sit kds, ubi k denotat quantitatem utlibet datam in x & constantibus, ponatur juxta superiorem (§. 100.) notam T $=$ A $= \frac{1}{2}aa$; factisque ex (§. 101.) convenientibus substitutionibus analogia BG : T $= dn : m$, mutabitur in $2kdx : an = dn : m$, hinc $2kdx = andn : m = -adm$, vel $2kdx = adm$. Ponatur $x + u =$ constanti b, ergo $du = -dx$, & $2kdu = -2kdx = adm$. Unde si fiat $2kdu = adp$, erit $dp = dm$, atque adeo $p = m$ & $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$. Quæ ex aliis principiis reperta est à Celeberrimis Bernoulliis. Si $k = u$, fiet $dy = -uudu : \sqrt{(a^4 - u^4)}$ pro æquatione figuræ lintei vel Elasticæ Acutissimi Jac. Bernoullii.

105. Si applicatæ potentiæ BH sunt axi AC parallelæ, ut BE, ducatur EI perpendicularis ad BD, unde si BE $= dq$, propter triangulorum BIE, APO similitudinem invenietur latus EI $= ndq : a$, & BI $= mdq : a$. Idcirco loco BG nunc est sumenda BI, in analogia BG : T $= dn : m$, fietque $(mdq : a) : t = dn : m$, vel $atdn = mmdq$, sed $a + \int$ IE $= a + \int ndq : a =$ T $= t$, & differentiando $ndq : a = dt$, vel $dq = adt : n$, quod in æquatione $atdn = mmdq$ suffectum, præbet $atndn = ammdt$ vel $dt : t = ndn : mm = -mdm : mm = -dm : m$; hinc $t = aa : m$, quod in superiori analogia substitutum, dat $(mdq : a) : (aa : m) = dn : m$, ex quâ elicitur $dq = a^3dn : m^3$ (vel propter $aa = mm + nn$) $= ammdn + anndn : m^3 = ammdn - amndm : m^3 = amdn - andm : mm$; unde, facta summatione, invenietur $q = an : m$, id est $mq = an$, vel substitutis loco m & n ipsarum proportionalibus dy, dx; reperietur $dy = adx : q$. Quæ æquatio omnis generis *Catenarias* continet.

Etsi vero modò inventa æquatio jam continetur in Corollario sexto, quod dat analogiam $\int$BF : A $=$ BM : bM, in qua si $\int$BF $= \int dq = q$, A $= a$, BM $= dx$, & bM $= dy$, habebitur $q : a = dx : dy$, atque adeò $dy = adx : q$. Non tamen abs re mihi visum est, si usum analogiæ BG : T $= dn : m$ etiam hoc casu illustrarem.

106. Sit $q = s$, per s intelligendo curvam AB, erit $dy = adx : s$, qui casus est simplicissimus problematis *Catenariæ*. Foret enim

$ms = an$, & $s = an : m$, ac $ds = \frac{amdn - andm}{mm}$, vel quia $ds = adx : n$, erit $dx = mndn - anndm : mm = - mmdm - nndm : mm = - aadm : mm$, ergo ut supra (§. 103.) invenietur $dy = adx : \surd(2ax + xx)$, æquatio *Catenariæ*, quæ eadem prorsus est cum *Velaria*. Sin verò gravium directiones in puncto ad distantiam finitam ponantur convergere, *Catenaria* erit *hyperbola æquilatera*, cujus demonstratio brevitatis gratia aliis relinquenda est, quanquam cæteroquin non longa sit, sed ferme una linea & absque calculo potest perfici.

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA.

107. *Inventa curva manente, in quam velum, linteum, aut quodvis aliud corpus flexile à potentiis applicatis arcuatur, assignare mediam directionem potentiarum & impressionem earum, juxta hanc mediam directionem.*

Fig. 30. Sit A*e*D inventa curva terminis suis tigillo seu lineæ inflexili ACD alligata, quæritur media directio omnium potentiarum *eb*, *db* &c. curvæ applicatarum, & quantitas impulsus, seu impressionis, quæ secundùm mediam directionem CB in tigillum DCA exeri debet.

Solutio. Per terminos curvæ A, D ductæ sint tangentes curvæ AB, DB convenientes in puncto B, in quarum alterutra, ut AB, capiatur segmentum AF, quod sit ad reliquam tangentem totam DB, ut tenacitas curvæ in A ad tenacitatem ejus in D, quæ tenacitates ex superius (§. 93.) demonstratis habentur. Per puncta A & D agantur perpendiculares AG, DM, rectæ DA, & per F ac B eidem AD æquidistantes FG, BE perpendicularibus occurrentes in G & E. Dividatur AD in C, ut sit AC : DC = DE : AG, & in perpendiculari lineæ AD per punctum C sursum ducta sumatur portio CH = AG + DE, & in parallela eidem AD per punctum H ducta sumatur HI = BE − FG, & jungatur denique IC, ejusque continuatio CB erit media directio quæsita, impulsus vero ex omnibus curvæ applicatis potentiis resultans, secundùm hanc mediam directionem, erit ad tenacitatem fili in A vel D, sicut IC est ad AF vel ad DB.

Demonstr. Linea AD non aliam à potentiis *eb*, *db* &c. curvæ A*e*D applicatis impressionem subire potest, quam quæ resultat ex potentiis, quibus in directionibus tangentium curvæ AB, DB urgetur, seu ex tenacitatibus curvæ in A & D, quandoquidem in his

tan-

tantum punctis curva AeD lineæ inflexili ACD alligata est. Verùm resolvendo potentias AF & DB in suas æquipollentes laterales AG & GF, atque DE & EB, quia ex conspirantibus AG & DE (§. 54.) nascitur potentia ipsis æqualis AG + DE in directione per C transeunte scilicet per ipsarum AG & DE centrum gravitatis, & rectæ AD perpendiculari, & quia potentia CH = AG + DE per constructionem contrario sensu agit, hæc CH in æquilibrio consistet cum potentiis AG & DE. Potentia vero, quæ ex contrariis EB, & GF resultat (§. 38.) æquabitur excessui majoris EB supra minorem GF, atqui etiam (constr.) HI = EB − GF, ergo ex contrariis & lineæ AD parallelis potentiis resultat potentia HI, quæ in recta AD agens ex C versus D in æquilibrio foret cum contrariis EB & GF, ergo duæ potentiæ CH & HI in æquilibrio consisterent cum potentiis AG, DE; GF & EB, quibus obliquæ AF & DB æquipollent atque adeo cum hisce obliquis, vel quia (§. 39.) ex lateralibus CH & HI unica potentia CI nascitur, hæc etiam in æquilibrio maneret cum potentiis obliquis AF & DB. Hinc (§. 37.) rectæ IC continuatio CB dat mediam directionem obliquarum AF, DB, vel, quod idem est, omnium potentiarum *eb*, *db* curvæ *AeD* applicatarum, ipsa vero IC exponit impressionem secundùm mediam directionem CB ex omnibus applicatis potentiis provenientem. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

108. Recta IC producta transit per concursum B tangentium AB, & DB. Protrahatur enim AB in N ut fiat BN = AF, ostendetur DN æqualis & parallela ipsi IC. Nam si per punctum N agantur NM, NO rectis DA vel BE & DE æquidistantes, propter parallelas NO, AG & OB, FG ac (constr.) BN = AF, erunt triangula AFG, NBO similia & æqualia, adeoque NO = ME = AG, totaque DM = DE + AG (constr.) = HC, sic etiam MN = EO = EB − OB = EB − FG (constr.) = IH, idcirco etiam DN = CI, atque propter parallelas DM & CH atque angulos æquales MDN & ICH ipsæ DN & IC parallelæ erunt. Porro quia (constr.) AC : DC = DE : AG vel EM (& propter parallelas EB ac MN) = AB : BN, atque adeo AC : DC = AB : BN, lineæ DN & CB non tantùm sunt æquidistantes, sed etiam DN & IC parallelæ ostensæ sunt; ergo IC & CB in directum positæ sunt, ac proinde ipsa IC producta per concursum B tangentium AB & DB transibit.

Co-

Corollarium II.

109. Hinc AF est ad DB, sicut sinus anguli ABC ad sinum anguli DBC. Nam in triangulo DBN, sinus angulorum NDB, DNB lateribus oppositis NB, DB sunt proportionales, & anguli illi propter parallelas DN & CB angulis DBC, ABC æquantur. Propterea præcedens, & hoc alterum corollarium, hanc facillimam problematis suppeditant constructionem. Producta tangente AB in N, ut ejus continuatio BN sit ad alteram tangentem totam DB, sicut tenacitas curvæ in A, quæ exponitur per rectam AF, ad tenacitatem ejusdem in D, quam exponit DB, recta BC per punctum concursus B tangentium AB, DB transiens & parallela lineæ DN, jungenti puncta D & N, erit media directio quæsita.

Corollarium III.

110. Si tenacitates fili in A & D æquales sint, media directio BC angulum tangentium ABD bifariam dividit. Nam quia AF æqualis DB hoc casu, & AF ad DB, ut sinus anguli DBC ad sinum anguli ABC per præcedens Corollarium, erit omnino angulus ABC æqualis angulo DBC.

Scholion.

111. Corollarium tertium nos manuducit ad novum illud curvarum genus, quod apud Cel. Jac. Bernoullii in Act. Lips. 1695. Fig. 31. pag. 548. *Linearum mediarum directionum* nomine venit. Nam si filum aliudve corpus flexile à potentiis *ae*, R*e* &c. in singulis punctis ipsi perpendiculariter applicatis in lineam ERA arcuatur, recta BD angulum ABE à tangentibus curvæ in utroque sui termino formatum bifariam dividens (§. 110.) est media directio omnium potentiarum *ae* &c. toti curvæ ERA applicatarum, & ducta tangente ab per punctum aliud curvæ *a*, recta *b*D, angulum abE bifariam dividens, est media directio potentiarum arcui ERa applicatarum. Jam omnes mediæ directiones BD, bD &c. contingent aliquam curvam CVD, quæ ideò *Linea mediarum directionum* vocatur.

PRO-

PROPOSITIO XIV. THEOREMA.

112. *Recta* AD *curvæ* ERA *perpendicularis, mediæ directioni* BD *potentiarum curvæ perpendiculariter applicatarum, occurret in puncto* D *lineæ mediarum directionum* CVD. Fig. 31.

Sit Aa curvæ elementum, & *ab* tangens curvæ in *a*; & bD linea bisecans angulum, *ab*E erit media directio potentiarum arcui curvæ ER*a* applicatarum: unde cum *b* ipsi B infinite vicinum sit, sequitur unam *b*D alteram BD secare in puncto D curvæ quæsitæ. Igitur probandum tantum restat, perpendicularem curvæ AD transire per punctum illud intersectionis D, duarum infinite vicinarum BD, *b*D. Centro quolibet F in tangente BE assumto, & radio FE descripto semicirculo EGH, agantur radii FG tangenti AB, & F*g* tangenti *ab* paralleli, junctisque EG, E*g*, agatur G*m* radio FE parallela, rectæ E*g* productæ occurrens in *h*, & radio Fg prolongato in *m*: denique ductæ sint semicirculi tangens GK in puncto G, & EM eidem tangenti parallela, quæ proinde radio FG perpendicularis erit. Jam quia FG tangenti AB parallela est, erit angulus ABH = EFG, & duo FEG & FGE simul æquales angulo ABE, seu duplo anguli DBE, quandoquidem BD angulum ABE bifariam dividit, igitur FEG = DBK, unde rectæ BD & GE sunt parallelæ. Pari argumento probatur, parallelas esse *b*D & *g*E: Igitur ducta *m*L parallela ipsi *h*E, vel *g*E, figura AB*b*D & FG*m*L erunt similes, cum compositæ sint ex triangulis similibus AB*b*, BD*b*, & FG*m*, GL*m*. Hisce positis, parallelæ FK & G*m* à media E*h* proportionaliter dividentur, atque adeò G*m* : G*h* = FK : EK (vel propter parallelas ME & GK) = FG : MG. Triangula vero similia GE*h*, & GL*m* (nam per constr. E*h* & L*m* parallelæ sunt) præbent, G*m* : G*h* = GL : GE. Igitur FG : MG = GL : GE; atque adeo FL jungens puncta F, L parallela est rectæ ME, ac proinde LFG est rectus, cum EM perpendicularis sit ipsi FG. Unde propter similitudinem figurarum AB*b*D, & FG*m*L, erit AB : BD = FG : GL, hinc, quia angulus LFG rectus est, angulus DAB itidem rectus erit, atque adeo AD curvæ ERA perpendicularis in A. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

113. Adeoque etiam triangula ADB & MEG similia sunt, ex

quo facile elicitur valor lineæ AD. Nam si FE $= a$, AP $= y$, Af $= dy$, EP $= x$, Pp $= dx$, & Aa $= ds$: erit AB $= xds : dx$; & quia angulus MFE $= a$Af, atque adeò triangula rectangula FME, & Aaf similia sunt, invenietur FM $= ady : ds$; & MG $= (ads - ady) : ds$, tum etiam ME $= adx : ds$; hinc quia MG : ME $=$ AB : AD, invenietur AD $= xds : ds - dy$.

Cl. Jac. Bernoullius (Act. Lipf. loco fupra citato) calculo analytico ufus, quem tamen illic non appofuit, reperit AD $= xds^2 + xdyds : dx^2$, ex qua formula noftra paulò fimplicior & nonnihil diverfa ratione à Bernoulliana ex præcedentibus elicita, nullo negotio derivatur, fubftituendo tantum loco dx^2 æqualem quantitatem $ds^2 - dy^2$, & numeratorem ac dominatorem dividendo per $ds + dy$.

SECTIO II.

POfteaquam ea, quæ ad æquilibria folicitationum, quibus unum idemque mobile urgeri poteft, fpectant, excuffimus: ipfi etiam motus varie accelerati atque retardati examinari debent, qui ex folicitationibus continue replicatis, & utlibet variabilibus, refultare poffunt. Propterea in hac fecunda Sectione Motus Corporum acceleratos & retardatos generaliffime contemplabimur tanquam oriundos ex folicitationibus continue quidem replicatis, non tamen utique uniformiter, ut in Galilæi fyftemate, in quo gravia in quacunque diftantia à centro gravium eadem gravitatis folicitatione urgeri intelliguntur; fed quacunque ratione variabilibus, five corpora rectà ad centrum gravium feu folicitationum acceleratricium ferantur, five in lineis curvis incedant. Hæc igitur Sectio complectetur quæcunque ad motus acceleratos, retardatos, ad motus projectorum in vacuo, quæ ad ifochronismum motus corporum in lineis quibuscunque curvis, quæ ad motus pendulorum &c. pertinent, in omni poffibili gravitatis, feu folicitationum centralium, hypothefi, demonftrata, methodo non minus univerfali, quam perfpicua atque facili: nam præter folutionem generalem Problematis inveniendi ex lege gravitatis, utlibet variabilis, femitam curvilineam projectorum in fpatiis refiftendi vi carentibus, tradet etiam hæc fecunda Sectio regulam generalem, fecundum quam gravitatem variare oportet ad id, ut curvæ projectorum femper algebraicæ, atque adeò geometrica conftruibiles evadant, ex qua multa deinceps curiofa atque utilia deducentur.

tur. Theoriam centri oscillationis proponet multo magis quam antea generalem, iis namque corporibus applicabilem, quæ in diversis fluidis oscillantur, vel in quocunque systemate gravitatis variabilis; loco ejus, quod Hugenius; & qui eum sequuti sunt, tantum egerunt de centro oscillationis in casu speciali gravitatis uniformis, excepto solo, quod sciam, Cel. Joh. Bernoulli qui nobis in Act. Lips. 1713. pag. 88. regulam generaliorem ex suis principiis eliciendam promittit, sed quæ nondum, ni fallor, lucem publicam aspexit, quamque ex fundamentis, à nostris diversis, aut saltem diversa methodo ab incomparabili Geometra erutam existimo, tametsi ipsam regulam nondum vidi. Nec reticendum hanc Sectionem secundam etiam acturam de solicitationibus requisitis ad id, ut mobilia in orbibus mobilibus revolvi queant, & de motu qui dicitur Apsidum; sed diversa ratione ab ea, qua Ill. Newtonus Sect. IX. Lib. I. Princip. Phil. Nat. Math. usus est. Sectionem denique claudet dissertatio de regulis motus ex percussione, quas ex unico fundamento æqualitatis virium ante & post conflictum corporum, nova, ut nobis videtur, ratione deducemus.

CAPUT I.

De generalibus Solicitationum continuatarum affectionibus, & de motibus in Vacuo inde oriundis.

DEFINITIONES.

I.

114. PEr vacuum designatur omne medium, quod corpora absque impedimento aut adjumento liberè trajicere possunt, solo suo motu à vi motrice accepto.

II.

115. Si mobilia quæcunque, quæ in lineis rectis feruntur, aut in curvis lineis incedunt, solicitationibus citantur, quarum directiones in aliquo puncto, positione dato, concurrunt, solicitationes ejusmodi vocentur centrales, vel etiam solicitationes gravitatis variabilis. Et punctum positione datum ad quod gravia solicitantur, centrum solicitationum. Solicitationes centrales ab Ill. Newtono vires centripetæ vocantur.

III.

116. Solicitationes continuari vel continue mobili applicari dicuntur, cum corpus in singulis spatii percurrendi punctis ad motum recens citatur, seu, quod idem est, à quadam solicitatione urgetur.

IV.

117. *Scala solicitationum centralium* seu *gravitatis variabilis* appellatur quælibet linea curva, ad aliquem axem per centrum solicitationum transeuntem relata, cujus ordinatæ axi rectæ solicitationes exponunt, quibus mobile in illis axis punctis, per quæ ordinatæ ductæ sunt, versus centrum urgetur, si scilicet corpus in axe feratur; vel, si ipsum in curva aliqua incedat, in illis curvæ punctis, quæ cum punctis in axe, per quæ ordinatæ transeunt, à centro solicitationum æque distant.

V.

118. *Solicitatio* gravitatis *tangentialis* vocatur quælibet solicitatio ex centrali derivata, qua mobile, in qualibet curva delatum, juxta directionem tangentis curvæ solicitatur.

VI.

119. *Solicitatio* gravitatis curvæ mobili describendæ *perpendicularis*, est ea, quæ ex centrali derivatur, cujusque directio ubique curvæ perpendicularis est. Hæc solicitatio perpendicularis conatui mobilis à directione tangentis recedere nitentis ubique æqualis est, alioqui corpus non moveretur in curva, quam describere ponitur, etenim, si hac vi perpendiculari conatus à curva recessorius major esset, mobile revera à curva recederet, recederet itidem accedendo magis quam par est ad centrum solicitationum, si minor existeret, utrumque contra hypothesin. Igitur ut conatus recessorius à curva retundatur & inutilis reddatur, tantam solicitationem coërcentem mobili applicari oportet, quantus est conatus destruendus; adeo ut ejusmodi conatus & solicitatio, juxta eandem directionem curvæ perpendicularem, sed in oppositas partes agentes in æquilibrio detineantur impedianturque quominus alterutra ejusmodi solicitationum super alteram effectum aliquem sortiatur, atque adeò mobile curvam, in qua incedere debet, deserat.

VII.

120. *Scala* solicitationum *tangentialium* est curva quælibet ad axem per centrum solicitationum centralium transeuntem relata, cujus ordinatæ solicitationes tangentiales exponunt in curvæ punctis, à centro solicitationum tantundem distantibus, ac ordinatæ.

121. Feratur mobile M in curva MON, alterumque A in recta AD per centrum D, ad quod solicitationes gravitatis centrales diriguntur, atque mobile M ad quodlibet curvæ punctum N delatum urgeatur versus D solicitatione centrali $N\alpha$, & hac eadem solicitatione urgeatur etiam mobile A delatum in punctum E rectæ AD, quod punctum E tantum distet à centro D, quantum curvæ punctum N, adeo ut ambo puncta N & E reperiantur ubique in aliquo arcu circulari EN centro D descripto, ductisque per singula puncta axis E, perpendicularibus EB ipsi AD & æqualibus ubique homologis lineis $N\alpha$, per singularum puncta B transibit curva ABC, quæ vocatur scala solicitationum centralium, quoniam quælibet ejus ordinata BE respectivæ $N\alpha$ (secundùm hypothesin) æqualis repræsentat solicitationem centralem in rectæ AD & curvæ MO punctis E & N centro D æquidistantibus. Porrò, quia solicitatio cantralis $N\alpha$ in quolibet curvæ MO puncto N (§. 39. 40.) æquipollet lateralibus $N\beta$ & $\beta\alpha$, quarum hæc sit in directione tangentis curvæ Nq, alteraque eidem perpendicularis $\beta\alpha$, per se patet illam, scilicet $N\beta$, vocandam esse solicitationem tangentialem ex centrali $N\alpha$ derivatam; propterea si in qualibet ordinata BE respondenti cuique $N\alpha$, sumatur $SE = N\beta$, & idem factum intelligatur respectu omnium reliquorum curvæ MON punctorum; resultabit inde curva RSC, quæ scala solicitationum tangentialium mobilis M in curva MON audit. Solicitatio perpendicularis $\beta\alpha$ nullam habet scalam, vel saltem nulla indigemus, quandoquidem in singulis punctis destruendo conatui recessorio mobilis M à curva (§. 119.) adhibetur, nec proinde alia sub ratione in considerationem venit. Fig. 32.

VIII.

122. Quoniam solicitationes centrales BE æque ac tangentiales SE continuantur, atque in mobili continue replicantur effectu præcedentium in succedentibus non sublato, quandoquidem per singula rectæ AD puncta ordinatæ ejusmodi BE transeunt: necesse est, ut ab hujusmodi solicitationibus indesinenter replicatis proveniant

 mo-

motus continue *accelerati*, cum mobilia A, M in recta AD & curva MON descendentia ad solicitationum centrum D accedunt; *retardati* verò cum certis quibusdam celeritatibus, quas *initiales* deinceps nominabimus, ex punctis E & N ascendere incipientia in recta & curva ab eodem centro D recedunt. Propterea solicitationes gravitatis centrales vel tangentiales vocantur *acceleratrices* mobilis in recta vel curva descendentis; eædemque solicitationes vocantur *retardatrices* mobilis ascendentis, vel à solicitationum centro recedentis.

IX.

123. *Momentum cujusque solicitationis* quocunque hæc nomine veniat, est rectangulum sub recta, quæ solicitationem exponit, & elemento spatii quod mobile ejusmodi solicitatione continue urgente transmittit. Sic rec-lum BEe est momentum solicitationis acceleratricis BE vel N*e*, durante descensu mobilis A in spatiolo E*e* ordinatæ BE adjacente; rec-lum verò *be*E momentum solicitationis retardatricis *be* mobilis ejusdem in spatiolo eE ascendentis. Sic etiam facta E*m* = N*n* elemento curvæ MON, rec-lum SE*m* vel SE. N*n*; est momentum solicitationis tangentialis & acceleratricis SE vel N*s*, cum mobile in curva per ejus arculum N*n* descendit, & rec-lum *se*. *m*E vel *se*. *n*N est momentum solicitationis tangentialis retardatricis *se*, cum mobile in curvæ arculo *n*N ascendit.

X.

124. *Scala celeritatum* est curva circa axem scalæ solicitationum centralium, vel saltem huic parallelum descripta, cujus ordinatæ ordinatis in scala solicitationum in directum positæ, vel iisdem saltem respondentes, celeritates mobili in illis rectæ AD, vel curvæ MON punctis, ad quæ ordinatæ scalæ solicitationum respiciunt, acquisitas exponunt. Sic, si ordinatæ PV, EF &c. scalæ solicitationum ordinatis ZP, BE in directum positæ, significant celeritates acquisitas, vel residuas mobilis descendentis accelerato, vel ascendentis retardato motu in punctis P, E rectæ AD, vel in punctis curvæ Q & N &c. Curva AVF erit Scala celeritatum mobili A in recta AD, vel Mobilis M in curva MDN descendentis, vel ascendentis.

XI.

125. *Momentum celeritatis* est factum ex celeritate mobilis in re-

cta vel curva incedentis in celeritatis crescentis vel decrescentis elementum. Si in scala celeritatum AVF, rectangulum EF. *af*, vel rec-lum *eaf* est momentum celeritatis EF elemento *af* crescentis, qua mobile spatiolum E*e*, transmittit, & rectangulum *ef*. *fa* est momentum celeritatis decrescentis *ef*, qua mobile A ex puncto axis *e*, vel in curva MON mobile M ex puncto *n* in altum feruntur retardato motu, & *fa* decrementum infinitesimum celeritatis decrescentis *ef*, cum mobilia ascendunt in spatiolis *e*E & *n*N, & EF celeritas residua erit in rectæ puncto E aut curvæ puncto N.

XII.

126. Ad designandum tempus quo unusquisque motus absolvitur, utemur nota characteristica temporis *t* spatio percurso aut conficiendo præfigenda. Sic *t*AE denotabit tempus, quo mobile A spatium AE accelerato suo motu cadendo absolvit, & *t*Ee significabit tempus quo elementum Ee axis AD uniformi motu percurritur. Et sic de reliquis.

Postulatum.

127. Petitur ut concedatur, motum descensus ascensusve per axis elementum E*e*, vel curvæ N*n*, sumi posse tanquam uniformem & æquabilem, quoties mobilia A & M hæc spatiorum elementa celeritate finitæ magnitudinis, præ incremento vel decremento ejus infinitesimo percurrere incipiunt, licet motus in iisdem spatiis reapse variati sint, quoniam celeritatum incrementa vel decrementa infinitesima, durante descensu vel ascensu mobilibus A & M superaddita vel ademta, evanescunt præ velocitatibus finitis, quibus corpora spatiola Ee, Nn transmittunt.

Corollarium.

128. Hinc quia spatia æquabili motu percursa sunt in composita ratione temporum & velocitatum, ipsa tempora, quibus prædicta rectæ vel curvæ elementa percurruntur, erunt, ut hæc elementa applicata ad celeritatem, quâ percurruntur; sic $t\mathrm{E}e = \mathrm{E}e : \mathrm{EF}$, & $t\mathrm{N}n = \mathrm{N}n : \mathrm{EF}$; unde $\mathrm{E}e = \mathrm{EF}.t\mathrm{E}e$, & $\mathrm{N}n = \mathrm{EF}.t\mathrm{N}n$.

PRO-

PROPOSITIO XV. LEMMA.

Fig. 33. *Anguli rectilinei* VDF *&* TD*m sunt directe ut arcus* VF *&* Tm *qui angulos subtendunt, & reciproce ut arcuum radii* DV *&* DT. Hoc est angulus VDF : ang. TDm $= \frac{VF}{DV} : \frac{Tm}{DT}$. Est enim ang. VDF : ang. TDm = (Tg : DT) : (Tm : DT), atqui ob arcus similes VF & Tg, erit Tg : DT = VF : DV, ergo angulus VDF : angulum FD*m* = (VF : DV) : (Tm : DT). Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

129. Hinc 1°. quilibet angulus VDF exprimi potest arcu VF, qui ipsum subtendit, diviso per radium DV, id est fractione VF : DF. 2°. Quilibet arcus VF est ut factum ex angulo VDF in radium DV, atque adeo hoc facto exprimi potest.

PROPOSITIO XVI. LEMMA.

130. *Omnis solicitatio uniformiter agens æquivalet motui genito, applicato ad tempus, quo motus iste producitur.*

Dicantur massa corporis movendi M, celeritas acquirenda V, adeoque motus generandus MV, tempus quo produci debet T, solicitatio, à qua uniformiter hoc tempore agente generari debet G, ostendendum, fore G = M. V : T. Cum solicitatio (§. 9.) utpote ex genere vis mortuæ nullum motum producat, nisi aliquo tempore in corpore continuata vel replicata fuerit, atque nunc solicitatio uniformiter agere ponatur, ita ut temporibus æqualibus æquales motûs quantitates in corpore producat, atque adeo motus geniti sint ut tempora, quibus generantur, ex se ipso clarum est, id quod in tempus T ductum producit motum M. V. æquivalere solicitationi G, unde cum M. V : T ductum in T producat M. V, sequitur G = MV : T. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

131. Res universaliter se habet, ut propositio indicat, sive velocitas acquisita & tempus finita aut infinite parva fuerint, modò solicitatio G toto tempore uniformiter agat. Sin verò ea difformiter operetur, propositio generaliter respectu cujuscunque temporis non am-

amplius obtinet; sed duntaxat per temporis tractum indefinite parvum dT, quo mobili tantum celeritas infinitesima dV acquiritur, quia non nisi per tempusculum ejusmodi infinitesimum dT solicitatio variabilis G (§. 127.) tanquam uniformis spectari potest; est ergo hoc casu G = MdV : dT, atque adeò dT = MdV : G. Ubi G significat pondus seu gravitatem utcunque variabilem massæ M.

PROPOSITIO XVII. Theorema.

132. *Momentum solicitationis cujusque æquale est momento celeritatis mobilis ducto in corporis massam.*

Positis iis, quæ in §§. 121, 123 & 125 dicta sunt, ponatur mobile M descendere super curva MON, atque per initium A scalæ celeritatum AVF ducta sit recta AH indefinita, angulum semirectum HAG continens, cum indefinita AG axi AD normali, & per puncta F, f &c. scalæ celeritatum agantur *a*H, *fh* eidem axi æquidistantes rectæ AH, occurrentes in punctis H, *h*, alteri vero AX in punctis G, *g*; ductaque H*i* parallela AG, propter angulum semirectum HAG erunt HG & AG; atque adeò EF æquales, & rec-lum H*g* = EF. *af* seu momento celeritatis crescentis. Probandum est; fore M. EF. *af* = N*n*. ES seu momento solicitationis tangentialis ES vel Nβ.

Demonstr. Per §. 131. est *t*N*n* = M. *af* : ES; nam, quæ ibi sunt dT, dV & G, hoc loco dicuntur tN*n*, *af* & ES vel Nβ, ergo ES. *t*N*n* = M. *af*, vel etiam ES. EF. *t*N*n* = M. EF. af; atqui (§. 128.) EF. *t*N*n* = N*n*, ergo ES. N*n* = ES. E*m* = M. EF. *af* = M. HG*g*. Quod erat demonstrandum.

Similiter si grave A in recta AD deorsum feratur, erit BE. E*e* = A. 2H2G2*g*, ponendo A denotare massam corporis, & 2H2G celeritatem in E acquisitam post casum ex altitudine AE, & rectangulum 2H2G2*g* triangulo rectangulo isoscelî 2H2A2G inscriptum; momentum velocitatis 2A2G vel 2H2G.

Ratione solicitationum retardatricium habetur etiam *se*. *n*N = M. *ef*. *fa* = M. *h*gG, & *be*E = A. 2h2g2G.

PROPOSITIO XVIII. Theorema.

133. *Si duo mobilia* A, M *æqualia, quorum hoc in curva* MON, *illud in recta* AD *feratur, in singulis punctis* E & N *à centro* D *æqua-*

qualiter distantibus eadem solicitatione centrali BE *urgentur, erit ubique momentum solicitationis centralis seu rectangulum* BE*e* *æquale homologo rectangulo* Nn. SE *vel* Nn. Nβ, *quod exponit momentum solicitationis tangentialis in curvæ puncto quolibet* N.

Arcus circuli *epn* centro D descripti secet rectam DN, in puncto *p*, & triangulum N*np* tanquam rectilineum ob suam infinitam parvitatem spectari potest rectangulum ad *p*, atque adeo simile triangulo N$\alpha\beta$. Idcirco erit Nα vel BE : Nβ (SE) = Nn : E*e* (N*p*), & BE. E*e* = Nβ. E*e* = SE. N*n* = Nβ. N*n*. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

134. Hinc si scalæ celeritatum AVF ad punctum F perpendicularis FT ducatur axi occurrens in T, subnormalis ET æqualis ubique erit respectivæ BE, quæ solicitationem centralem exponit in distantiis ED, ND à centro D æqualibus; nam quia TF*f* rectus est, triangula FTE & F*fa* similia erunt, atque adeò FE : ET = F*a* (E*e*) : *af*. Ergo EF. *af* = TE. E*e*; atqui (§. 133.) SE. N*n* = BE. E*e* & (§. 132.) SE. N*n* = M. EF. af, aut sumta M instar unitatis, = EF. *af*, erit TE. E*e* = BE. E*e* atque adeò TE = BE.

COROLLARIUM II.

135. In quibuslibet punctorum E & N distantiis æqualibus ED & ND à centro D, momenta celeritatum cadendo acquisitarum erunt æqualia. Nam sicut (§. 132.) AG vel GH celeritatem acquisitam mobilis M in curva MON descendentis, & rectangulum Hg triangulo HAG inscriptum celeritatis momentum in N exponunt, ita etiam 2A2G & rectangulum 2H2*g* triangulo 2H2A2G inscriptum, exponent celeritatem ex descensu mobilis A per spatium AE in puncto E acquisitam, ejusque momentum. Verum (§. 132.) est SE. N*n* = M. EF. *af* = M. HG*g*, item BE. E*e* = A. 2H2G2*g*. atque (§. 133.) SE. N*n* = BE. E*e*; propterea fiet M. HG*g* = A. 2H2G2*g*, vel quia (secundùm hypothesin) ipsæ M & A æquales HG*g* = 2H2G2*g*.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA.

Fig. 32. 136. *Si mobilia* M *&* A *ex punctis* M *&* A *in curva* MON *& recta* AD *à quiete cadere incipiant, celeritates ipsorum in punctis* N *&*

& E acquisitæ erunt æquales distantiis punctorum à centro D positis æqualibus, celeritasque uniuscujusque mobilis poterit duplum areæ AAZBEA.

Totum spatium AE in innumera elementa, quale est Ee, divisum cogitetur, & per singulorum terminos arcus ex centro D descripti intelligantur; adeo ut singulis elementis rectæ AE totidem elementa curvæ MON respondeant. Jam cum (§. 135.) ubique momentum celeritatis in curvæ puncto N æquetur momento celeritatis in rectæ puncto E, alteri N à centro D æquidistanti, habebitur semper & ubique HGg = 2H2G2g, ergo omnia HGg, quæ in triangulo HAG continentur æqualia omnibus 2H2G2g, quæ in triangulo 2H2A2G, id est triangulum HAG triangulo 2H2A2G æquabitur. Unde cum hæc æqualia triangula similia sint, sequitur latera in illis homologa æqualia esse, atque adeò AG = 2A2G; id est celeritates in E & N acquisitæ, quæ per æquales 2A2G & AG exponuntur, æquales sunt.

Porrò, quia (§. 132.) HGg = BE. Ee & sic ubique, erunt omnia HGg = omnibus BE. Ee, atqui omnia rec-la HGg componunt triangulum HAG, vel *hAg*, quandoquidem motus in A & M punctis nullus est, atque adeò etiam momenta celeritatum in illis punctis nulla sunt, id est cum triangulorum HAG, & 2H2A2G verticibus A & 2A confunduntur, & in illis, ut ita dicam, nullescunt: omnia verò rectangula elementaria BEe, quæ in tota area AAZBE continentur, huic areæ ultimò æqualia fiunt, atque adeò area AAZBE æquatur ubique triangulo homologo HAG; & duplum areæ illius duplo hujus trianguli, sed hoc trianguli duplum æquale est quadrato lateris AG vel GH, quoniam hoc triangulum rectangulum isosceles est; ergo $AG^2 = 2.$ AAZBE, vel quia AG æqualis est EF, $EF^2 = 2.$ AAZBE, id est celeritas in E vel N acquisita potest duplum areæ AAZBE. Quæ omnia erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

137. Pariter si corpora A & M in curva & recta ex punctis O & P celeritate æquali cadere incipiant, & quidem ea, quam mobile A spatium AP à quiete perlabens in puncto P acquirere potest; eadem corpora in quibusvis aliis punctis N & E, à centro sollicitationum æquidistantibus, æqualem celeritatem acquirent, tantam scilicet quantam mobile A, in hoc puncto A casum à quiete incipiens,

 lapsu

lapsu accelerato per spatium AE in puncto E acquirere posset. Nam quia (§. 135.) generaliter est $HGg = 2H2G2g$, erunt etiam nunc omnia HGg æqualia omnibus $2H2G2g$, verùm hoc casu omnia HGg sunt ea, quæ soli trapezio YXGH inscripta sunt, ducta scilicet per V recta VY axi AD parallela, quia celeritas, qua mobile M ex curvæ puncto O moveri incipit, non est nulla; sed (secundùm hypothesin) æqualis PV seu AX vel XY, atque adeo nunc omnia HGg æquantur trapezio YXGH, & eandem ob rationem omnia $2H2G2g$ æquantur trapezio 2Y2X2G2H, quoniam mobile A casum suum in puncto P cum celeritate 2X2Y (secundùm hypothesin) æquali XY vel AX incipit; æquantur igitur hæc trapezia YXGH & 2Y2X2G2H; verùm quia (secundùm hypothesin) celeritas in P eadem est cum celeritate in O, & illa tanta est quanta mobili ex A in P cadenti illic in P acquiri potest, sequitur triangula AXY & 2A2X2Y itidem æqualia esse, & addendo hisce æqualibus triangulis trapezia illa æqualia YXGH, & 2Y2X2G2H, fient etiam triangula AGH & 2A2G2H æqualia; unde cum eadem & similia sint, necessum est, ut latera AG & 2A2G æquentur, atque adeò liquet celeritates in N & E acquisitas mobilibus ex punctis O & P, à centro D æquidistantibus cum celeritate PV vel AG casum incipientibus, æquales esse cum inter se, tum celeritati EF in E acquisitæ (§. 136.) post casum à quiete in A, per spatium AE, quæ potentiâ æquetur duplo areæ AAZBE.

Corollarium II.

Fig. 37. 138. Propterea, si mobile quoddam A secundum quamlibet directionem datam AR impulsum celeritate ea, quam idem mobile spatium HA à quiete in H perlabens acquireret in A, & sollicitationibus ordinatis curvæ CBb expressis ad centrum D continue ipsum urgentibus curvam ANn in vacuo describat, celeritas ejus in quolibet curvæ projectionis puncto N ea erit, quam corpus ex H à quiete cadere incipiens in linea recta HD accelerato suo motu acquirere posset in puncto E, cum altero in curva N æqualiter à centro D distanti.

Corollarium III.

Fig. 32. 139. Si corpora ex curvæ & rectæ punctis n & e à centro D æquidistantibus celeritate initiali ef, quam post descensum per curvam

vam MO*n* & rectam A*e* in punctis M & A motum à quiete incipientia accelerato motu illic in *n* & *e* acquirere queunt, in altum ferantur; illa in quibusvis aliis punctis O & P eidem centro D æquidistantibus celeritates residuas æquales habebunt, tantam scilicet, quantam in illis punctis O & P acquisivissent, si accelerato motu à quiete in M & A incipiente in curvæ arcu MO & recta AP descendissent. Nam quia mobilia ascendunt, atque adeò à centro solicitationum BE deorsum ad hoc centrum urgentium recedunt, tam hæ solicitationes centrales BE, quam tangentiales SE vel N*s*, quæ ex illis derivantur (§. 122.) nunc spectandæ sunt tanquam solicitationes *retardatrices*. Earum tamen momenta *be*. *e*E & *se*. *n*N (§. 133.) erunt æqualia, & per §. 132. huic æquatur suum momentum *hg*. *g*G celeritatis decrescentis *hg*, illi verò celeritatis 2*h*2*g* momentum 2*h*2*g*. 2*g*2G, propterea hæc ipsa celeritatis decrescentis momenta sunt æqualia, & hoc respectu cujuslibet alius curvæ elementi *n*N omnium eorum, quæ in curvæ arcu *n*O, & homologi elementi *e*E rectæ DA, omnium eorum, quæ in hujus rectæ segmento *e*P continentur. Hinc etiam universa *hg*. *g*G, quæ in trapezium *hg*XY desinunt, æquabuntur universis 2*h*2*g*. 2*g*2G, quæ trapezio 2*h*2*g*2X2Y circumscripta in hoc trapezium desinunt, id est, hæc duo trapezia æqualia erunt. Unde, si ex triangulis *hg*A & 2*h*2*g*2A, quæ ob celeritates initiales A*g* & 2A2*g* in *n* ac *e* (secundùm hypothesin) inter se æquales etiam æqualia sunt, auferentur trapezia illa æqualia *hg*XY & 2*h*2*g*2X2Y, remanebunt triangula æqualia YAX & 2Y2A2X, in quibus, utpote similibus, latera homologa AX & 2A2X æqualia existent, atqui hæc æqualia latera celeritates in O & P mobilibus ascendentibus residuas exponunt, quæ velocitates proinde æquales sunt, & unaquæque earum (§. 136.) ea est, quæ mobili ex A à quiete descensum incipienti acquireretur in P, utpote quæ potest duplum areæ AAZP, dum celeritas initialis *ef* potest duplum areæ AAZ*be*. Propterea GX & 2G2X sunt initialis velocitatis partes *amissæ*, vel à solicitationibus centralibus B*e*, BE &c. in ascensu mobilium *absorptæ*, adeò ut corporum ad curvæ & rectæ puncta M & A ascendendo delatorum motus ascensionalis penitus extinguendus sit, cum celeritates *absorptæ* *g*A & 2*g*2A initialibus æquales sint.

Corollarium IV.

140. Hinc mobilia ascendentia cum celeritatibus initialibus quibuscunque successive omnes celeritatis gradus servant in illis ipsis lineæ percurrendæ punctis, in quibus cadendo hos celeritatis gradus acquisiverunt. Sic mobile cum celeritate *ef* ascensum in *e* incipiens, in reliquis spatii *e*A ascensu conficiendi punctis E, P, A easdem celeritates retinet, quas in puncto A casum inchoans descensu suo accelerato acquisivisset, in iisdem punctis scilicet, celeritates EF, PV & o. Quod etiam de mobili in curva MON ascendenti intelligendum est.

Corollarium V.

141. Hinc etiam in omni possibili solicitationum centralium hypothesi; *corpora rectà in altum lata, vel in curvis quibuscunque ascendentia, ad eam ipsam altitudinem in vacuo assurgunt, quam, ubi descendendo percurrunt, celeritatem acquirunt initiali æqualem.*

Corollarium VI.

142. Si centrum solicitationum gravitatis D infinite distat à recta AG, arcus concentrici AM, PO, EN &c. abibunt in lineas rectas in directum positas ordinatis AA, ZP, BE scalæ solicitationum centralium, unde quæ universaliter in antecedentibus ostensa sunt, etiam obtinebunt in hoc casu, quo gravium directiones rectæ AG perpendiculares vel axi AD parallelæ sunt. Adeoque *celeritates in diversis planorum* (adde & *curvarum* continuam curvaturam habentium) *inclinationibus descensu acquisitæ, æquales sunt in omni gravitatis variabilis & uniformis hypothesi, si planorum vel curvarum elevationes æquales fuerint, vel quod idem est, si planorum horizontalium per terminos planorum inclinatorum vel curvarum transeuntium distantiæ æquales fuerint.*

Hoc ipsum corollarium Torricellius primus geometrice suo more demonstravit, & post ipsum Hugenius in suo Horologio Oscillatorio Parte secunda Prop. VI. sed ambo tantum in Galilæana hypothesi gravitatis uniformis atque demonstrationibus indirectis. Galilæus vero id in prima Dialogorum editione tanquam per se evidens sibi concedi postulavit; sed quia hoc forte magnum postulatum ipsi postea visum, id in posteriori operum suorum editione 1656. Bono-

noniæ facta utcunque demonstrare tentavit; sed ejus demonstratio, quæ ibi affertur, Hugenii judicio parùm concludit.

Scholion I.

143. In hac propositione, perinde ac in antecedente XVIII. mobilia æqualia ponuntur tam ratione quantitatis materiæ quam ratione texturæ particularum, vel quod idem est, corpora M & A, quoad volumen & massam, æqualia esse debent, ut recensitæ propositiones generaliter obtineant, scilicet eo etiam casu, quo eorum pondera in æqualibus à centro solicitationum D distantiis proportionalia non sunt. Semper enim verum erit celeritates in E & N acquisitas post descensus corporum à quiete in A & M, per spatia AE & MON æquales esse, sive massæ corporum eorum gravitatibus seu solicitationibus centralibus aut ponderibus proportionales sint, sive non.

144. Sed si mobilia M & A massas non habent ponderibus suis proportionatas, nec pondere & massa æqualia sunt, propositio præsens ad talia corpora non est extendenda; hoc enim casu prædictæ celeritates, in punctis illis N & A acquisitæ, non sunt æquales, sed velocitas in curvæ puncto N se habebit ad velocitatem in rectæ puncto E acquisitam, ut latus quadratum areæ AABE, cujus ordinatæ BE gravitates seu solicitationes centrales mobilis M, in curva MON discurrentis, exponunt in homologis punctis N, applicatum ad radicem massæ mobilis M; ad latus quadratum areæ A3A3BE, cujus ordinatæ E3BE exponunt gravitates corporis A in locis quibusvis E, per quæ ordinatæ transeunt, applicatum ad radicem massæ seu quantitatis materiæ mobilis A, quod in recta AD fertur. Nam si, ut supra, latus AG vel æquale GH in triangulo rectangulo isosceli HAG, celeritatem mobili M ex descensu per arcum curvæ MON in puncto N acquisitam, & latera æqualia 2A2G vel 2H2G trianguli rectanguli isoscelis 2H2A2G celeritatem mobilis A ex casu ejus per spatium AE in puncto rectæ E acquisitam, exponant, erunt velocitatum AG, 2A2G momenta rectangula HG*g* & 2H2G2*g* triangulis illis inscripta &, per §§. 132. 133, erit $BE.Ee=SE.Nn=M.HGg$, ergo omnia $BE.Ee$, hoc est, ut in demonstratione articuli 136. ostensum, area AAZBE æquatur omnibus $M.HGg$, id est facto ex massa corporis M in triangulum, atque adeò $AG^2.M=2.AAZBE$ & $AG=GH=EF=\sqrt{(2.AAZBE)}:\sqrt{M}$. Et (§. 132.) est pariter $3BE.Ee=A.2H2G2g$, atque adeo omnia $3BE.$

Ee,

E*e* vel omnia E3B.E*e*, hoc est, area A3A3BE æquatur omnibus A.2H2G2*g* id est facto ex triangulo 2H2A2G in corporis massam A; ergo etiam $2A2G = 2H2G = \sqrt{(2.A3A3BE)} : \sqrt{A}$. Adeoque AG est ad 2A2G, hoc est, celeritas acquisita mobili M in curvæ puncto N est ad celeritatem mobili A in rectæ puncto E alteri à centro D æquidistanti acquisitam, sicut $\sqrt{(2.AAZBE)} : \sqrt{M}$ ad $\sqrt{(2.A3A3BE)} : \sqrt{A}$, vel etiam, sicut $\sqrt{(AAZBE)} : \sqrt{M}$ ad $\sqrt{(A3A3BE)} : \sqrt{A}$, hoc est, dictæ velocitates sunt in composita ratione ex directa subduplicata proportione areæ AAZBE ad aream A3A3BE, & ex reciproca subduplicata ratione massæ M ad massam A. Atqui hæc ratio composita æqualitatis ratio fieri non potest, nisi area AAZBE fuerit ad aream A3A3BE, ut massa M ad massam A; id est, nisi pondera mobilium ipsorum massis proportionalia fuerint. Etenim area AAZBE ad aream A3A3Z3BE in eadem altitudine AE non potest esse in data ubique ratione massæ M ad massam A, nisi singulæ ordinatæ BE sint ad singulas homologas ordinatas 3BE in eadem ratione M ad A, atque adeò cum BE & 3BE exponant pondera corporum M & A, in distantiis ND & ED à centro D æqualibus, liquet celeritates in N & E acquisitas æquari non posse, nisi pondera corporum M & A in æqualibus à centro gravium distantiis massis ipsorum proportionalia sint.

Scholion II.

145. Hactenus ostensa circa motus gravium adeò generalia sunt, ut ea non solum omnia, quæ circa motus quomodocunque acceleratos excogitari possunt, attingant; sed etiam facili negotio ostendant quænam hypotheses possibiles sint, & quas vice versa natura ferre recuset. Nam, ut ab his incipiam, omnis solicitationum seu gravitatis hypothesis impossibilis & imaginaria est, cujus scala per descensus initium transit, adeo ut illic ordinata ejus nulla sit; cujus rei ratio, me etiam tacente, satis in propatulo est. Mobile enim quiescens, quod grave non est, seu à nulla solicitatione centrali citatur (quod contingit in puncto, in quo scala solicitationum rectæ, in qua mobile cadere deberet, occurrit) non potest se ipsum movere. Verum hæc ipsa impossibilitas etiam in consideratione temporis se manifestat, quo aliquod spatium deberet percurri in imaginariis ejusmodi hypothesibus, quandoquidem ad percurrendum spatium quantumlibet parvum requireretur in hisce hypothesibus tempus infinitum,

tum, quod usu formularum ex præcedentibus mutuo sumendarum quilibet poterit experiri. Gravitas utlibet variabilis dicatur g, spatium perpendiculariter à corpore cadente describendum x, tempus quo percurri debet t, velocitas in fine hujus temporis acquisita u; elementa spatii, temporis, & velocitatis dx, dt & du, quibus positis (§. 132.) erit prima formula $gdx = udu$, & (§. 131.) habetur $dt = mdu : g$, ubi m significat massam mobilis & g ejus pondus: quoniam vero mobile cum nullo alio comparatur, sed ejus tantum motus exquiruntur, loco ipsius m unitas poni potest, eritque $dt = du : g$. Secunda formula.

146. Sint nunc celeritates acquisitæ, ut spatia confecta, ut vult Balianus, id est $u = x$, & $uu = xx$ ac $udu = xdx$, eritque propter $gdx = udu$, etiam $gdx = xdx$ id est $g = x$, ergo existente $x = 0$ erit etiam $g = 0$, ergo in principio descensus gravitas mobilis nulla foret, atque adeò ipsum per spatium x nunquam delabi posset. Porro, quia secunda formula $dt = du : g$ & $g = x$, præbent $dt = dx : x$, unde $t = \log. x$, jam existente $x = 0$, & log. ipsius 0 infinito, quod per ∞ significabimus, erit $t = \infty$, hoc est, infinitum tempus requiritur ad percurrendum ab initio nullum spatium, adeoque grave ibi perpetuo quiescet, & consequenter Baliani hypothesis impossibilis & imaginaria est. Hoc ipsum alia adhuc ratione ostendi in Actis Lips. 1709. pag. 404. seq.

147. Si celeritates acquisitæ u sunt ut x^m, ubi m est quilibet numerus integer & positivus index potestatis spatii, cui celeritas proportionatur, fiet $uu = x^{2m}$ & $udu = mx^{2m-1}dx = gdx$, atque adeò $g = mx^{2m-1}$, atqui existente $x = 0$, erit etiam $mx^{2m-1} = g = 0$, ergo ejusmodi hypothesis impossibilis & imaginaria est.

Porrò $dt (= du : g = mx^{m-1} : mx^{2m-1}) = dx : x^m$. Verum juxta articulum 92. summationem ineundo, invenietur $t = (\infty^{m-1}, - x^{1-m}) : m - 1 = \infty^{m-1} : m - 1$. Hoc est, tempus descensus per minimam quamcunque altitudinem est in hac hypothesi, ut potestas infiniti ∞, cujus exponens est numerus integer $m - 1$. Ergo hæc hypothesis, multo magis quam præcedens, imaginaria est & impossibilis.

Hactenus generalia motuum acceleratorum habuimus, dispiciendum restat, quid ex una alteraque gravitatis hypothesi sequi debeat.

HYPOTHESIS I.

Fig. 33. 148. *Si solicitationes gravitatis sint ut distantiæ à centro gravium D, earum scala erit linea recta* QCD *per centrum* D *ducta cum axe* AD *angulum quemlibet* QDA *continens, & scala celeritatum linea elliptica* ASR, *cujus semiaxis transversus est* AD, *& semissis axis conjugati* DR *par mediæ proportionali inter* DA *vel æqualem* Aα, *&* QA. Nam descripto circa centrum D quadrante circuli AVL, ductisque αL, & BEF parallela DL vel αA; quia DR (constr.) media est proportionalis inter DL vel αA & QA, erit propter Ellipsin ASR; $EF^2 : ES^2$ (= αA : QA) = 2. trapezii αBEA ad 2. trap. QCEA; atqui duplum trapezii αBEA est excessus quadrati AD vel DF supra quadratum DE, atque adeo æquatur EF^2; ergo æquantur etiam duplum trapezii QCEA, quod est duplum areæ in scala solicitationum centralium QCD, & quadratum ES, atque adeò (§. 136.) ES exponit celeritatem acquisitam in E ex descensu per AE; ergo ellipsis ASR est scala celeritatum acquisitarum. Quod erat demonstrandum.

149. *Si fiat angulus* X *ad angulum* ADF, *in ratione* DL *ad* DR, *ipse angulus* X *exponet tempus descensus mobilis per* AE, hoc est X = *t*AE. Sit enim x elementum ipsius X homologum elemento anguli ADF, quod est angulus FDf, ducta scilicet *bf* alteri BF indefinite vicina. Erit ergo x : FDf = DL : DR = EF : ES, ergo x. ES = EF. ang. FAf, vel x. ES. DF = EF. DF. ang. FDf, atqui (§. 129.) DF in ang. FDf exprimit arculum Ff, ergo x. ES. DF = EF. Ff, at verò FE. Ff = DF. Ee, quod ex similitudine triangulorum Ffa & FDE facile colligitur, igitur x. ES. DF = DF. Ee, vel deleta DF, erit x. ES = Ee, & x = Ee : ES. Verum (§. 128.) Ee : ES = tEe, ergo x = tEe, atque adeò omnes x hoc est X = omnibus tE*e*, hoc est tAE. Quod erat demonstrandum.

Hinc ducto quolibet radio DV, qui quadrantes concentricos AVL & ETK secet in V & T, ductisque arcuum AV & ET sinibus VW & T*e* (per accidens est, quod T*e* cadat super *bf*, res utcunque aliter se habere potest) spatia AW & E*e* eodem tempore à mobilibus æqualibus A & E simul cadere incipientibus, describentur; eodemque tempore ambo ad centrum D pervenient.

HY-

HYPOTHESIS II.

150. *Si Gravitas corporum ubique uniformis est, ut in Galilei hypothesi, scala Celeritatum erit Parabola conica, cujus abscissæ axis spatia mobili percurrenda, & ordinatæ celeritates acquisitas exponunt. Eruntque propterea celeritates in subduplicata ratione spatiorum confectorum.* Fig. 34.

Nam scala solicitationum gravitatis erit, hoc casu, recta βC axi AC parallela, atque adeò (§. 144.) $2. A\beta . AE : M = EF^2$, ubi M denotat massam mobilis, $A\beta$ ejus pondus, & AE spatium cadendo confectum, atque EF celeritatem acquisitam. Unde ob constantem $A\beta$ scala celeritatum est parabola conica, atque adeo spatia mobili descripta sunt ut quadrata celeritatum acquisitarum, & hæ velocitates in subduplicata ratione spatiorum. Parameter verò Parabolæ est $2. A\beta : M$.

151. *Tempus verò quo spatium quodlibet* AE *cadendo conficitur est* 1°. *ut duplum spatium* AE *applicatum ad celeritatem* EF *hoc tempore acquisitam.* 2°. *Ut radix ex facto massæ corporis in duplum spatium applicato ad mobilis pondus seu gravitatem. Et denique* 3°. *ut factum ex Massa corporis in celeritatem acquisitam applicatum ad gravitatem ejusdem corporis.* Signetur, ut antea, tempus per AE, per tAE.

Jam (§. 131.) $tEe = M. af : A\beta$, ergo summando $tAE = M. EF : A\beta$, quod est tertium. Porrò quia $tAE = M. EF : A\beta$, erit etiam $= M. EF^2 : EF . A\beta$ (§. 150.) $= 2. A\beta . AE : A\beta . EF = 2. AE : EF$. Et hoc est primum. Denique, quia ordinata parabolæ est ad dimidium parametrum in subduplicata ratione dupli abscissæ ad semissem parametri, erit $tAE (= M. EF : A\beta) = \sqrt{(M. 2AE : A\beta)}$. Quod erat secundum.

152. Idcircò, vocando duorum mobilium massas M, m; gravitates seu pondera G, g; spatia cadendo descripta S, s; & denique tempora descensuum T, t. Erit $T = \sqrt{(2 MS : G)}$ & $TT = 2MS : G$, vel $G. T^2 = 2. M. S$; & $gtt = 2ms$. Adeoque, si spatia ab ambobus mobilibus diversis temporibus confecta sunt in duplicata ratione temporum, corporum pondera massis eorum proportionalia erunt; nam si $TT : tt = S : s$ erit $T^2 . s = tt S$; adeoque $G. T^2 = 2. MS$ fiet $tt. GS : s = 2. MS$, vel $Gtt = 2. Ms$, seu $gtt = \frac{2gMs}{G} = 2ms$; adeoque $gM = Gm$, vel $G : g = M : m$.

Propterea hujus paragraphi ope secunda Propositio per experimenta confirmari potest. Videatur §. 30.

CAPUT II.

De Motibus curvilineis in Vacuo, in quacunque gravitatis variabilis Hypothesi.

PROPOSITIO XX. LEMMA.

153. *SI magnitudinis continue crescentis (cujus prima magnitudo* AI *ea dicitur, à quâ crescere incipit) incrementum infinitesimum* Ff *semper fuerit ad decrementum* qr, *alterius decrescentis* Dq, *cujus prima magnitudo, à qua scilicet decrescere incipit, sit* DR, *sicut crescens* EF *ad decrescentem* Dq, *erit crescens* EF *ad suam primam magnitudinem* AI, *ut decrescentis prima magnitudo* DR *ad ipsam decrescentem* Dq.

Fig. 35.

In Fig. 36. circa axem DR descripta sit aliqua curva IF, cujus abscissæ Dq, DR decrescentem primamque ejus magnitudinem referant, ordinatæ verò FE & IA, crescentem ejusque primam magnitudinem, ut adeò signa q, E ad idem punctum pertineant perinde ac signa A, R. Per curvæ punctum F tangens FO ducta sit axi occurrens in O, factaque ordinata *fe* alteri FE infinite vicina, erit *fa* crescentis FE incrementum, & F*a* vel *qr* seu E*e* decrementum infinitesimum decrescentis Dq. Eritque adeo (secundùm hypothesin) *fa* : *qr* = FE : D*q*. Verùm triangula similia faF, FEO præbent etiam *fa* : *qr* = FE : EO, ergo FE : D*q* = FE : EO, atque adeo D*q* = EO; hinc producta tangente OF, erit etiam OF = FS. Est ergo punctum contactus F ubique in medio rectæ OS, angulum rectum SDO subtendentis, ut adeò per conversam Prop. III. Secundi Conicorum Apollonii curva IF Hyperbola sit inter asymptotas SD & DO, atque adeo EF sit ad AI, sicut DR ad D*q*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA.

154. *Existentibus* GBb *scala solicitationum centralium &* AIF *scala celeritatum mobili, ex quiete in* H *in recta* HD *cadere incipienti, acquisitarum; atque hoc ipsum mobile in directione* AR *celeritate* AI *propulsum, quam grave post casum ex altitudine* HA *in* A *acquirere potest, urgentibus solicitationibus illis centralibus per ordinatas curvæ* GB *significatis, curvam quandam* AN *in Vacuo describat. Erit* FE

seu

seu celeritas mobilis in quolibet curvæ puncto N *potentia æqualis rectangulo sub radio* nZ *circuli osculatoris in hoc puncto, & sub* $\beta\alpha$ *quæ solicitationem curvæ perpendicularem ex centrali* Nα *vel* BE *derivatam significat.* Hoc est, $EF^2 = nZ.\beta\alpha$. Fig. 37.

Mobile A projectum secundum AR celeritate AI describens curvam AN in ejus puncto N (§. 138.) acquiret celeritatem EF, quam idem mobile in puncto E, æque remoto à centro D, ac curvæ punctum N, consequutum esset post lapsum ex altitudine HE, atque hac celeritate EF in directione tangentis curvæ Nq æquabili motu incedere conatur; verùm à solicitatione centrali Nα vel EB durante tempusculo quam minimo uniformiter agente indesinenter à directione Nq retractum in curva Nn detinetur, adeò quidem ut lineola gn ipsi ND parallela sit spatiolum à solicitatione respectu curvæ elementi Nn uniformi Nα vel BE genitum, atque adeo (§. 151.) tempus, quo grave quoddam tale spatiolum à gravitate Nα conficeret, foret $\surd(2gn : N\alpha)$ sumta mobilis massa A instar unitatis; at verò eo tempore, quo gn à solicitatione centrali generatur, mobile in tangente describit æquabili motu celeritate EF spatiolum Ng vel Nm; quod tempus (§. 128.) est etiam $Nm : EF$; ergo $\surd(2gn : N\alpha) = Nm : EF$, atque adeò $2gn : N\alpha = Nm^2 : EF^2$, vel etiam $2gn.nZ : N\alpha.nZ = Nm^2 : EF^2$, & permutando, $2gn.nZ : Nm^2 = N\alpha.nZ : EF^2$. Atqui considerando elementum curvæ Nn instar arculi circuli osculatoris centri Z, cujus Nm tangens, erit $Nm^2 = 2nZ.nm$ vel $= 2mn.nZ$, ergo $2gn.nZ : 2mn.nZ\ (Nm^2) = gn.nZ : mn.nZ = N\alpha.nZ : EF^2$; vel substitutis loco lineolarum gn, & mn, rectis Nα, $\beta\alpha$, quæ ipsis propter triangulorum N$\alpha\beta$ & gnm similitudinem proportionales sunt, fiet $N\alpha.nZ : \beta\alpha.nZ = N\alpha.nZ : EF^2$. Ergo $EF^2 = nZ.\beta\alpha$. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII. Theorema.

155. *Iisdem positis, erit celeritas projectionis* AI *ad celeritatem mobilis in curvæ puncto* N, *reciproce, ut perpendicularis* Dq *super tangente* Nq *in curvæ puncto* N, *ad perpendicularem* DR *ex centro* D *ad directionem jactus* AR *ductam. Atque adeò singula rectangula* Dq. EF; *dato rec-lo* DR. AI *æquabuntur.* Fig. 37.

Nam ductis per punctum n tangente ns, & arcu circulari ne ex centro D descripto, ac denique ordinata ef, jungatur NZ, & ad tangentem curvæ ns demittatur perpendicularis Ds. Quibus positis,

 erit

erit $N\beta$ ſolicitatio tangentialis, ejusque momentum (§. 132.) æquatur momento velocitatis in N acquiſitæ, atque adeò $N\beta . Nm$ vel $Nn = EF . af$; & quia (§. 154.) $EF^2 = nZ . \beta\alpha$, fiet $EF . af : EF^2 = N\beta . Nm : nZ . \beta\alpha$. vel ſubſtitutis loco $N\beta$, & $\beta\alpha$ proportionalibus Nq & Dq, & loco Nm & mZ vel nZ proportionalibus qr & hq vel Nq, invenietur $EF . af : EF^2 = Nq . qr : Nq . Dq$. Nam quia ZN & Zn tangentibus Nq & ns perpendiculares ſunt, anguli NZn & ghs, quem tangentes continent, neceſſariò æquales ſunt; atque adeò triangula NZm & qhr ad N & q rectangula ſimilia ſunt, ac lateribus Nm & NZ vel nZ proportionalia, latera homologa qr & hq, vel Nq in triangulo qhr. Verum in poſtrema analogia deletis EF ex primo & ſecundo, & Nq ex tertio & quarto terminis, fit $af : EF = qr : Dq$ & permutando $af : qr = EF : Dq$, id eſt incrementum creſcentis FE eſt ad decrementum decreſcentis Dq, ſicut ipſa creſcens ad decreſcentem, adeóque erit (§. 153.) creſcens FE ad ſuam primam magnitudinem AI, ſicut decreſcentis Dq prima magnitudo DR ad decreſcentem, & invertendo, AI celeritas jactus eſt ad EF celeritatem mobilis in quolibet curvæ puncto N; ut perpendicularis Dq ad DR. Propterea erunt ſingula rectangula $FE . Dq$ æqualia dato $AI . DR$. Quæ erant demonſtranda.

Corollarium I.

156. Quia $EF : AI = DR : Dq$, vel $EF^2 : AI^2 = DR^2 : Dq^2$, & $EF^2 = \beta\alpha . nZ$, erit $\beta\alpha . nZ : AI^2 = DR^2 : Dq^2$. ſed $\beta\alpha . nZ : N\alpha . nZ = \beta\alpha : N\alpha = Dq : DN$ vel invertendo, $N\alpha . nZ : \beta\alpha . nZ = DN : Dq$: ergo ex æquo & per compoſitionem rationum invenietur $N\alpha . nZ : AI^2 = DR^2 . DN : Dq^3$, atque adeò $N\alpha = AI^2 . DR^2 . DN : nZ . Dq^3$; ergo ſolicitatio centralis in quolibet curvæ puncto N eſt ut $DN : nZ . Dq^3$. Ut Celeberrimi viri Joh. Bernoulli, Abr. Moyvræus, & Guido Grandus invenerunt, inſiſtentes omnes principio iſti, quòd tempora lationum in curvis ſunt areis proportionalia, quod nos nondum ſuppoſuimus; ſed in ſequenti Corollario ex poſitis fundamentis noſtris deducemus.

Corollarium II.

157. Erit jam tempus, quo quilibet arcus curvæ AN deſcribetur, id eſt $tAN =$ areæ $ADN : \frac{1}{2} AI . DR$. Nam (§. 128.) eſt $EF . tNn = Nn$; & $Dq . EF . tNn = Dq . Nn = 2$. trianguli NDn, atqui (§. 155.)

Dq.

Dq. EF = AI. DR, ergo AI. DR. tNn = 2 trian. NDn atque adeo ∫AI. DR. tNn = AI. DR. tAN = 2∫NDn = 2. areæ ADN, hinc tAN = areæ ADN : ½ AI. DR. Atque hinc liquet tempora quibus diversi arcus AN, An describuntur, areis homologis AND, ANnD proportionalia esse; prout Illustris Newtonus id primus demonstravit Prop. I. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* sed ex diversissimo fundamento.

Scholion.

158. Elegans est formula corollarii secundi, quod valorem solicitationis centralis in qualibet curva exhibeat quantitatibus finitis expressum; sed quia valor radii evolutæ eandem ingreditur, id efficit, ut nonnunquam paulo prolixior evadat calculus. Propterea mallem in praxi sequi canonem $g = dp : p^3 dz$, in quo g significat gravitatem seu solicitationem centralem, p perpendicularem ex centro solicitationum ad tangentem curvæ in dato puncto demissam, & z radium rectorem, seu distantiam puncti curvæ, in quo solicitationis centralis quantitas quæritur à centro. Demonstratio ejus facilis est, etenim ponendo rectangulum AI. DR = 1, fiet etiam FE. Dq = 1, id est vocando insuper FE, u, cum Dq jam dicta sit p, erit $pu = 1$ & $ppuu = 1$, vel $uu = 1 : pp$, atque adeò $udu = -dp : p^3$. Jam quia momentum celeritatis æquatur momento solicitationis centralis $-gdz$ (pono autem $-dz$, quia crescente u decrescit p, & per consequens z, atque adeò ipsi $+du$ homologa dz debet habere signum privativum) hinc $-gdz = -dp : p^3$, & $g = dp : p^3 dz$.

159. Usus hujus formulæ satis expeditus est; nam ex æquatione curvæ datæ quæritur valor ipsius p in z & constantibus; cujusmodi determinatione etiam opus est in formula supra laudata. Exempli gratia in hyperbola & ellipsi reperitur sequens æquatio $pp = ccz : 2a \pm z$, ubi a denotat semilatus transversum, b distantiam centri sectionis ab alterutro foco, & $cc = bb - aa$ in hyperbola, & $cc = aa - bb$ in ellipsi. In denominatore fractionis superius signum hyperbolam, ellipsin vero inferius respicit. Igitur $1 : pp = (2a \pm z) : ccz = 2a : ccz, \pm 1 : cc$, & differentiando, erit $-2dp : p^3 = -2adz : ccz^2$, & $g = 2dp : 2p^3 dz = a : cczz$; vel omissa data $a : cc$, erit g ut $1 : zz$; hoc est solicitatio centralis, ad focum sectionum Conicarum directa, est ubique ut quadratum distantiæ mobilis à foco inverse, quod jam passim constat ex aliis.

160. Porro si elementum curvæ Nn dicatur ds, arculus pn, dt, reli-

reliquis manentibus, ut supra, (§. 158) Triangula similia Nnp & NDq suppeditant $p = zdt : ds$, atque adeò $g = dp : p^3dz = (ds^2dtdz + zds : ddt - zdsdtdds) : z^3dt^3$. Quæ formula non, nisi in nominibus, differt à formulis Varignonianis, quales in Commentariis Academiæ Regiæ Parif. Scientiarum 1701. & 1706. habentur, in quibus non magis quam in præsenti ullum differentialium dt, dz, ds constans assumtum est, sed omnia variabilia.

161. Eadem facilitate habetur, aut saltem invenitur insistendo principiis supra positis, formula admodum expedita & generalis pro radiis evolutarum. Nam triangula NZm & qbr, quæ supra (§. 155.) similia esse ostensa sunt, præbent bq vel $Nq : qr = NZ : Nm$, & triangula similia Nnp, ac NqD hanc alteram analogiam $ND : Nq = Nm : Np$, ergo ex æquo $ND : qr = NZ : Np$, atque adeò $NZ = ND.Np : qr$, id est in symbolis supra assumtis, & vocando insuper NZ, r; erit $r = zdz : dp$, nam qr in figura est dp in hisce symbolis; unde cum p sit $= zdt : ds$, invenietur $r = zdz : dp = zdzds^2 : dsdtdz + zdsddt - zdtdds$ formula generalis radii osculatoris, in quam nullum differentiale constans assumtum est, quæ proinde in infinitas alias facile transformari potest. Atque deleto membro in denominatore $dsdtdz$, habebitur $r = ds^2dz : dsddt - dtdds$ formula itidem generalis pro curvis quarum ordinatæ parallelæ axique perpendiculares sunt, in quibus dt sunt elementa abscissarum.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA.

162. *Datis scala solicitationum centralium* GBb, *celeritate* AI, *& directione jactus* AR, *definire & construere curvam, quam missile in vacuo describet, concessis figurarum quadraturis.* Fig. 37.

I. Centro D intervalloque arbitrario DP describatur circulus PO, radios DN, Dn secans in punctis O, o; assumaturque Q quarta proportionalis ad DN, DR, & AI, ita ut DN.Q (= DR.AI) = EF.Dq, hoc est DN : Dq = EF : Q, & DN^2 : Dq^2 = EF^2 : QQ, ut dividendo habeatur Nq^2 : Dq^2 = EF^2 − QQ : QQ, atque adeò Nq : Dq = $\sqrt{}$(EF^2 − QQ) : Q, sed Nq : Dq sicut radius ad tangentem anguli DNq, quæ tangens dicatur T, & radius DP vel DO, hinc $\sqrt{}$(EF^2 − QQ) : Q = DP : T atque adeò T = Q. DP : $\sqrt{}$(EF^2 − QQ).

II. Propter arcus similes np & Oo, est Oo : pn = DP : DN, & pn : Np = T : DP, ergo ex æquo Oo : Np = T : DN, hinc Oo = T. Np:

$Np : DN$ (num. 1.) $= Q.DP.Np : DN\sqrt{(EF^2 - QQ)}$, ergo $PO = \int DP.Q.Np : DN\sqrt{(EF^2 - QQ)}$. Hoc eſt, ſi intelligatur aliqua curva, cujus abſciſſa DN, ordinata $DP^2.Q : DN\sqrt{(EF^2 - QQ)}$ area, hujus curvæ ordinatis abſciſſarum DA & DE interjecta ad datam lineam DP applicata præbebit lineam, cui ſi æqualis ubique factus fuerit arcus PO, recta DON per hujus arcus terminum O ducta æqualis abſciſſæ DE ſua extremitate N in curva quæſita erit. Jam quia quadratum ordinatæ EF æquatur duplo areæ GBEH datæ per abſciſſam DE vel DN & conſtantes, ſi non algebraicè, ſaltem transcendenter, atque Q eſt quarta proportionalis ad DE vel DN, & datas DR, AI, ea pariter data erit in DE & conſtantibus, unde cum omnes quantitates, quæ ipſam $DP^2.Q : DN\sqrt{(EF^2 - QQ)}$ ordinatam ſcilicet figuræ quadrandæ ingrediuntur, dentur in DN & conſtantibus, & figurarum quadraturæ conceſſæ ſint; factum eſſe liquet, quod erat faciendum.

Corollarium.

163. Si nunc dicantur DR, b; AI, c; DE vel DN, z, velocitas in curvæ puncto N, ſeu FE, u; arcus circuli PO, θ; ejus radius DP, r; at elementum arcus creſcens OO, $+d\theta$, elementum verò decreſcens Np, indeterminatæ ND, $-dz$. Adeoque $Q = cb : z$ & tota formula $Oo = Q.DP.Np : DN\sqrt{(EF^2 - QQ)}$ mutabitur factis debitis ſubſtitutionibus in $d\theta = -bcrdz : z\sqrt{(uuzz - bbcc)}$, quæ eſt æquatio differentialis curvæ quæſitæ ANn.

Scholion.

164. Hoc problema primùm ſolutionem accepit à Cel. Newtono Prop. 41. Lib. Princ. Phil. Nat. Math. & poſtea à Perſpicaciſſimo Geometra Joh. Bernoulli gemino modo, tum etiam à Cl. Viro P. Varignon diverſis modis, quo etiam referri poſſet & noſtra ſolutio quam in Diario Veneto Tom. V. pag. 318. ſeq. exhibui cum nonnullis aliis, & Tom. VII. pag. 194. Præſens noſtra ſolutio à Newtoniana non differt, niſi in levibus nec eſſentialibus circumſtantiis, nam noſtra EF ſignificat latus quadratum areæ apud Newtonum ABFD bis ſumptæ, quam tamen ille ſemel tantum accipit, ejusque Q nobis eſt rectangulum ſub datis DR & AI in noſtra figura, Q verò nobis eſt idem quod illi Q : A ſeu Z.

Cæterum, quia generalis hæc solutio quadraturas præsupponit earum etiam curvarum, quæ quadrabiles non sunt, ideo problema istud generaliter sumtum est transcendens, nec algebraicum fit, nisi pro certis legibus solicitationum centralium. Quænam vero debeant esse in genere hæ leges gravitatis variabilis, ut illis positis curvæ projectorum algebraicæ evadant, problema est satis curiosum & elegans, sed prima fronte admodum difficile, de quo, quod sciam, nemo adhuc cogitavit. Quomodo verò debeat expediri, id in sequenti apparebit propositione, post lemma mox afferendum.

PROPOSITIO XXIV. LEMMA.

165. *Elementum* Ss *tangentis* LS *arcus circularis* LM *est ad elementum hujus arcus* Mm, *ut* AS^2 *quadratum secantis ad* AM^2 *quadratum radii, vel etiam, ut* AL^2 *quadratum radii, ad* AG^2 *quadratum sinus complementi arcus* LM.

Fig. 38.

Nam, quia triangula SAs & MAm communem angulum MAm continent, erit triangulum SAs ad triangulum MAm, ut rec-lum SA.sA ad rec-lum MA.mA, id est, ut quadratum SA ad quadratum MA. At quia trianguli SAs altitudo est AL, existente basi Ss, & trianguli MAm basin Mm habentis altitudo est MA æqualis alteri AL, liquet triangulum SAs se habere ad triangulum MAm, ut basis Ss ad basin Mm, ergo etiam Ss ad Mm ut AS^2 ad AM^2, vel propter parallelas SL & MG, sicut AL^2 ad AG^2. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

166. Idcirco, si dicantur radius AL, r, tangens LS, t; arcus LM, a, erit secans $AS = \sqrt{(rr + tt)}$, atque adeo $da = rrdt : rr + tt$. Et conversa hac æquatione in seriem, singula seriei membra erunt summabilia, adeò ut summatione eorum actu instituta habeatur expressio arcus circularis a, serie infinita tangente & radio expressa.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA.

167. *Invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis seu legis solicitationum centralium, pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitatibus finitis expressum.*

Fig. 37, 38.

I. In figura 38. fiat AD æqualis AD in fig. 37, atque in fig. 38. circa

circa axem DA descripta intelligatur curva quæcunque algebraica LHh: descriptoque super ordinata ejus AL quadrante LMO circuli, ex quolibet hujus circumferentiæ puncto M agatur quædam MH parallela axi AD, curvæ LH alicubi occurrens in H subter ordinatam AL, per curvæ LH punctum H tangens HΔ ducta intelligatur axi occurrens in Δ, & ordinata HE axi AD perpendicularis, in qua, ordinata HE ad alteram axis partem protracta, sumatur ubique EΛ = subtangenti EΔ, adeò ut puncta Λ futura sint in quadam curva $\Lambda\pi$, cujus subtangens sit in ejus puncto Λ linea EΩ, ducta scilicet tangente $\Lambda\Omega$. Quibus positis, si in altera figura (37.) angulus ADN ubique fuerit ad angulum MAL, ut unitas ad quemlibet numerum positivum & rationalem *n*, atque in figura 37. longitudo DN semper æqualis fuerit abscissæ DE in figura 38. manifestum, singula puncta N locatum iri in curva algebraica AN*n*; quandoquidem omnia hæc puncta algebraice definiri possunt, cum sectio anguli in ratione numeri ad numerum omnino geometrice fieri possit. Jam, sicut ex alia atque alia curva LH alia atque alia AN oritur, ita quælibet curva AN aliquam generatricem LH admittet, adeo ut hæc curva considerata duntaxat in genere, absque ulla attentione ad particularem aliquam speciem, etiam suppeditare possit omnes possibiles curvas AN*n*. Idcirco, cum canon generalis quæritur, quo lex gravitatis variabilis in omnibus curvis algebraicis determinetur, res eò deducetur, ut inveniatur formula solicitationum centralium G pro hac curva generali AN, quatenus ea ex curva itidem generali & algebraica LH resultat. In hac verò disquisitione ita porrò est procedendum.

II. Assumto scilicet in curva LH ejus elemento H*h*, per punctum *h* agantur *h*λ & *hm* rectis ΛH & HM æquidistantibus, ac ductis per puncta M, *m* secantibus AS, A*s*; centro A & radio AX = DP in figura 37, descriptus sit arculus X*x*, quo fiet ut, quoniam (secundùm hypothesin) ang. ADN : ang. MAL = 1 : *n*, etiam OD*o* : MA*m* vel XA*x*, hoc est arculus O*o* sit ad arculum X*x* sicut 1 ad *n*. Quibus positis sic arguo.

III. Triangula similia H*ih* & HEΔ præbent E*e* (*ih*) : G*g* (H*i*) = EΔ : AG (EH); & triangula similia AMG & M*m*μ, dant G*g* (Mμ) : M*m* = GM : AL (AM) & M*m* : X*x* = AL (AM) : AX (DP), ac denique, num. 1. hujus X*x* : O*o* = *n* : 1, ergo ex æquo & per compositionem rationum, fiet E*e* : O*o* = n. EΔ. GM : AG. DP (vel quia ob triangulorum AGM & ALS similitudinem GM : AG = LS : AL)

$= n. E\Delta . SL : DP . AL$. Atqui (§. 162. n. 11.) erat etiam Ee (ibi Np): Oo $= DE : T$, ergo $n. E\Delta . SL : DP . AL = DE : T$, atque adeò fiet $T = DP . AL . DE : n. E\Delta . SL$. (§. 162. n. 1.) $= Q . DP : \surd(EF^2 - QQ)$ atque adeo $\surd(EF^2 - QQ) = n. Q . E\Delta . SL : AL . DE$, ac denique $EF^2 = (nn. E\Delta^2 . SL^2 + AL^2 . DE^2) . QQ : AL^2 . DE^2$, vel quia $Q = DR . AI : DE$, & omittendo inſtar unitatis factum conſtans DR, AI, eſt $QQ = 1 : DE^2$, fiet etiam $EF^2 = nn. E\Delta^2 . SL^2 : AL^2 . DE^4 ; + 1 : DE^2$.

IV. Sumantur elementa ſingulorum membrorum hujus ultimæ æqualitatis, atque ſingulis elementis per 2 diviſis (bifariam ea dividi poſſe ex calculo ilico patet) proveniet $EF . af = (nn. E\Delta . SL^2 . \Delta\xi : AL^2 . DE^4) + (nn. E\Delta^2 . SL . Ss : AL^2 . DE^4) + (2nn. E\Delta^2 . SL^2 . Ee : AL^2 . DE^5) + (Ee : DE^3)$. Verum quia (§. 165.) $Ss : Mm = AL^2 : AG^2$, nec non $Mm : Gg = AL : MG$ ac denique $Gg : Ee = AG : E\Delta$, erit $SL . Ss = AL^4 . Ee : AG^2 . E\Delta$, triangulaque ſimilia $\Delta\xi\lambda$, ac $\Lambda E\Omega$ ſuppeditant $E\Delta (\Lambda E) . \Delta\xi = \Delta E^2 . Ee : E\Omega$, quibus valoribus in ſuperiore æqualitate $EF . af = (nn. E\Delta . SL^2 . \Lambda\xi : AL^2 . DE^4) +$ &c. ſubſtitutis, proveniet $EF . af$ (§. 13[illegible].) $= BE . Ee = G . Ee = (nn. E\Delta^2 . SL^2 . Ee : E\Omega . AL^2 . DE^4) + (nn. E\Delta . AL^2 . Ee : AG^2 . DE^4) + (2nn. E\Delta^2 . SL^2 . Ee : AL^2 . DE^5) + (Ee : DE^3)$. In qua, ſi loco rationis $SL^2 : AL^2$ ſubſtituetur æqualis ratio $MG^2 : AG^2$, atque omnia ad Ee applicentur, erit BE ſeu $G = (nn. E\Delta^2 . MG^2 : E\Omega . AG^2 . DE^4) + (nn. E\Delta . AL^2 : AG^2 . DE^4) + (2nn. E\Delta^2 . MG^2 : AG^2 . DE^5) + (1 : DE^3)$, formula generalis ſolicitationis centralis in puncto curvæ N, quæ rite ordinata reductis ſcilicet tribus primis fractionibus ad idem nomen, demum erit $G = \frac{1}{DE^3} + \frac{(DE . E\Delta . MG^2 + 2 . E\Omega . E\Delta . MG^2 + DE . E\Omega . AL^2) . nn . \Delta E}{E\Omega . AG^2 . DE^5}$. In qua exiſtente curva LH algebraica, altera $\Lambda\Xi$ algebraica erit, atque adeò omnes $E\Omega$, $E\Delta$, EH & GM algebraice dabuntur; hinc etiam, juxta dicta numero 1. hujus, altera curva AN algebraica fit, neceſſe eſt; & quia cuilibet curvæ algebraicæ imaginabili AN aliqua LH reſpondet, & hæc LH omnes curvas generaliter repræſentat, quæ ex omnibus ANn reſultare queunt; ideò præcedens canon exhibet formulam generalem ſolicitationum centralium pro omnibus, quæ concipi poſſunt, curvis algebraicis ANn in infinitum. Quæ erat invenienda.

Co-

Corollarium I.

168. Si nunc præterea ponatur $1 : n = \mu : \nu$, ita ut μ & ν ſignificent quoslibet numeros integros & poſitivos, dicanturque tangens anguli MAL, T, ejus ſecans S; in fig. verò 37, coordinatæ DQ & QN, x & y reſpectivé, & $DN = z = \sqrt{(xx + yy)}$; quibus poſitis erit tangens anguli $ADN = ry : x$, & ſecans $= rz : x$, exiſtente radio $DP = r$. Eritque adeò per regulam generalem multiſectionis anguli vel arcus per ſecantes in Act. Erud. Lipſ. 1706. pag. 263. traditam, ſecans anguli $\nu . ADN = rz^{\nu} : (x^{\nu} - 02\nu x^{\nu-2} yy + 04\nu x^{\nu-4} y^4 - 06\nu x^{\nu-6} y^6 + \&c.)$ & ſecans anguli $\mu . MAL = S^{\mu} : (r^{\mu-1} - 02\mu r^{\mu-3} T^2 + 04\mu r^{\mu-5} T^4 - 06\mu r^{\mu-7} T^6 + \&c.$ In quibus numeri ficti $02\nu, 04\nu, 06\nu$, &c. ſignificant, $\frac{\nu . \nu-1}{1.2}$; $\frac{\nu . \nu-1 . \nu-2 . \nu-3}{1.2.3.4}$; $\frac{\nu . \nu-1 . \nu-2 . \nu-3 . \nu-4 . \nu-5}{1.2.3.4.5.6}$ ſeu coëfficientes membrorum binomii ad poteſtatem ν ſublati, per ſaltum excerptas; & numeri 02μ, 04μ, 06μ, &c. ſignificant ordine, $\frac{\mu . \mu-1}{1.2}$; $\frac{\mu . \mu-1 . \mu-2 . \mu-3}{1.2.3.4}$; $\frac{\mu . \mu-1 . \mu-2 . \mu-3 . \mu-4 . \mu-5}{1.2.3.4.5.6}$; &c. coëfficientes binomii cujusdam ad poteſtatem μ evecti, itidem per ſaltum excerptas.

Jam, quia (ſecundùm hypotheſin) ang. ADN eſt ad ang. MAL, ſicut 1 ad n ſeu μ ad ν, erit omninò multiplicando extrema & media $\mu . MAL = \nu . ADN$, ergo horum ſecantes æquales erunt. Propterea multiplicatione in crucem inſtituta, erit $S^{\mu} . (x^{\nu} - 02\nu x^{\nu-2} yy + 04\nu x^{\nu-4} y^4 + \&c.) = rz^{\nu} . (r^{\mu-1} - 02\mu r^{\mu-3} T^2 + 04\mu r^{\mu-5} T^4 - 06\mu r^{\mu-7} T^6 + \&c.)$ generalis æquatio curvarum algebraicarum AN, nam exiſtentibus μ & ν numeris integris & poſitivis, hæ ſeries indefinitæ ſemper abrumpentes erunt, atque adeo finito terminorum numero conſtabunt.

Corollarium II.

169. Si in Canone articuli 167. loco ordinatæ EH ponatur ..e...A, quælibet quantitas compoſita ex data ſeu conſtante e, & variabile A, datâ tamen utlibet in z, & quantitatibus conſtantibus, adeo ut A, infinitas numero diverſas quantitates ex z & datis quomodocunque compoſitas, immò omnes, quæ cogitari poſſint ſignificet. Puncta quantitatibus præfixa omnem poſſibilem ſignorum + & − ad quantitates illas reſpicientium variationem denotant, adeò Fig. 38.

ut

ut per quantitates punctis invicem adjunctas non solum summa quantitatum; sed etiam differentia earundem intelligenda sit in genere, hoc est differentia ipsarum, sive e excedat alteram A, sive ab eadem deficiat. Data ordinata EH, in quantitatibus algebraicis, facile invenietur subtangens EΔ curvæ LH, seu ordinata ΛE alterius curvæ ΛΞ, cujus subtangens EΩ etiam habebitur in quantitatibus algebraicis. Idcirco substitutis valoribus subtangentium EΔ, EΩ, ordinatæ EH vel æqualis AG, tum etiam rectæ GM, quæ ex altera AG & data AL facile reperitur, in canone supra citato & habebitur generalis formula solicitationum centralium in omnibus curvis algebraicis. Ponendo igitur elementum ipsius A seu dA esse Bdz, & elementum dB quantitatis B esse cdz, existente DE $=$ z, item AL $= r$, & $rr - ee = ss$. Si calculus recte initus fuerit, repetietur pro solicitatione centrali G in quolibet curvæ AN puncto N,

$$G = \frac{1}{z^3} + \frac{(2ssB + ssCz \mp eB^2z \pm 4eAB \pm 2eACz + AB^2z - 2A^2B - A^2Cz).\ nn}{B^3z^5}.$$

Quam late pateat usus hujus formulæ exinde potest colligi, quod, præterquam quod quantitas A omnem quantitatem per z & constantes datam designet, numerus n omnes numeros rationales atque positivos integros & fractos significet.

Scholium.

170. Ut appareat usus insignis nostræ formulæ, exemplo cuidam particulari eandem applicare libet. Sic si fuerit A $= z^m : a^{m-1}$. ubi m significet quemlibet numerum rationalem, fractus ne sit an integer nil refert, eritque B $= mz^{m-1} : a^{m-1}$, & C$(= mm - m)\ z^{m-2} : a^{m-1}$. Qui valores, in formula superioris Corollarii substituti, dabunt formulam quæ etsi particularis est alterius respectu, ex qua deducta est, infinitas tamen diversas curvas algebraicas suppeditare potest, immò infinities infinitas. Formula autem ipsa erit talis quæ sequitur

$$G = \frac{mm - nn}{mmz^3} \pm \frac{\overline{m+2}.nnea^{m-1}}{mmz^{m+3}} + \frac{\overline{m+1}.nnssa^{2m-2}}{mmz^{2m+3}}.$$

Hinc 1°. Si $m = -1$, & $n = 1$, erit G $= \pm e : aazz$, atque adeò solicitatio gravitatis ubique in reciproca duplicata ratione distantiæ mobilis à centro D. Videamus quænam curva ex ista hypothesi debeat resultare. In corollario primo fecimus $1 : n = \mu : \nu$; unde cum hoc casu sit $n = 1$, erit etiam $\mu = \nu = 1$, unde si valores

Fig. 37.

hosce

hosce in æquatione generali §. 168. circa finem, substitutas, evanescent omnes coëfficientes $o2\mu$, $o4\mu^3$, &c. & omnes $o2^v$, $o4^v$, $o6^v$, &c. adeò ut hoc casu curvæ æquatio sit $Sx = rz$. Jam quia A $(= z^m : a^{m-1})$ hoc casu est $= aa : z$, atque adeò in fig. 38, ordinata EH, quæ assumenda est æqualis differentiæ quantitatum e & A, non summæ, quia in ambiguo signo superius in formula retinuimus quod indicat talem differentiam, atque inferius summam; ordinata inquam EH hoc casu erit $= \pm e \mp A = \pm e \mp \frac{aa}{z} = (\pm ez \mp aa) : z$, atqui S, seu secans anguli MAL, est tertia proportionalis ad AG seu EH, & radium AM vel AL $= r$. ergo $S = rrz : \pm ez \mp aa$, adeoque æquatio $Sx = rz$, mutatur in $\frac{rrzx}{\pm ez \mp aa} = rz$, ex quâ elicitur $rx = \pm ez \mp aa$ vel potius $ez - aa = + rx$, aut $ez = aa \pm rx$, quæ est æquatio *Sectionum Conicarum*, in quibus abscissæ x sumuntur sursum & deorsum à foco. Ergo in hac hypothesi centrum virium, seu solicitationum gravitatis, sunt umbilici sectionum conicarum, quod jam omnibus constat egregie conspirare cum iis, quæ demonstrata sunt ab Illustr. Newtono, Leibnitio, Varignonio & aliis, circa vires, quas vocant centripetas in sectionibus conicis methodis directis.

2°. Sit $m = -2$, & $n = 2$, atque e major quam r, ita ut $ss = rr - ee$ sit quantitas negativa, erit $G = -ssz : a^4$, atque adeò solicitationes erunt ut distantiæ à centro. Æquatio curvæ pro hac hypothesi sic indagabitur. Quoniam $n = 2$, & $1 : n = \mu : v$ erit $v = 2\mu$, atque adeò æquatio generalis (§. 168.) huic casui applicata mutabitur in hanc sequentem $Sxx - Syy = rzz$. seu, quia A $(= z^m : a^{m-1})$ hoc casu est $= a^3 : zz$, & $S = rr : e - A = rrzz : ezz - a^3$, fiet $(rrxxzz - rryy$ [illegible] $: ezz - a^3 = rzz$, atque adeò $rxx - ryy = ezz - a^3 = exx + eyy - a^3$; hinc $a^3 + \overline{r - e}.xx = \overline{e + r}.yy$. Jam quia e (secundum hypothesin) major est quam r, quantitas $r - e$ erit negativa, atque adeò æquatio erit ad ellipsin, cujus axis transversus est ad conjugatum sicut $\sqrt{(e + r)}$ ad $\sqrt{(e - r)}$; & in qua abscissæ x originem in centro habent. Idcirco solicitationes gravitatis, quæ in ellipsi sunt ut distantiæ à centro solicitationum, diriguntur ad centrum ellipseos, quod iterum ex demonstratis Newtonianis constat verum esse; nam si, ut Excell. hic Autor, & postea Cl. Varignon fecerunt, quæratur qualem gravitates mobilis, perimetrum ellipseos circumeuntis, legem sequi debeant, si earum directiones in centro ellipseos concurrant, re-

pe-

perietur ejusmodi solicitationes distantiis mobilis à centro ellipseos proportionales esse. Sin verò r major sit quam e, inventa nostra æquatio erit ad hyperbolam, & solicitatio centralis erit negativa atque adeò centrifuga.

3°. Si $m = 1 = n = \mu = \nu$, & $e = 0$, erit $G = 2ss : z^5$. Atque æquatio generalis (§. 168.) mutabitur in hanc particularem $Sx = rz$, in qua erit $S = rr : z$, hinc $rrx : z = rz$, vel $rx = zz = xx + yy$. Ergo hoc casu centrum solicitationum est in circumferentia circuli, curvaque quæsita ipsa circuli circumferentia, quod à posteriori hactenus laudati viri Newtonus atque Varignonius ostenderunt. Vid. Lib. I. *Pr. Phil. Nat. Math.* Prop. VI. & Comm. Acad. Reg. Sc. Par. 1700. die 31. Martii art. XI.

4°. Generaliter, si G sit ut z^p, ubi p est quilibet numerus rationalis positivus vel negativus, excepto solo -1, curva semper algebraica haberi potest tali solicitationum centralium legi satisfaciens, in qua tamen vel e aut s evanescunt seu nihil sunt, alioqui nullæ curvæ algebraicæ talibus hypothesibus inveniri possent satisfacientes, exceptis casibus ipsius p significantis numeros 1 & -2, quibus sectiones conicas convenire in præcedentibus exemplis ostensum. Si $p = 0$, reperietur curvæ ANn æquatio $x^3 - 3xyy + z^3 = \frac{2e^3}{rr}$, in cujus curvæ singulis punctis solicitatio centralis constans quidem sed negativa est, mobile à centro repellens. Sin verò ponatur in formula §. 170, $m = -1$, & $e = 0$, fiet G ut $\frac{1-nn}{z^3}$, hoc est reciproce, ut cubus distantiæ mobilis à centro solicitationum, & huic casui infinitæ conveniunt curvæ, infinitæ scilicet geometricæ infinitæque infinitæ Mechanicæ seu transcendentes, prorsus ut à Cel. Joh. Bernoullio animadversum in Act. Lips. 1713. Mens. Mart. p. 129, ubi infinitas exhibet diversas spiralium species, quarum unæ continent curvas algebraicas, aliæ vero transcendentes. Nam quia (secundùm hypothesin) $m = -1$, erit $A (= z^m : a^{m-1}) = aa : z$, ideo-
Fig. 38. que curva LH erit hoc casu hyperbola inter asymptotas per centrum solicitationum, vel potius per punctum D ad angulos rectos ductas; ita ut una earum existente DA altera sit ipsi AL parallela. Adeoque cum secans AS sit tertia proportionalis ad AG, vel $EH = aa : z$, & radium AL, erit $AS = rrz : aa = z$ si AL sit $= a$. Unde si in fig. 37. fiat angulus ADN ad angulum MAD (§. 167.) sicut 1 ad n, atque in recta Dp sumatur ubique DN æqualis se-
canti

canti AS, punctum N erit in curva quæsita ANn, quæ proinde erit algebraica quoties *n* numerus fuerit rationalis & affirmativus, atque talis constructio coincideret fere cum eâ quam Celeb. Newtonus dedit in Corollario 6. post Prop. 44. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* Imò etiam cum Bernoulliana, quæ habetur loco supra citato, quanquam ejusmodi curvæ apud Acutissimum Virum aliter positæ sint, quam in Newtoniana vel nostra constructione. Nam ducta in figura 37. linea Dd axi DA normali, si jam ubique fiat angulus dDN ad angulum ΘAM, sicut 1 ad n, atque ut antea, in recta Dp sumatur DN æqualis ipsi DS, punctum N etiam nunc erit in curva optata, quæ asymptotam habebit ipsi Dd parallelam, cujus ab hac Dd distantia erit ad DP, ut 1 ad *n*: curva verò per punctum A non transibit; in altera vero constructione nostra curva transit per A, atque asymptotam habebit per D transeuntem, facientem cum DA angulum, qui se habet ad angulum rectum, ut 1 ad *n*. Et quidem hæc pauca exempla ad illustrationem formulæ ab initio hujus articuli allatæ adduxisse sufficiat; ex quibus satis jam perspicax Lector animadvertere potest, quam immensi pene usus sit generalis solutio problematis articulo 167. propositi & soluti, quandoquidem sola formula particularis articuli 170. paulo ante memorata justo tractatui conscribendo abundantem materiam subministrare posset.

CAPUT III.

De Motu Isochrono corporum in curvis descendentium juxta quamlibet gravitatis variabilis hypothesin, atque gravium directionibus etiam in centro gravium convergentibus; & de Motu Pendulorum

DEFINITIO.

Cum corpus grave motu suo ex quiete arcus quoscunque inæquales alicujus curvæ, sed terminatos tamen omnes ad infimum curvæ punctum eodem vel æquali tempore, perlabitur, talis linea curva *Isochrona* dici solet. Ut si grave A, ex quolibet curvæ BFA Fig. 40. puncto B, F, E &c. à quiete descensum incipiens motu suo quomodocunque accelerato, eodem seu pari tempore arcus utlibet inæ-

quales

quales BeA, FeA, EXA, sed terminatos omnes ad infimum curvæ punctum A, absolvat; curva hæc BEA Isochrona vocabitur.

PROPOSITIO XXVI. LEMMA.

171. *In quolibet triangulo rectilineo, cujus basis à linea intra triangulum ex angulo basi opposito ducta, pro libitu in duo quæcunque segmenta dividitur, solida quæ fiunt ex quadratis laterum in alterna baseos segmenta simul sumpta æquantur duobus solidis, quorum unum fit ex quadrato lineæ basin dividentis in hanc basin, alterum ex rectangulo* Fig. 39. *segmentorum basis in totam pariter basin.*

Sit triangulum quodvis ABC, cujus basis BC dividatur in D à recta AD pro libitu intra triangulum ducta. Probari debet esse $AB^2. DC + AC^2. BD = AD^2. BC + BD. DC. BC$.

Demonst. I. Descripto circa triangulum circulo ABE, producatur AD in E, & jungantur BE, CE, & triangula similia BAD ac ECD præbent analogiam $AB : AD = EC : DC$ atque adeò $AD. EC = AB. DC$. Atque à triangulorum ACD, BED similitudine elicitur $AC : AD = BE : BD$, & rec-lum AD. BE æquale rec-lo AC. BD.

II. In quadrilatero ABEC circulo inscripto, est $AB. EC + AC. BE = AE. BC = AD. BC + DE. BC$. Vel ascita communi altitudine AD, fiet $AB. EC. AD + AC. BE. AD = AD^2. BC + AD. DE. BC$. Adeoque subrogando loco rectangulorum EC. AD & BE. AD hæc rec-la AB. DC & AC. BD quæ illis (num. 1) æqualia ostensa sunt, & loco rectanguli AD. DE æquale rec-lum BD. DC; erit $AB^2. DC + AC^2. BD = AD^2. BC + BD. DC. BC$. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA.

Fig. 40. 172. *Si gravium directiones convergant in centro* O, *atque circa axem* OC *descriptæ sint tres curvæ, scilicet scala solicitationum gravitatis variabilis* cha, *deinde curva* ARD, *cujus qualibet ordinata* HR *possit duplum homologæ areæ* AHha *in scala gravitatis, ac denique tertia curva* AEB, *cujus arcus quilibet* AXE, *à circulo* HE *radio* OH *descripto, terminatus sit ad homologam ordinatam* HR *in curva* ARQ, *ut aliquis datus numerus* N, *ad unitatem, erit hæc tertia curva* BEA, *isochrona.*

Pona-

Ponatur grave delapsum esse per arcum curvæ BEA motum à quiete in B incipiendo; atque Ee elementum esse curvæ AE, per cujus terminum e descriptus centro O arcus eV axi occurrat in V, per quod punctum ducatur ordinata Vr in curva ARD, atque super hujus curvæ basi CD descripto quadrante circuli CDIK, per puncta R, r agantur RI, & ri circulo occurrentes in I, i, ejusque radio DP in punctis P, p, ductaque per I lineola Io parallela CD, jungantur denique CI, Ci. Quibus positis

I. Quia (secundum hypothesin) $CD^2 = 2.ACchaA$, & $HR^2 = 2.AHhaA$, erit $CD^2 - HR^2$, hoc est $CD^2 - CP^2$, vel $CI^2 - CP^2$, id est $IP^2 = 2.CHhgc = 2.ACchaA - 2.AHhaA$, ergo $IP = \sqrt{(2.CHhgc)}$ Item quia (secundum hypothesin) $AE : HR = N : 1$, erit $AE = N.HR$, adeoque $Ee = N.rR = N.Pp = N.Io$.

II. Supra (§. 136.) ostensum, eandem vel æqualem acquirere celeritatem duo mobilia pondere & massa æqualia in duobus punctis E, H centro O æquidistantibus, si ex punctis pariter æque altis B, C unum in curva BEA alterumque in recta CA à quiete moveri cœperint, atque spatia BE & CH descripserint. Et vocando corporis A massam per hanc eandem literam A, celeritas acquisita in H ex descensu per CH, vel in E ex descensu per BE (§. 144.) erit $\sqrt{(2.CHhc)} : \sqrt{A}$, seu (num. 1 hujus) $= IP : \sqrt{A}$. Unde, quia (num. 1.) $Ee = N.Io$ atque spatiolum Ee applicatum ad velocitatem qua percurritur, denotat tempus quo absolvitur seu tEe, erit propterea $tEe = N.Io.\sqrt{(A)} : IP$. Atqui propter triangula similia CIP, & Iio, ratio Io ad IP æqualis est rationi $Ii : CI$, hoc est (§. 129.) angulo ICi; idcirco $tEe = N.\sqrt{A}$. ang. ICi: ergo omn. tEe, hoc est, $tBE = N.\sqrt{A}$. omn. ICi seu ICD, atque adeo $tBE = N.\sqrt{A}$. ang. ICD. & $tBEA = N.\sqrt{A}$. ang. KCD.

III. Si jam mobile non amplius in B, sed in alio quocunque curvæ puncto F descensum incipiat; centro O per hoc punctum F ducatur circulus FG & per G ordinata GQ curvæ ARD occurrens in puncto Q, per quod agatur QN axi AC parallela ac denique radio CN descripto quadrante MLN, jungatur LC; atque hisce positis eodem quo in antecedente numero, conficitur argumento existere $tFE = N.\sqrt{A}$. ang. LCN. Cogitatione tua abscinde vel aufer totum spatium, quod est inter lineas mixtas BCD & FGQ, ac quadrantem MCN admove pariter ordinatæ GQ; & hac ratione hunc casum, quo mobile ex F descendere incipit, reducis præcise ad casum præcedentem; cum AEF nunc spectetur velut integra

 cur-

curva, ex cujus principio F proficiscatur mobile & analogæ curvæ ARQ basis GQ quadrantem habet sibi insistentem, quemadmodum basis CD suum quadrantem KID, idcirco tempus per FE, hoc est $tFE = N.\sqrt{A}$. ang. LCN, atque adeo $tFEA = N.\sqrt{A}$. ang. MCN. Est ergo tBEA ad tFEA, ut $N.\sqrt{A}$. ang. KCD ad $N.\sqrt{A}$. ang. MCN hoc est, sicut angulus rectus KCD ad angulum rectum MCN, atque adeo in ratione æqualitatis; ergo æquali tempore omnes arcus BA, FA, XA &c. percurrentur, atque adeò curva propositionis nostræ BEA est isochrona. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

173. Si ΘA fuerit radius osculi seu curvaturæ isochronæ in vertice A, erit generaliter $N = \sqrt{(\Theta A.\ OA : \Theta O.\ Aa)}$. Sumto enim arculo AX indefinite parvo vertici contiguo, ductisque ex centro O arculo XY, & per Y ordinata Yy curvam AR secante in z. Jam quia (secundùm hypothesin) $AX = N.\ YZ$, vel $AX^2 = NN.\ YZ^2$ (secundùm hypothesin) $= NN.$ dupl. areæ $AYya = 2NN.\ AY.\ Aa$; & quia AY est aggregatum sinuum versorum arculorum AX & XY instar æqualium accipiendorum, quorum centra sunt Θ & O, fiet $AY = \frac{AX^2}{2\Theta A} + \frac{AX^2(XY^2)}{2OA}$, atque adeò $2AY = AX^2.\ \Theta O : \Theta A.\ OA$, ac proinde substitutione facta, proveniet $AX^2 = NN.\ AX^2.\ \Theta O.\ Aa : \Theta A.\ OA$, ex qua facile elicitur $NN = \Theta A.\ OA : \Theta O.\ Aa$, & $N = \sqrt{(\Theta A.\ OA : \Theta O.\ Aa)}$.

COROLLARIUM II.

174. Si jam minimus isochronæ arculus XA vertici A adjacens consideretur instar arcus circularis radii ΘA à pondere A filo ΘA appenso descripti; erit tempus, quo arculus XA vel tota curva BEA describi potest, semissis unius oscillationis penduli ΘA. Unde, quia (§. 172.) $tXA = N.\ \sqrt{A}$. ang. rectum, erit 4tXA, seu duratio duarum penduli cujusque oscillationum minimarum, quod deinceps dicatur T, erit inquam $T = N.\ \sqrt{A}$. 4 rectos seu nominando peripheriam p, cujus radius 1 erit $T = pN.\ \sqrt{A}$, vel substituendo valorem ipsius N articulo præcedenti definitum, reperietur $T = p\sqrt{(A.\ \Theta A.\ AO : \Theta O.\ Aa)}$. Qui est canon valde generalis, in quo ΘA significat longitudinem penduli, AO ponderis minimam distantiam à centro

tro gravium O, ΘO distantiam puncti suspensionis Θ ab eodem centro O, Aa pondus corporis oscillantis A in infimo loco positi, & T tempus duarum penduli ΘA vibrationum minimarum. Hæc determinatio probe consentit cum assertionibus paulo specialioribus Newtoni Prop. 52. *Lib. I. Pr. Ph. Nat.*

Corollarium III.

175. Si centrum O sit infinite distans à puncto Θ, æquabuntur ipsæ ΘO & AO, atque formula præcedentis corollarii mutabitur in sequentem $T = p\surd(A.\Theta A : Aa)$. Hinc 1°. tempora oscillationum diversorum pendulorum sunt in composita ratione ex subduplicata massarum & longitudinis pendulorum directe & subduplicata itidem sed inversa ponderum. 2°. Tempora oscillationum pendulorum æqualium sunt in composita ratione ex subduplicata directa ratione massæ corporum & subduplicata inversa ratione ponderum. 3°. Si solicitationes, quibus pendula agitantur, id est pondera corporum longitudini pendulorum proportionalia sint, tempora oscillationum erunt in subduplicata ratione massarum corporum agitatorum, & hæc tempora erunt æqualia, si, iisdem positis, massæ insuper corporum ponderibus proportionales fuerint. 4°. Massæ vero, seu materiæ quantitates, erunt in composita ratione ex ponderum ratione pendulis æqualis longitudinis appensorum, & ex duplicata ratione temporis oscillationum. Atque hoc ipsum est Prop. 27. *Lib. II. Pr. Ph. Nat.* qua usus est Cl. Vir ad explorandum utrum pondera corporum ipsorum massis proportionalia sint, nec ne; ac reperit hic Author experimentis, accuratissime pendulorum ope sumtis, pondera corporum massis constanter proportionata esse. Sed hoc loco sermo est de ponderibus absolutis corporum; non vero de relativis, qualia habent cum fluidis diversis demersa sunt; hoc enim casu pondus portionis cujusdam fluidi volumine æqualis corpori demerso à pondere absoluto hujus corporis debet auferri, ut habeatur ejus pondus relativum, quod intra fluidum, cui immersum est, habet.

Corollarium IV.

176. Cum multitudines oscillationum æqualibus temporibus à diversis pendulis absolvendarum sint in contraria ratione temporum, quo unumquodque pendulum unam oscillationem peragit, multitudi-

tudines oscillationum æqualibus temporibus peractarum erunt proinde in composita ratione ex ratione subduplicata directa ponderum & subduplicatis rationibus inversis massarum & longitudinum pendulorum. Aut, si pondera massis proportionalia sint, ut tuto id assumi potest; erunt prædictæ oscillationum multitudines, ut radices ex lineis, quæ pondera seu vires gravitatis exponunt, quibus pendula agitantur, applicatis ad pendulorum longitudines. Atque adeò, 1°. pendulorum inæqualium, sed eadem gravitatis solicitatione agitatorum, vibrationes eodem tempore absolvendæ sunt in reciproca subduplicata ratione longitudinis pendulorum. 2°. Numerus oscillationum unius penduli erit ad numerum oscillationum eodem tempore peractarum in alio pendulo ejusdem longitudinis cum primo, in subduplicata ratione solicitationis gravitatis, qua primum ad solicitationem gravitatis, qua alterum pendulum primo quoad longitudinem æquale agitatur. Atque hoc posterius ad amussim convenit cum regula quam Bernoullius in elegantissimo suo schediasmate Act. Lipf. 1713. M. Februario inserto, tradit paragrapho 16, ex qua deinceps gravitates specificas eruere docet ex pendulorum experimentis modo plane novo nec antea cognito.

Scholion.

177. Ex corollariis proxime antecedentibus satis elucere existimo, quantæ utilitatis sit theorema nostrum generale isochronismi corporum in curvis, assignata lege descriptis, descendentium, cum ex ea omnia, quæ ad pendulorum motus spectant, tanta facilitate deducantur: interim oscillationes pendulorum quam minimas considerare convenit propter rationes §. 174. indicatas, scilicet quia tum demum pendulum vel penduli pondus arculum isochronæ, cujus tempus dimensi sumus, percurrere censetur, cum minimum arculum circularem ipsum describit, quoniam, eo casu, talis arculus circularis osculatur arculum isochronæ duplum ipsius XA seu arculum XAX; posito arcu AX in curva BEA, ex altera axis AC parte constituta æquali arculo AX, & quia osculari atque congruere in Geometria unum idemque significant, saltem in ea parte, in qua osculum contingit. Sin verò arculi AX non sunt minimi, hæc tamen omnia adhuc subsistent, si pendula inter se collata vel eorum pondera curvas similes descripserint.

178. Ut igitur quæ in antecedentibus corollariis sparsim dicta sunt

sunt in compendium colligantur; nominentur numerus oscillationum aliquo tempore peractarum à primo pendulo N, ejus longitudo L, quæ in schemate repræsentatur linea ΘA, corporis A gravitas absoluta G, ejus massa M, adeoque M nunc significat idem ac A, & G idem ac linea A*a* in schemate; atque retenta T pro designando tempore duarum oscillationum minimarum hujus penduli. In secundo pendulo eædem res iisdem, ac in primo, literis; sed minusculis exprimantur, atque adeò corollarium 3. præbebit has regulas $T = p\sqrt{(M.L:G)}$ & $t = p\sqrt{(m.l:g)}$. Corollarium vero 4. exhibet $N:n = t:T$, vel $NT = nt$. Unde quot diversis modis singulæ literæ T, G, L, M, N & homologæ *t*, *g*, *l*, *m*, *n* inter se conferri possunt, tot inde resultabunt alia atque alia theoremata, à quibus omnibus sigillatim recensendis brevitatis gratia abstineo. Hactenus isochroniam tantum in genere consideravimus nulli particulari hypothesi gravitatis inhærentes. Quid verò ex una alterave ejusmodi hypotheseon resultare debeat, indagabimus in sequentibus problematibus.

PROPOSITIO XXVIII. Problema.

179. *Invenire isochronam in hypothesi gravitatis uniformis atque directionum gravitatis inter se parallelarum seu in centro infinite distanti coeuntium.* Fig. 41.

Quoniam centrum solicitationum gravitatis O infinite distat à basi CD curvæ ARD, lineæ BC, EH, quæ antea (§. 172.) erant arcus circulares centro O descripti, nunc fient rectæ inter se parallelæ & axi AC perpendiculares, & quia (secundùm hypothesin) gravitas uniformis, ejus scala erit linea recta *cha* axi AC parallela, & quia (§. 172.) $HR^2 = 2.HAah$, curva ARD hoc casu parabola erit, cujus parameter 2Aa. At propter ΘO & AO æquales, fiet $N = \sqrt{(\Theta A : Aa)}$. Jam quia (§. 172.) $AE = N.HR = N.\sqrt{(2Aa.AH)} = \sqrt{(2\Theta A.AH)}$, erit $\frac{1}{2}AE = \sqrt{(\frac{1}{2}\Theta A.AH)}$, vel bisecta ΘA in C, erit $\frac{1}{2}AE = \sqrt{(AC.AH)}$, id est, super diametro AC descripto semicirculo ASC, lineam EH secante in S, = subtensæ AS, quandoquidem hæc media est geometrica inter diametrum AC & abscissam AH. Sic etiam $\frac{1}{2}Ae = As$, atque adeo $\frac{1}{2}Ee = AS - As$, id est demissa S*m* perpendiculari super A*s* productam, = *sm*, adeoque $Ee = 2.sm$, in suppositione infinitæ parvitatis arculi E*e*, quo casu *sm* est differentia seu excessus subtensæ AS supra subtensam minorem

rem As. Verum quia ductis per puncta A & S tangentibus AT & ST occurrentibus in T, hæ tangentes erunt æquales, etiam *u*S æquabitur S*s*, atque adeò perpendicularis S*m* bifariam dividet basim *su* trianguli isoscelis *s*S*u*, adeò ut *su* sit $=2sm$, atque adeo E*e*$=su$; idcirco quadrilaterum E*esu*, in quo latera opposita E*u* & *es* sunt æquidistantia & reliqua opposita latera E*e*, *us* æqualia, erit parallelogrammum, atque adeò $ES - es = uS = Ss$, hinc (§. 87.) omnes differentiæ $ES - es$ seu excessus maximæ ES supra minimam, quæ in vertice A nulla est, hoc est sola ES æquatur omnibus S*s* seu arcui circuli AS & sic ubique, propterea Isochrona quæsita BEA est *Cyclois* ordinaria, cujus semibasis BC æquatur peripheriæ semicirculi ASC. Quod erat inveniendum.

COROLLARIUM.

180. Tempus descensus per cycloidis arcum BE, erit ad tempus per axis partem æquealtam CH, sicut arcus CS circuli generatoris interceptus inter parallelas BC & EH, ad subtensam CS ejusdem arcus. Nam propter parabolam ARD & circulum ASC, est CI(CD) : CP(HR) = CA : AS, atque adeò anguli ICP & CAS vel CSH æquales sunt, adeò ut SC & CI in directum jaceant. Jam quia (§. 172. n. 11.) tBE = N. ang. ICD erit etiam tBE = N. ang. SAC, atqui (§. 129.) angulus SAC = ½ arc. SC : ½ CA = arc. CS : CA, ergo tBE = N. arc. CS : CA, vel quia $N = \surd(\Theta A : Aa)$, erit tBE = arc. CS. $\surd\Theta A : CA \surd Aa$, aut quia $\Theta A = 2CA$, fiet tBE = 2.arc. CS : $\surd(2CA.\ Aa)$ = 2arc. CS : CD, propter parabolam ARD; & tCH (§. 151.) = $\surd(2CH : Aa)$ nulla habita ratione massæ corporis, cum hoc loco mobile non conferatur cum aliis; sed unum idemque corpus tantum in linea curva BEA vel in axe CA moveri intelligatur, adeò ut loco ipsius M, quæ formulam articuli citati 151. ingreditur, poni possit unitas. Sed tCH = $\surd(2CH : Aa)$ reducitur ad tCH = $\surd(4AC.\ CH : 2CA.\ Aa)$ = 2CS : CD; ergo tBE : tCH, ut fractio $\frac{2\text{arc. CS}}{\text{CD}}$ ad $\frac{2\text{subt. CS}}{\text{CD}}$; atque adeò tempus per BE est ad tempus per CH sicut arcus CS ad ejus subtensam CS.

Propterea tempus per totam semicycloidem BEA ad tempus descensus mobilis per axem ejus CA se habet, ut semicircumferentia CSA ad diametrum CA. prout primùm ab Hugenio, dein à multis aliis demonstratum est; sed ex fundamentis ab hisce nostris multum diversis.

PRO-

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA.

181. *Si scala solicitationum gravitatis centralium fuerit linea recta* ha, *quae deorsum producta transeat per centrum* O *solicitationum gravitatis; invenire isochronam* BEA *in hac hypothesi.* Fig. 42.

Quia (§. 172.) $HR^2 = 2.HAah = (HO^2 - AO^2)$. $Aa : AO$ propter trapezium $HAah$, curva AR invenitur hyperbola esse, in qua $HR^2 . AO : Aa = HO^2 - AO^2$.

II. Ex aliquo axis puncto G, tanquam centro, descriptus circulus AMN ab arcubus concentricis indefiniteque vicinis EH, *e*K secetur in punctis I & *q* actisque ex centro G ad hæc puncta radiis GI & G*q*, tum etiam rectis AI & A*q*, illa seu AI secet arcum *e*K in *p*, sitque arculus *qr* centro A descriptus, junganturque demum IO, *q*O & *p*O.

Jam in triangulo IGO, si GO consideretur instar baseos, erit ut supra (§. 171.) ostensum $IG^2 . AO + IO^2 . AG = AI^2 . GO + GA . AO . GO$, atque adeo $AI^2 . GO = IO^2 . AG + IG^2 . AO - GA^2 . AO - AO^2 . AG = HO^2 . AG - AO^2 . AG$, & per consequens $HO^2 - AO^2 = AI^2 . GO : AG$ (vel num. 1. hujus) $= HR^2 . AO : Aa$; hinc fiet $HR^2 : AI^2 = Aa . GO : AG . AO$, & (§. 172.) $AE^2 : HR^2 (= NN : I) = \Theta A . OA : \Theta O . Aa$, ergo ex æquo & per compositionem rationum fiet $AE^2 : AI^2 = Aa . GO . \Theta A . OA : AG . AO . \Theta O . Aa = \Theta A . GO : \Theta O . AG$, hinc $AE : AI = \sqrt{(\Theta A . GO)} : \sqrt{(\Theta O . AG)}$ atque adeo est curva AE ad homologam AI in data ratione, ac propterea $Ee : Ir = \sqrt{(\Theta A . GO)} : \sqrt{(\Theta O . AG)}$.

III. Ergo inter circulos concentricos EH & *eq*K ad punctum I aptanda esset quædam lineola, quæ sit ad I*r*, differentiam inter subtensas IA & *q*A, in data ratione $\sqrt{(\Theta A . GO)}$ ad $\sqrt{(\Theta O . AG)}$. Verum quia facile videtur esse I*p* portiunculam subtensæ AI à præfatis circulis concentricis interceptam ad prædictam subtensarum differentiam I*r* in data ratione duplæ GD ad CF, demissis scilicet ex punctis G & C perpendicularibus ad lineam OI productam, vel duplæ GO ad CO; elementum ergo curvæ E*e* lineolæ I*p* æquale poni potest ex eo ipso, quòd I*p* & E*e* habeant ad I*r* datam rationem, quod respectu rationis I*p* ad I*r* ita esse demonstrandum est. Agantur MC, IC, & MN, quo facto, erunt primum triangula I*pi* & CIF similia, quandoquidem angulus CIA in semicirculo rectus efficit, ut duo *p*I*i* & CIF simul rectum æquent, ut adeò angulus *p*I*i*

M æqua-

æqualis ſit angulo FCI & cum anguli ad i & F ſint (ſecundùm hypotheſin) recti, neceſſe eſt, ut tertius tertio atque adeo triangulum triangulo ſimile ſit. Secundo, quia angulus qIi ſub tangente Iq & ſecante IO, vel ejus verticaliter oppoſitus æqualis angulo MNI, in alterno ſegmento ipſius IM, angulique i & IMN recti ſunt, triangula ipſa INM & qIi ſimilia exiſtent. Tertiò, triangula etiam Iqr & CAI ſimilia erunt, quoniam angulus qIA ſub tangente Iq & ſecante IA æquatur angulo ICA in alterno ſegmento, & anguli ad r & AIC recti; adeoque tria hæc triangulorum ſimilium paria ſuppeditabunt has analogias $Ip : Ii = IC : CF$, item $Ii : Iq = MN : IN$, & denique $Iq : Ir = AC$ vel $IN : IC$; ergo ex æquo fiet $Ip : Ir = MN : CF = 2DG : CF = 2GO : CO$.

IV. Adeoque, cum ſit (num. II.) $Ee : Ir = \sqrt{(\Theta A . GO)} : \sqrt{(\Theta O . AG)}$ & num. III. $Ip : Ir = 2GO : CO$, erit $Ee = Ip$, ſi fuerit $\sqrt{(\Theta A . GO : \Theta O . AG)} = 2GO : CO$; hæc ergo rationum æqualitas aſſumatur, quoniam recta ΘA ad nullam adhuc magnitudinem eſt reſtricta, ſuamque magnitudinem etiam ad diametrum circuli CA relatam habere debet; fietque hoc caſu $\Theta A = 2OG . AC : A\Theta$; nec non $Ip = Ee$ atque adeo $ip = fe$; porro (§. 129.) eſt $qp = pO$. ang. pOq, & $qr = Aq$. ang. $qAI = Aq . \frac{1}{2}$ ang. IGq. Verùm quia $pq : qr$ $(= Ip : Ii = IC : CF) = AC : MC$, ideò $MC . pq = AC . qr$, vel $pO . MC$. ang. $pOq = Aq . AC$. ang. $qAI = AI . AC . \frac{1}{2} IGq = AI . AG . IGq$, ergo $pOq = AI . AG . IGq : KO . MC$, ſed propter triangula ſimilia OIA & OCM, erit $IA : MC = IO : CO = HO$ vel $KO : CO$; propterea ponendo loco AI & MC, homologas proportionales KO & CO, fiet ang. $pOq = KO . AG$. ang. $IGq : KO . CO = AG . IGq : CO$, atque adeò omnes pOq, qui ſingulis IGq reſpondent $= AG$. omn. $IGq : CO = AG$. ang. $IGA : CO$, aut poſito angulo $SOC =$ omnibus qOp, fiet $SOC = AG . IGA : CO$, ſeu CO. ang. $SOC = AG$. ang. IGA, verùm (§. 129.) CO. ang. SOC = arcui SC, & AG. ang. IGA = arcui IA; ergo arcus SC = arcui IA, atque BC = AIMC. Jam $EOe = IOp = IOq + qOp$; ergo $\int EOe = \int IOq + \int qOp$, id eſt, EOA = IOA + SOC, ſed EOA = EOT + SOC, ergo EOT + SOC = IOA + SOC, atque adeò EOT = IOA; idcirco ſuper diametro ST = CA deſcriptus ſemicirculus SET tranſibit per curvæ AB punctum E, eritque arcus SVE = arcui SB, quandoquidem jam arcus AI vel TE ipſi CS, & AMC vel TVS toti CSB æquales ſunt oſtenſi. Propterea curva quæſita in hac hypotheſi particulari BEA eſt *Epycycloïs* quæ deſcribitur motu puncti in circumferentia circuli SVT fixi E, cum ſcilicet

licet hic circulus in cava parte alterius circuli BSC ex B per S versus C volvitur; ita tamen ut initio motus punctum describens E in circulo mobili SVT punctum B immobilis tetigerit, atque ab hoc puncto B moveri cœperit, curvam BEA deinceps descripturum rotatione circuli SVT super BSC. Quod erat inveniendum.

Corollarium.

182. Si diameter circuli generatoris AC fiat infinita, cyclois BEA mutabitur in lineam rectam axi OC perpendicularem, idcirco etiam in hac recta corpora eodem tempore ad punctum A appellent, sive initium motus puncto A viciniffimum sit, sive etiam ab eodem remotissimum fuerit.

Scholion.

Post Propositionem XXI. commodus locus fuisset de conatu centrifugo ex motu circulari oriundo aliqua adjiciendi: sed quia ejusmodi conatuum centrifugorum theoria nonnulla circa motum pendulorum præsupponit, siquidem plene sit tractanda, ideo etiam in hunc locum erat differenda. Postquam Hugenius veras horum conatuum leges aperuit ad calcem Horologii sui Oscillatorii, Illustr. Marchio Hospitalius Hugeniana theoremata, absque demonstratione ab Autore suo proposita, demonstrata dedit in Actis Acad. Reg. Par. Scient. 1700, loquor de omnibus Hugenianis theorematibus de vi centrifuga: nam diu ante Hospitalium Newtonus nonnulla eorum demonstraverat in *Philosoph. Nat. Princ. Math.* viamque aperuerat, cui insistendo reliqua omnia possent expediri; post laudatissimos hosce Geometras plures alii Autores Hugenii 13. theoremata de vi centrifuga demonstrare conati sunt, nonnulli laudabili successu, alii vero non item, utpote qui paralogismis nonnullis demonstrationes suas fœdarunt, ut facile ostendi posset, si modò id è re esset. Sed ad rem: cum filum quoddam alicubi affixum alterique suo capiti annexum habens ponduscululum, circa punctum fixum conversum describit circulum, id in plano moveri dicetur, cum reapse in plano circuli moveatur; sin verò filum motu suo superficiem conicam describit; id *Pendulum conicum* deinceps dicetur.

183. Sit ergo filum DM clavo in D affixum, in cujus extremitate annexum sit corpus M, atque filum circa punctum D in plano Fig. 43.

conversum describat circulum RQM, cujus radius DM dicatur simpliciter R, conatus centrifugus C, velocitas qua mobile M in sua circumferentia æquabiliter revolvitur, V, & hæc velocitas, tanta sit quantam idem mobile M acquireret motu naturaliter accelerato à quiete in F post casum perpendicularem ex altitudine FM, quam *Altitudinem determinatricem* posthac vocabimus, atque litera D insigniemus. Tempus, quo mobile circumeundo peripheriam RQM unum circuitum absolvit, sit T; ac denique ratio peripheriæ ad semidiametrum sit ut p ad 1, adeò ut peripheria radii R, sit pR. Ipsa vero gravitas, ut jam alibi factum, dicetur G, quæ in præsenti materia non variabilis sed uniformis est consideranda.

Hisce jam positis, supra (§. 119.) dictum est solicitationem gravitatis cuilibet curvæ normalem coërcere conatum mobilis à curva juxta directionem tangentis recedendi, atque adeo ejusmodi conatui generaliter æqualem esse in omni curva; ac propterea etiam in circulo. Generaliter itidem (§. 154.) demonstratum est, respectu cujuslibet curvæ à mobili quodam describendæ, quadratum celeritatis in quolibet curvæ puncto æquivalere rectangulo sub radio osculi seu curvaturæ & rectæ, quæ solicitationem curvæ perpendicularem ex centrali derivatam exponit; necesse est ut hoc idem etiam valeat in circulo in *specie*; verum in circulo radius curvaturæ est ejus radius R, & solicitatio circumferentiæ perpendicularis conatui centrifugo C æqualis est, ac velocitas in quolibet peripheriæ puncto nobis dicitur V. Propterea vi citati theorematis (§. 154.)
Æq. I. $V^2 = R.C$.. I. Deinde quia motus æquabilis est in circulo erit $T = pR : V$, hoc est, tempus innotescit applicando peripheriam tanquam spatium transmissum ad velocitatem, qua id percurritur,
Æq. II. ergo etiam $T = pR : \surd RC = p.\surd(R : C)$.. Denique, si cona-
Æq. III. tus centrifugi conferendi sint cum gravitate G, tertia formula opus est, quam articulus 150. suppeditat $2.D.G = V^2$..

Hinc 1°. formulæ prima & tertia efficiunt $R.C = 2D.G$ atque adeò $C : G = 2D : R$ hoc est, conatus centrifugus se habet ad gravitatem, ut dupla lineæ determinatricis ad radium circuli; atque adeò ubi hæc determinatrix altitudo D semissem radii R æquaverit, conatus centrifugus gravitati æqualis erit. Quod est theor. 5. Hugenii.

2°. Si in diversis circulis tempora periodica T sunt æqualia etiam ipsæ $p\surd(R : C)$ æquabuntur, atque adeò conatus centrifugi radiis directe proportionales erunt.

3°. Si T ut R^n, erit V seu $pR : T$, ut R^{n-1} inverse, atque adeò

C

C seu $ppR:T^2$ erit reciproce ut R^{2n-1}. Proinde si conatus centrifugus fuerit reciproce ut T^2, erit tempus periodicum in ratione sesquiplicata radii R, & in hoc consistit celebre Kepleri theorema. Reliqua, quæ eadem facilitate ex tribus præcedentibus formulis elici possunt, Lectoris industriæ relinquimus, atque adeò ad contemplationem pendulorum conicorum absque ulterioribus ambagibus accedimus.

184. Si filum AM motu conico moveatur circa axem AD horizonti rectum, adeo ut pondus ipsi annexum M circumferentiam circuli MQR describat; id fieri non potest, quin præter gravitatem secundùm directionem ipsi AD parallelam in corpus M agentem eidem mobili insit conatus alius secundùm directionem DM agens. Nam ut filum AM in situ hoc sub angulo DAM ad axem inclinato detineatur duabus viribus aut solicitationibus lateralibus AB & BC opus est, quarum prior gravitatem exponit, altera verò BC nonnisi à motu circulari provenire potest, ex motu vero centrali resultat conatus centrifugus, ergo BC repræsentat ejusmodi conatum centrifugum. Agatur igitur BE æquidistans lateri AM, fietque EM = BC. Ponantur insuper AD = A, AM = L, AB = G, & BC = EM = C, radius DM = R, peripheria MRQ = pR, & perinde ac supra V celeritas mobilis in circumferentia MQ; quibus præsuppositis, erit iterum, ut in antecedenti paragrapho, tempus unius circuitus T mobilis M in peripheria MQR, dum filum AM superficiem conicam describit $= p\surd(R:C)$ verum ob parallelas AM & BE, est AD : AB = DM : EM, hoc est; A : G = R : C, ergo etiam $T = p\surd(A:G)$, hæc verò expressio etiam significat (§. 175. 178.) tempus duarum oscillationum minimarum lateralium penduli cujus A sit longitudo; magnitudo vero $\surd(A:G)$ significat tempus descensus perpendicularis alicujus gravis ex altitudine ½ A. Propterea tempora circuitus pendulorum conicorum sunt in subduplicata ratione altitudinum A conorum. Superfluum duco reliqua, circa ejusmodi pendula ab Hugenio indicata, theoremata operose demonstrare, cum ex hisce positis principiis sponte sua facillime fluant, ceu quilibet videbit, qui animum iis advertere velit. Priusquam tamen ad alia transeam, contemplabimur paulisper problema ab ingeniosissimo Joh. Bernoullio olim propositum quodque ab Illustr. Hospitalio solutionem nactum est; sed quoad arguendi formam à nostra differentissimam.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA.

Fig. 44. 185. *Invenire curvam* ABN *ejus conditionis, ut in ea descendens grave* A *motu naturaliter accelerato, eandem in singulis punctis premat vi ubique æquali ponderi corporis absoluto.*

I. Sint CD axis curvæ quæsitæ, CA prima ordinata in cujus continuatione AF exponat gravitatem seu pondus absolutum mobilis A, atque super ea descripto semicirculo AGF, agantur FG tangenti curvæ in puncto B, & Fg tangenti in b æquidistantes, junganturque AG, Ag. Radius deinde circuli osculatoris curvæ in puncto B, id est, BZ producatur in L, usquedum $BL = AF = BI$ quæ sumta est in ordinata curvæ DB ultra curvam prolongata. Ipsis AG, Ag fient æquales AM, Am, & denique ex puncto I demittatur perpendicularis IK ad lineam BL, eritque $BK = AG = AM$, atque adeò $MF = KL$.

II. Quoniam BI exponit pondus absolutum mobilis A vel B, ipsa BK exponet pressuram, quam pondus in curvæ punctum B exeret secundum directionem BL, sed præter hanc pressionem aliam insuper sustinebit idem curvæ punctum B à conatu centrifugo mobilis, ac per consequens hic conatus exponi debebit per KL, quandoquidem pressio totalis BL æquari debet (secundùm hypothesin) ipsi AF vel BI. Dicatur celeritas acquisita in B, V; eritque (§. 154.) $V^2 = BZ.KL = BZ.MF$, verùm (§. 150.) est etiam $V^2 = 2AF.DB$, ergo $BZ.MF = 2AF.DB$; hinc $Bb.MF : BZ.MF = Bb.MF : 2AF.DB$. Atqui similitudo sectorum BZb, GAb, & gFh præbet $Bb : BZ = Mm\ (gh) : gF$, atque ex similitudine triangulorum BbE, & FAG elicitur $Bb : AF = Eb : FG$; propterea subrogando in antecedenti analogia loco Bb, & BZ proportionales Mm & FG, atque loco Bb & AF, proportionales Ee & FG, eaque mutabitur in hanc alteram $Mm.MF : FG.MF = Eb.MF : 2DB.FG$, vel $2MF.Mm : FG.MF = 2Eb.MF : 2DB.FG$ vel ductis consequentibus in $MF : FG$, erit $2MF.Mm : MF^2\ (= 2Eb.MF : 2DB.MF) = Eb : DB$. Unde, quoniam decrementum $2MF.Mm$ est ad decrescentem MF^2 sicut incrementum Eb crescentis DB ad hanc crescentem, erit (§. 153.) crescens DB ad suam primam magnitudinem CA, ut decrescentis prima magnitudo, quæ est FA^2 ad decrescentem MF^2; adeoque sumta P media proportionali inter AC & DB, fiet $P^2 : AC^2 = AF^2 : MF^2$ vel $P : AC = AF : MF$, & convertendo $P - AC$:

P

$P = AG : AF$, hinc $AF^2 : AG^2 = P^2 : P^2 - 2AC.P + AC^2$, & dividendo $FG^2 : AG^2 = 2AC.P - AC^2 : P^2 - 2AC.P + AC^2$, & $FG : AG = \sqrt{(2AC.P - AC^2)} : P - AC = Eb : BE$: adeoque, si dicantur AC, a; CD, x; DB, y; Eb, dy, erit $p = \sqrt{ay}$, & $2pdp = ady$, & $FG : AG = \sqrt{(2AC.P - AC^2)} : P - AC$, fiet in his symbolis $dy : dx = \sqrt{(2ap - aa)} : p - a$, ergo $pdy - ady = dx\sqrt{(2ap - aa)}$, vel $apdy - aady = 2ppdp - 2apdp = adx\sqrt{(2ap - aa)}$, atque adeò $dx = (2ppdp - 2apdp : a\sqrt{(2ap - aa)})$ quæ mutatur in $dx = (q^4dq - a^4dq) : 2a^4$, cujus integralis est $10a^4x = q^5 - 5a^4q + 4a^5$ si scilicet positum fuerit $q = \sqrt{(2ap - aa)}$, atque retrogradiendo invenietur $q = \sqrt{(2a\sqrt{ay} - aa)}$ atque adeò æquatio curvæ quæsitæ $(aa, + (y - a - \sqrt{ay})$ in $\sqrt{(2a\sqrt{ay}, - aa)} = \frac{1}{2}ax$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

186. Quoniam invenimus $BZ : DB = 2AF : MF$ & $P : CA = AF : MF$, vel $2P : CA = 2AF : MF$, erit pariter $2P : CA = BZ : DB$ & invertendo $CA : P = DB : BZ$, atque adeò radius evolutæ in quolibet curvæ puncto ope hujus analogiæ innotescit, quæ analogia consentit cum ea, quam Ill. Marchio Hospitalius tradidit in Actis Acad. Reg. Scient. Paris. 1700. ab initio.

CAPUT IV.

De Solicitationibus centralibus quibus corpora in orbibus mobilibus detinentur, & de motu Apsidum.

DEFINITIO.

187. Sit ABE quilibet orbis *immobilis*, cui figura *abe* similis & æqualis dicatur orbis *mobilis*, quia circa punctum C ad quod solicitationes centrales diriguntur, reapse moveri intelligendus est; ea tamen ratione ut angulus AC*a*, quem axis ejus *ae* aliquo tempore descripsit, sit ad angulum *a*C*b*, quem arcus curvæ mobilis *ab* à mobili in curva incedente eodem hoc tempore descriptus subtendit, in ratione data. Axis *ae* motus, dicitur motus Apsidum. Fig. 45.

Co-

Corollarium I.

188. Quia angulus *a*CA ponitur ubique ad angulum *b*C*a* in data ratione, erit etiam componendo angulus *b*CA ad angulum *b*C*a*, vel descripto per orbis mobilis punctum *b* circulo *b*B immobilem orbem secante in puncto B, angulus *b*CA ad angulum BCA in data ratione. Cum Illustri Newtono nominemus rationem anguli BCA ad angulum *b*CA æqualem datæ F ad G.

Corollarium II.

189. Cum mobile *a*, orbem mobilem *abe* circumeundo describens, duplicem habeat motum, scilicet eum, quo in suo orbe mobili incedit, tum etiam motum ipsius orbis, ex gemino hoc motu liquet compositum iri motum secundum lineam curvam AN*b*. Idcirco idem est, si mobile in curva immobili AN*b* movetur, quam si in orbe mobili *abe* incederet, & vis centripeta aut solicitatio centralis in curvæ AN*b* puncto *b* requisita prorsus eadem erit cum ea qua opus est ut mobile in curva mobili *abe* semper incedere possit absque eo, ut unquam à curva *ab* recedat, durante motu plani ejusdem *abea*. Propterea ad determinationem solicitationis centralis, quæ corpus semper in perimetro orbitæ mobilis retinere possit, tantum quærenda esset expressio solicitationum centralium pro singulis curvæ immotæ AN*b* ex duplici motu resultantis, scilicet ex motu orbitæ & ex motu corporis in orbita, punctis; ut Cel. Varignon id egit in Actis Acad. Scient. Paris. 1705. ad d. 5 Dec. Verum, quia tota res non ineleganter ex theoria conatuum centrifugorum derivari potest, id paucis ostendere libet.

PROPOSITIO XXXI. Theorema.

Fig. 45. 190. *Excessus solicitationis centralis requisitæ ad id ut corpus aliquod in orbita mobili circa punctum* C, *ut* abe *revolvi queat, supra solicitationem centralem, qua idem corpus in orbe immobili* ABE *delatum in pari distantia* BC, *vel* bC *urgetur, æquatur excessui conatus centrifugi puncti* b, *in orbe mobili arculum* bh *describentis, supra conatum centrifugum mobilis cujusdam extremitati* B *radii vectoris* CB *annexi atque arculum* BH *describere nitentis eo tempusculo, quo punctum* b *suum arculum* bh *conficeret.*

Quia

Quia corpus in orbita mobili movendum à rotatione seu motu circulari plani *abe* acquirit conatum recedendi à centro C, atque adeò à curva ipsa *ab*, necessum est, ut quædam solicitatio ad punctum C directa conatum ejusmodi excussorium retundat, ad id ut corpus in orbita mobili gyrari queat, nec extra eam vagetur; hancque solicitationem præcise æqualem esse oportet conatui illi centrifugo à solo plani motu orto, alioqui corpus in orbita mobili non detineretur, si solicitatio conatu centrifugo major vel minor esset: sed conatus centrifugus à motu plani *abe* oriundus est excessus conatus centrifugi puncti *b*, à motu radii vectoris *b* angulum *b*C*b* describere molientis, supra conatum centrifugum puncti B in orbita quiescenti ABE, arculum BH describere conantis; nam motus angularis *b*C*b* non solum involvit motum angularem BCH radii vectoris BC in orbita quiescenti alteri *b*C*b* contemporaneum, sed etiam motum ipsius orbitæ plani, ac propterea conatus centrifugus, qui resultat à motu puncti *b* in radio vectore *b*C, angulum *b*C*b* describente, non solum in se continet conatum centrifugum puncti B in radio vectore BC orbitæ quiescentis, angulum BCH describente, sed etiam conatum centrifugum, qui provenit à motu plani *abe*, adeoque hic conatus æquivalet excessui conatus centrifugi puncti *b*, supra conatum centrifugum puncti B in orbita immobili; atqui idem conatus centrifugus à motu plani *abe* ortus æqualis est solicitationi centrali, à qua retundi debet; & hæc solicitatio coërcens conatum centrifugum æquatur excessui solicitationis centralis in puncto orbitæ mobilis *b* supra solicitationem centripetam in orbitæ immobilis puncto B cum altero *b* æquè alto. Ergo hic excessus solicitationum centripetarum æquatur excessui conatuum centrifugorum in *b* & B. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII. Theorema.

191. *Iisdem positis, excessus solicitationis in orbitæ mobilis puncto* b, *supra solicitationem centripetam in orbitæ quiescentis puncto* B *æqueal-to, erit ad solicitationem centripetam in puncto* A *orbitæ immobilis in composita ratione ex ratione* $F^2 - G^2$ *ad* G^2 *& ratione solidi* $AC^2 . AO$ *ad solidum* BC^3; *existente* AO *radio circuli ejusdem curvitatis cum curva* ABE *in* A, *seu radio circuli curvam osculantis in* A.

Compendii gratia velocitates circulationis radiorum *b*C, BC, AC designabimus respective per *u*b, *u*B, *u*A; conatusque centrifugos Fig. 45.

 pun-

punctorum b, B, A; gyrantium per cfb, cfB, cfA, ac denique sollicitationes centripetas in iisdem punctis per, cpb, cpB, cpA.

Jam I. quia velocitates radiorum Cb, CB sunt ut anguli eodem tempore ab ipsis descripti, erit $ub : uB =$ ang. bCh : ang. BCH (§. 188.) $= F : G$, ergo $(ub)^2 : (uB)^2 = F^2 : G^2$. Atqui in circulis æqualibus conatus centrifugi sunt in duplicata ratione velocitatum, ergo $cfb : cfB = F^2 : G^2$, & dividendo $cfb - cfB : cfB = F^2 - G^2 : G^2$.

II. Porro cum in orbita quiescenti æqualibus temporibus æquales areolæ BCD vel BCH, & ACa describantur, velocitates radiorum BC, AC hisce radiis erunt reciproce proportionales, hoc est $uB : uA = AC : BC$, & $(uB)^2 : (uA)^2 = AC^2 : BC^2$. atqui (§. 183. æqu. 1.) est $(uB)^2 = BC.cfB$, & $(uA)^2 = AC.cfA$. Ergo $BC.cfB : AC.cfA = AC^2 : BC^2$, vel etiam ductis in hac ultima analogia antecedentibus in AC & consequentibus in BC, eritque $AC.BC.cfB : AC.BC.cfA = cfB : cfA = AC^3 : BC^3$, verum (num. 1.) erat $cfb - cfB : cfB = F^2 - G^2 : G^2$, ergo per rationum compositionem & ex æquo fiet $cfb - cfB : cfA = (F^2 - G^2). AC^3 : G^2. BC^3$. Porrò quia (§. 183.) $(uA)^2 = AC.cfA$, & (§. 154.) $(uA)^2 = AO.cpA$, existente AO radio circuli curvam ABE in puncto A osculantis, erit $AC.cfA = AO.cpA$, atque adeò $cfA : cpA = AO : AC$; ergò denuo ex æquo $cfb - cfB : cpA = (F^2 - G^2). AC^2. AO : G^2. BC^3$; atqui per Prop. præc. est $cfb - cfB = cpb - cpB$, ergo excessus solicitationis centripetæ in b solicitationem in B, est ad solicitationem centripetam in A, in composita ratione, ex ratione $F^2 - G^2$ ad G^2 & ratione solidi $AC^2. AO$ ad solidum BC^3. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

192. Adeoque in quolibet puncto b orbitæ mobilis abe, solicitatio centralis erit ut cpB, $+ (F^2 - G^2). AC^2. AO. cpA : G^2. BC^3$.

Corollarium II.

193. Hinc si orbita ABE, *abe*, fuerit elliptica, ita ut $cpB : cpA = AC^2 : BC^2$, atque adeò $cpB = AC^2. cpA : BC^2$, erit $cpb = AC^2. cpA : BC^2 + (F^2 - G^2). AC^2. AO. cpA : G^2. BC^3$.

Scholion.

194. Inventa jam generali lege solicitationum centralium in orbitis

bitis mobilibus, problema, inveniendi ex data lege ſolicitationum centripetarum rationem F ad G, qua motus apſidis *aa* determinatur, ſolutu difficile non erit per methodum mox exponendam. Ingenioſa eſt via & oppidò elegans quam Cel. Newtonus ſequutus eſt in ſolutione ejusdem Problematis, ſupponens orbitas propemodum circulares, quamque fuſius explicat Sect. IX. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* & poſtea prolixo commentario illuſtravit Dav. Gregorius in ſuis Aſtronomiæ Phyſicæ & Geometricæ Elementis Lib. IV. Sect. II. Laudata Newtoni methodus conſiſtit in comparatione terminorum alicujus ſeriei infinitæ cum homologis terminis in Canone pro determinatione ſolicitationum centripetarum in orbita mobili, eaque pro ſingulis novis exemplis novas ſeries novumque calculum ſubducendum depoſcere videtur. Sed quid, ſi modum facillimum aperuero, quo idem absque ullo ſerierum infinitarum auxilio obtineri queat, imo longe plura, quandoquidem præbet canonem generalem, quæcunque ſolicitationis centripetæ ſit lex, rationem F ad G manifeſtantem?

195. Sit generaliter ſolicitatio centripeta in orbitæ mobilis puncto b, ut $P : BC^3$, eritque (§. 193.) $P = AC^2 . BC . cpA, + (F^2 - G^2) . AC^2 . AO . cpA : G^2$, &, ſi decrementum infiniteſimum magnitudinis P, dicatur $Q . bm$; formula determinans ſolicitationem centripetam in orbitæ mobilis puncto d, erit $P, - Q . bm = AC^2 . dC . cpA, + (F^2 - G^2) . AC^2 . AO . cpA : G^2 = AC^2 . BC . cpA - AC^2 . bm . cpA, + (F^2 - G^2) . AC^2 . AO . cpA : G^2$, quæ ex priore ſubducta relinquet $Q . bm = AC^2 . bm . cpA$, vel $Q = AC^2 . cpA$; qui valor in prima hujus articuli æquatione ſubſtitutus, efficiet $P = Q . BC + (F^2 - G^2) . Q . AO : G^2$, ex quâ elicietur $F : G = \sqrt{(P - Q . BC + Q . AO : Q . AO)}$. Verum, quia ellipſin ABE ad formam circularem quam proxime accedere cum Newtono ſupponimus, ideo ipſæ BC, AC & AO tanquam æquales tractandæ ſunt, nam ſemiſſis parametri ellipſeos, ſeu AO, à ſemidiametro AC vel BC circuli in quem deſinit, non differet; ac propterea præcedens analogia abit in hanc ſimplicem $F : G = \sqrt{P} : \sqrt{Q . AO}$. Qui eſt Canon generalis, qui quærebatur atque promittebatur ſupra, pro orbitâ mobili elliptica.

196. Regulam præcedentem unico exemplo illuſtrare libet, quod nobis omnium inſtar erit, idque ab Illuſtri Newtono mutuabimur. Sit ergo ſolicitatio centripeta in orbitæ mobilis puncto b, ut quantitas $\frac{az^m + bz^n}{z^3}$, ubi z ſignificat bC vel BC in fig. 45, eritque proin-

de $P = az^m + bz^n$, & $Q.bm = Q.dz = amz^{m-1}dz + bnz^{n-1}dz$, hoc eſt $Q = amz^{m-1} + bnz^{n-1}$, hinc $F:G (= \sqrt{P} : \sqrt{Q.AO}) = \sqrt{(az^m + bz^n : amz^{m-1} AO + bnz^{n-1} AO)}$. Verùm, quia juxta monita in Articulo præcedenti, z vel $bC = AC = AO$, cum Newtono æquales unitati poni poſſunt, reperitur $F:G = \sqrt{(a+b : am+bn)}$ prorſus ut habet Newtonus in exemplo 3. poſt Prop. 45. *Lib. I. Princ. Phil. Nat.* Sin vero fuiſſet $P = az^m - bz^n$, inveniſſemus pariter ut Laudatiſſ. Vir, $F:G = \sqrt{(a-b : am-bn)}$.

Denique ſi ſolicitatio centralis $P : BC^3$ fuerit ut BC^m, atque adeò $P = BC^{m+3}$, ex motu apſidum, ſeu ex ratione $F:G$, invenietur index m poteſtatis BC^m. Nam reperietur hoc caſu $Q = \overline{m+3}\,BC^{m+2}$, unde ſi $AO = AC = BC = 1$, erit $F:G = \sqrt{(1 : m+3)}$ atque adeò $m = (G - 3F^2) : F^2$.

CAPUT V.

De Motibus gravium inter ſe connexorum atque in arcubus circularibus concentricis junctim delabentium; ſeu de motu Pendulorum compoſitorum eorumque centro oſcillationis in omni poſſibili gravitatis variabilis hypotheſi.

THeoriam centri oſcillationis Hugenius primus, quod ſciam, aperuit in parte quarta eximii Tractatus de Horologio Oſcillatorio. Sed quia is principio inſtitit, quod indemonſtratum ſuppoſuit, veriſſima ejus doctrina ab omnibus integrum aſſenſum non impetravit. Petebat enim, ut ſibi concedatur, fore ut centrum commune gravitatis omnium, compoſiti cujusque penduli, partium non poſſit altius aſſurgere, cum unaquæque particula diffracto vinculo, quo cum reliquis connexa erat, ea celeritate aſcenſum ſuum liberum incipiet, quam junctim cum reliquis deſcendendo acquiſiverat, quin unde delapſum erat deſcenſu totius penduli compoſiti. Celeb. Jac. Bernoulli alia via longitudinem penduli ſimplicis compoſito iſochroni generaliter determinans, demonſtrationem poſtulati Hugeniani inde deduxit, ſed tantum in hypotheſi gravitatis in ſingulas penduli partes uniformiter agentis. Nos verò rem generalius concipiemus, fingentes gravitatem in partes illas utcunque difformiter agere atque

que hoc non obstante methodo directa & facili memorabilem naturæ legem demonstrabimus; ascensum scilicet centri gravitatis omnium penduli compositi partium, modo paulo supra memorato, æqualem esse descensui ejusdem, tametsi, pro variante in singulis penduli partibus gravitate, centrum earum gravitatis multum diversum sit ab eo, quod est in hypothesi communiori gravitatis uniformis & proportionalitatis ponderum cum massis corporum.

DEFINITIONES.

I.

Pendulum compositum vocatur, quod pluribus corporibus seu partibus inter se connexis instructum est. Simplex verò quod unico pondere constat.

II.

Axis penduli compositi est recta, quæ ex puncto suspensionis immobili, circa quod scilicet totum pendulum reciproco motu eundo & redeundo oscillatur, per commune centrum gravitatis omnium partium penduli compositi transit.

III.

Axis oscillationis est linea penduli axi perpendicularis per punctum suspensionis transiens, circa quam pendulum vibrationes suas peragit.

IV.

Centrum oscillationis est punctum in axe penduli, cujus distantia ab axe oscillationis æquatur longitudini penduli simplicis composito synchroni.

V.

Pendulum simplex composito synchronum dicitur, cum hujus axis & illud ex situ horizontali, vel quolibet alio ad horizontem similiter inclinato, simul exire incipientes æquales constanter angulos simul oscillando conficiunt.

197. Penduli compositi CPQ, circa punctum suspensionis C convertibilis, lineæ omnes CP, CM, CQ, PQ gravitatis expertes sint; in terminis vero rectæ PQ ponduscula quæcunque P, Q affixa existant, quorum commune centrum gravitatis sit M, recta CM per Fig. 46.

 pun-

punctum suspensionis C & centrum gravitatis ponderum M ducta, vocatur *axis* penduli compositi PQC, recta vero CW axi CM perpendicularis per suspensionis punctum C ducta, est axis oscillationis. Porro si penduli compositi axis CM ex situ horizontali CA delapsus venerit in situm CN eo tempore, quo pendulum simplex etiam ex situ horizontali in CN ceciderit, angulosque perpetuo æquales ACM & ACN confecerint compositum CPQ & simplex pendulum CN, hoc illi *synchronum*, vel subinde etiam *isochronum* dicetur; ponduscuIum verò in pendulo simplici N, instar puncti gravis consideratum, ad axem penduli compositi adductum atque applicatum, in eo signat *centrum oscillationis* N.

VI.

198. *Solicitationes vicariæ* solicitationum gravitatis centralium sunt solicitationes tangentiales loco centralium gravitatis cogitatione substituendæ, atque solicitationibus hisce æquipollentes. Sic solicitationes tangentiales expositæ per facta ex magnitudinibus R, S, &c. & V in massas P, Q &c. & N, hoc est solicitationes R. P, S. Q, &c. & V. N in directionibus PR, QS &c. & NV, quæ tangentes sunt arcuum P*e*, Q*f*, &c. N*n* à corporibus P, Q &c. & N oscillando descriptorum, in sua respectiva corpora agentes, sunt vicariæ solicitationum gravitatis centralium secundum directiones horizonti normales AP, BQ &c. YN in corpora P, Q, &c. & N agentium, si eundem cum hisce effectum producere valent, atque adeò in oppositas partes secundum P*r*, Q*s* &c. & N*u* agentes in æquilibrio consistunt cum solicitationibus gravitatis centralibus, quas deinceps etiam exponam per facta E. P, F. Q &c. & G. N ex magnitudinibus E, F, &c. & G in massas P, Q, &c. & N.

VII.

199. At denique *Solicitationes vicariæ similes* dicentur, quoties magnitudines R, S, &c. & V, homologis distantiis PC, QC &c. & NC proportionales erunt.

VIII.

200. Motus penduli compositi CPQ & simplicis CN similiter accelerari dicuntur, cum celeritatis incrementa infinitesima à solicitationibus gravitatis centralibus quolibet tempusculo minimo in singulis penduli particulis P, Q &c. & simplicis ponduscuIo N simul

mul producta, ubique proportionalia sunt homologis distantiis PC, QC &c. & NC particularum oscillantium & corpusculi N ab axe oscillationis.

201. Celeritates actuales & jam acquisitas particularum P, Q &c. penduli compositi, deinceps vocabimus p, q &c. respective, earumque elementa seu incrementa momentanea dp, dq &c. Celeritatem verò corpusculi N penduli simplicis nominabimus n, ejusque incrementum momentaneum dn. Ac tandem solicitatio gravitatis centralis, qua particula P in directione AP urgetur, sit E. P, solicitatio verò centralis particulam Q secundum directionem BQ urgens dicatur F. Q; ac solicitatio gravitatis, qua particula N in directione YN afficitur, G. N.

PROPOSITIO XXXIII. Lemma.

202. *Solicitationes vicariæ* R, S, &c. *juxta directiones* PR, QS, &c. *in particulas* P, Q, &c. *penduli compositi agentes eadem velocitatis incrementa singulis hisce particulis imprimere valent, quæ solicitationes gravitatis centrales* E, F, &c. *juxta* AP, BQ, &c. *in easdem particulas* P, Q, &c. *agentes; atque adeo vicariæ illæ eædem, quo hæ centrales solicitationes, modo penduli compositi motum accelerabunt.* Fig. 46.

Quia compositi penduli partes inter se connexæ sunt, similes arcus simul cunctæ describent, atque suum motum semel conceptum absque ulla mutatione continuarent, nisi gravitas indesinenter in eas agens motum penduli acceleraret. Ad rem nostram motus actualis consideratio nihil confert, quandoquidem in præsenti negotio hic motus jam acquisitus tanquam motus *communis* considerari debet, quo singulæ penduli particulæ abripiuntur; sed celeritatis incrementa particulis istis recens imprimenda tanquam motum earundem particularem nunc spectabimus, & hunc motum nascentem perinde oriri posse à solicitationibus vicariis R, S, &c. ut à centralibus gravitatis E, F, &c. probandum.

Etenim si hoc negetur, imprimant, si fieri potest, gravitatis solicitationes E, F, &c. particulis P, Q, &c. majorem celeritatem quam solicitationes vicariæ R, S, &c. ergo hæ solicitationes, secundum Pr, Qs, &c. agentes, non consisterent in æquilibrio cum solicitationibus E, F, &c. iisdem particulis P, Q, &c. applicatis, quod est contra hypothesin. Idem absurdum sequetur, si dicatur solicitationes gravitatis E, F, &c. minores particulis P, Q, &c. celeritates imprimere posse quam vicariæ. Ergo &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV. Lemma.

203. *Si ſingulæ particulæ* P, Q, &c. *alicujus penduli compoſiti à ſolicitationibus* P.R, S.Q, &c. *quarum* R, S, &c. *ſimiles ſint ipſi* V, *denotante* V.N *ſolicitatione tangentiale mobilis* N, *juxta directiones* PR, QS, &c. *urgentur, celeritates infiniteſimæ* dp, dq, &c. *&* dn *ipſis* P, Q, &c. *&* N *impreſſæ erunt ſimiles, hoc eſt radiis* PC, QC, &c. *&* NC *proportionales.*

I. Sint radii NC, PC, QC &c. libere atque independenter uni ab aliis volubiles circa axem C, & quia (§. 131.) quælibet ſolicitatio æquivalet motui genito applicato ad tempuſculum infiniteſimum, quo motus iſte producitur, & quia in caſu noſtro omnes ſolicitationes vicariæ R, S, V, ſimul ſeu eodem tempore agunt, erunt hæ ſolicitationes ut motus P.*dp*, Q.*dq* &c. & N.*dn*; atque adeò ipſæ R, S, & V, ut *dp*, *dq* &c. & *dn*, atqui ipſæ R, S, &c. & N, (ſecundùm hypotheſin) ſunt, ut radii PC, QC, &c. & NC, ergo & celeritates naſcentes *dp*, *dq*, &c. & *dn* iisdem PC, QC, &c. & NC proportionales ſunt.

II. Cum igitur celeritates *dp*, *dq*, &c. & *dn* ſimiles ſint; motus angulares PC*e*, QC*f*, &c. & NC*l* æquales, hoc eſt anguli ſimul deſcripti PCQ & *e*C*f* æquales erunt, perinde ac rectæ PQ & *ef* particulas PQ connectentes; adeò ut tali motu nulla variatio ratione mutuæ poſitionis particularum P, Q, &c. accidere poſſit. Propterea ſolicitationes tangentiales ſimiles R, S, &c. & V particulis P, Q, &c. ſimiles motus imprimient, ſive particulæ illæ P, Q, inter ſe connexæ ſint, ut in pendulis compoſitis, ſive non. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

204. Hinc quia (§. 202.) ſolicitationes vicariæ ſimiles R, S, &c. & V in directionibus PR, QS, &c. & NV corporibus P, Q, &c. & N applicatæ eodem modo pendulorum ſimplicis CN & compoſiti CPQ motus accelerant, quo fieret à ſolicitationibus gravitatis E, F, &c. & G in particulas P, Q, &c. & N agentibus; liquet omninò ambo pendula ſimplex & compoſitum, ex ſimili ſitu reſpectu horizontis moveri incipientia, ſimiliter deinceps & conſtanter motum iri, ita ut æquales ſemper angulos YCN, ACM ſimul conficiant,

ficiant atque adeo (§. 197.) unum CN alteri CPQ *synchronum* aut *isochronum* sit; & conversim, si hæc pendula synchrona sint, solicitationes vicariæ R, S, &c. & V similes erunt.

PROPOSITIO XXXV. Theorema.

205. *Si singulæ particulæ cujusque penduli compositi derepente alicubi vinculo solutæ motum in altum convertant, unaquæque ea celeritate quam cum reliquis connexa oscillando acquisivit, commune omnium penduli partium gravitatis centrum ad eam ipsam altitudinem ascendet, ex qua delapsum erat descensu totius penduli compositi, cum scilicet omnes penduli partes adhuc connexæ essent.*

I. Axis penduli compositi ex situ horizontali CA in situm CM delapsum esse ponatur motu accelerato, particulas vero P, Q, &c. vinculis solutæ ascendere in rectis P2P, Q2Q, &c. unamquamque celeritate initiali, quam cum reliquis oscillando acquisivit; ita ut commune omnium gravitatis centrum M ascendat per lineam M2M. Probandum est hanc M2M æqualem fore ipsi DM, quæ profunditatem denotat, ex qua omnium penduli partium centrum gravitatis cecidit motu totius penduli compositi. Quia nunc P, Q, N denotant massas corporum & E. P, F. Q, &c. G. N eorundem pondera, horum summa, excepto pondere N, dicatur M, hoc est, M = E. P + F. Q + &c., eritque (§. 48.) propter centrum gravitatis M; E. P. AC + F. Q. BC = M. DC, nec non E. P. AP + F. Q. BQ + &c. = M. DM; ac denique E. P. P2P + F. Q. Q2Q + &c. = M. M2M.

II. Sit insuper pendulum simplex CN composito *synchronum*, adeò ut id cum CM congruat atque celeritates pondusculorum N, P, Q, &c. similes sint; eruntque adeò (§. 204.) solicitationes vicariæ R, S, &c. V similes, verùm quia (§. 198.) solicitationes vicariæ solicitationibus gravitatis centralibus E, F &c. G æquipollent, atque cum hisce in æquilibrio consistere queunt, erit (§. 56.) E. P. AC + F. Q. BC + &c. id est (num. 1.) = M. DC = R. P. PC + S. Q. QC + &c. & G. N. YC = V. N. NC, atque hinc resultat analogia M. DC : G. N. YC = R. P. PC + S. Q. QC + &c. : V. N. NC (vel quia R, S, &c. & V radiis PC, QC, &c. NC proportionales sunt) = P. PC^2 + Q. QC^2 + &c. : N. NC^2; at celeritates p, q, &c. n corpusculorum P, Q, N etiam radiis PC, QC, NC proportionantur, ergo M. DC : G. N. YC, vel (propter triangula

O simi-

similia CDM & CYN) ratio M.DM : G.N. YN = P.pp + Q.qq + &c. : N.nn.

III. Quoniam (secundùm hypothesin) corpuscula P, Q, &c. celeritatibus initialibus p, q, ascendentia spatia P2P, Q2Q ascendendo emetiri possunt, (§. 141.) eadem corpuscula spatia 2PP, 2QQ à quiete perlabentia celeritates suas p, q &c. acquirere queunt, adeò ut (§. 150.) 2E. P2P = pp; 2.F. Q2Q = qq, & 2.G. NY = nn; loco pp, qq, nn substituendo valores inventos in ultima analogia numeri secundi hujus, erit M. DM : G. N. YN = 2.E. P. P2P + 2.F. Q. Q2Q + &c. hoc est (num. 1. hujus) 2M. M2M : 2G. N. NY = M. M2M : G. N. YN. Ergo cum consequentes primæ & ultimæ rationis æquales sint, antecedentes etiam æquabuntur; atque adeò M. DM = M. M2M, vel DM = M2M. Id est centrum gravitatis ad eandem altitudinem ascendit, ex qua delapsum erat. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

206. Resumendo ex num. II articuli præcedentis analogiam M. DC : G. N. YC (= R. P. PC + S. Q. QC + &c. : V. N. NC) = P. PC^2 + Q. QC^2 + &c. : N. NC^2, si loco rectarum DC, YC earum proportionales MC & NC in eadem analogia substituantur, fiet M. MC : G. N. NC = P. PC^2 + Q. QC^2 + &c. : N. NC^2, ex quâ facile elicitur sequens formula generalis NC = (P. PC^2 + Q. QC^2 + &c.). G : M. MC pro determinatione penduli simplicis CN composito CP *isochroni*, in qua formula M = E.P + F.Q + &c. & E.P, F.Q &c. pondera corporum P, Q &c. denotant, ac punctum M ipsorum centrum gravitatis.

Corollarium II.

207. Si singulæ E, F, &c. & G æquales fuerint, formula præcedentis corollarii fit NC = (P. PC^2 + Q. QC^2 + &c.) : M. MC, ubi nunc M = P + Q + &c. Atque hæc foret generalis formula pro omnibus figuris in systemate vulgari gravitatis uniformis in omnibus penduli partibus, quod secuti sunt Celeberrimi Geometræ Hugenius & Jac. Bernoullius sua methodo particulari.

Co-

Corollarium III.

208. Iisdem positis, quæ in corollario antecedenti, si duæ tantum particulæ P, Q penduli compositi spectentur, quarum M etiamnunc centrum gravitatis & aggregatum designet. Habetur (§. 171.) $PC^2 . MQ + QC^2 . MP = MC^2 . PQ + MP . MQ . PQ$. Vel substitutis loco rectarum MQ, MP, & PQ ipsarum proportionalibus, quæ propter centrum gravitatis M particularum P, Q, eodem ac illæ ordine sumta, sunt P, Q, & P + Q seu M; fiet $P . PC^2 + Q . QC^2 = M . MC^2 + M . MP . MQ$, atque adeò formula præcedentis corollarii $CN = (P . PC^2 + Q . QC^2) : M . MC$, nunc fiet $CN = (M . MC^2 + M . MP . MQ) : M . MC$. Adeoque, si innumera sumantur particularum P, Q paria, quibus totum pendulum compositum sit, longitudo penduli simplicis CN composito isochroni tunc erit $\int (M . MC^2 + M . MP . MQ) : \int M . MC$, ubi $\int$ significat summam seu integrale illius quantitatis, cui litera $\int$ præfixa est. Idcirco, si cum Cel. Jac. Bernoullio particulæ P, Q inter se æquales, dicantur dp, & CM, x; MP verò vel MQ, y, hæ enim æquales erunt cum ipsæ P & Q æquentur, earumque centrum gravitatis fit in puncto M; erit $CN = \int (2xxdp + 2yydp) : \int 2xdp = \int (xx + yy) . dp : \int xdp$; quæ est ipsissima formula, quam Acutiss. Vir in Actis Academiæ Reg. Paris. Scient. 1703. ad diem 25. Apr. ex sua methodo elicuit. Quomodo vero formula hæc figuris & solidis debeat applicari, non est hujus loci ostendere, cum id pendeat à calculo summatorio, quem non patitur institutum nostrum prolixius exponere; legi interim possunt, quæ habet super hanc rem Vir laudatissimus loco modo indicato.

Scholion.

209. Universalitas Canonis in corollario primo (§. 206.) exhibiti melius non poterit probari, quam si ostendatur illum jam continere regulam definiendi centrum oscillationis in quolibet pendulo composito, cujus partes diversæ specificæ gravitatis oscillentur in fluido quodam homogeneo, aut, quod eodem recidit, cujus particulæ ex materia eadem ejusdemve specificæ gravitatis vibrationes suas in fluido diversæ densitatis peragant; qualem regulam nobis promittit Celeb. Joh. Bernoullius Act. Lips. 1713. pag. 88. Nam si ratio gravitatis specificæ ponduscoli P ad fluidum, in quo oscil-

 latur,

latur, sit ut G ad G − E, & ratio gravitatis specificæ pondusculi Q liquorisque ut G ad G − F, prædicta formula articuli 206. exhibebit longitudinem penduli simplicis CN in vacuo oscillantis atque composito CPQ, quod in fluido vibrationes suas peragit, isochroni.

Exempli causa sit P globulus aureus, Q ferreus, atque pendulum CPQ oscilletur in aqua; & quia gravitates auri, ferri & aquæ sunt ut numeri 100, 42 & 5 ad invicem quam proxime, erit $G : G - E = 100 : 5$, atque adeo $E = \frac{95}{100} G$; & $G : G - F = 42 : 5$, adeoque $F = \frac{37}{42} G$; hinc quia (secundùm hypothesin) $M = E . P + F . Q$, erit M hoc casu æquale $(\frac{95}{100} P + \frac{37}{42} Q) . G$; atque adeo formula generalis corollarii primi substitutione valoris M, fiet $NC = (P . PC^2 + Q . QC^2) . G : (\frac{95}{100} P + \frac{37}{42} Q) . G = (P . PC^2 + Q . QC^2) : (\frac{95}{100} P + \frac{37}{42} Q)$. In qua P & Q denotant massas harum particularum, seu etiam pondera earum absoluta, quæ (§§. 30, 152, 175.) massis semper proportionalia sunt. Punctumque M est centrum gravitatis, non ipsorum corpusculorum P, Q sed eorum partium $\frac{95}{100}$ P & $\frac{37}{42}$ Q. Hinc ergo liquet, centrum percussionis differre in hoc casu à centro oscillationis. Errant ergo, qui nulla habita ratione gravitatis subitò identificant, atque confundunt hæc duo centra oscillationis & percussionis.

Si formula corollarii primi applicetur corporibus P, Q, quæ liquore specificè leviora sunt, totus formulæ denominator migrabit in quantitatem negativam, quod indicat pendulum situ inverso respectu præcedentis casus oscillationes suas intra liquorem absolvere describendo arcus versus fundum vasis cavos existente oscillationis axe prope fundum. Quomodo prædicta formula pendulis compositis debeat applicari, in quibus singulæ partes in una eademque linea recta dispositæ sunt, nimis planum esse existimo, quam ut ulla explicatione indigeat.

PROPOSITIO XXXVI. THEOREMA.

Fig. 47. 210. *Identitas centri oscillationis & percussionis eo casu, quo singularum penduli compositi partium pondera massis earundem proportionalia sunt.*

Si

Si particulæ P, Q &c. virgis inflexilibus CP, CQ, PQ inter se connexæ convertantur circa axem CW, punctum in axe CN penduli N, in quo maxima vis in obstaculum ipsi objectum eo exeretur, vocatur centrum percussionis, ostendendumque est hoc punctum tantumdem ab axe oscillationis CW distare, quantum centrum oscillationis in casu Coroll. 2 Prop. anteced. (§. 207). Radiis CP, CQ agantur normales PB, QE axi CM occurrentes in punctis A & D, per quæ & per centra corpusculorum P, Q ducantur normales AO, DF, PG & QH ad axem CM. Atque hisce positis statim manifestum est conversione totius figuræ CPQ circa axem CW, particulas P, Q motum iri celeritatibus proportionalibus earum distantiis PC, QC ab hoc axe; atqui juxta ea, quæ supra (§. 53.) dicta sunt, axis penduli CM eandem à particulis P, Q circa C in gyrum actis impressionem accipiet, quam si ejus puncta A & D, in quibus scilicet directiones ponderum in quolibet arcus ab ipsis describendi puncto motum suum prosequi nitentium axi occurrunt, juxta directiones AB & DE illis ipsis celeritatibus impellantur, quas particulæ P & Q &c. habent; propterea factis AB, DE &c. æqualibus vel saltem proportionalibus homologe radiis CP, CQ qui velocitates exponunt, quibus particulæ P, Q in gyrum aguntur, quæstio reducetur ad id, ut inveniatur centrum æquilibrii potentiarum P. AB & Q. DE; sit N hoc centrum, quod ita comparatum esse debet, ut ductis ex eo ad singulas PB, DE, &c. perpendicularibus N*a*, N*d* &c. omnia facta P. AB. N*a* æqualia sint omnibus factis Q. DE. N*d*. Sed ductis BO & EF parallelis CM, triangula AOB, N*a* A similia præbent AB. N*a* = AO. AN & triangula similia DFE & N*d*D efficiunt DE. N*d* = DF. DN; oportet ergo ut omnia P. AO. AN sint æqualia omnibus Q. DF. DN; considerentur tantum duæ P, & Q, eritque P. AO. AN = Q. DF. DN, vel P. AO. AC − P. AO. NC = Q. DF. NC − Q. DF. DC, atque adeò P. AO. AC + Q. DF. DC = (P. AO + Q. DF). NC; verum quia AO = CG & DF = CH propter triangula similia & æqualia ABO & CPG, utpote in quibus hypothenusæ AB & CP æquantur, ac propter similia & æqualia triangula DEF & CQH, in quibus pariter DE & CQ sunt æquales, fiet P. AO. AC + Q. DF. DC (= P. GC. AC + Q. HC. DC) = P. PC² + Q. QC²; & P. AO + Q. DF = P. GC + Q. HC, hoc est (§. 44) = M. MC; existente puncto M centro gravitatis particularum P, Q & M = P + Q. Idcirco factis substitutionibus debitis in P. AO. AC + Q. DF. DC = (P.

 AO

AO + Q. DF). NC, habebitur $P.PC^2 + Q.QC^2 = M.MC.NC$, atque adeo $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2) : M.MC$. Quæ expressio prorsus eadem est cum ea, quam supra (§. 207.) reperimus pro centro oscillationis in hypothesi communi, qua particularum P, Q pondera massis ipsarum proportionalia sunt, vel, quod eodem recidit, in qua singulæ E, F, G &c. quales supra (§. 198.) pro significandis juxta massas P, Q, N gravitatis solicitationibus centralibus adhibuimus, æquales sunt. In omni verò alia gravitatis hypothesi different ab invicem centra oscillationis & percussionis. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

211. Hinc si fuerint infinita particularum æqualium P, Q paria, tunc fiet $CN = \int(P.PC^2 + Q.QC^2) : \int M.MC$, adeoque nominando CN, t, atque retentis symbolis paragraphi 208. fiet $t = \int(xx + yy.dp) : \int xdp$, quæ est ipsissima iterum formula, in quam dicto loco incidimus, quamque alia methodo etiam reperit Cl. Jac. Bernoulli in Actis Acad. Reg. Parif. Scient. Acad. 1704. ad diem 14 Apr.

Caput VI.

De Regulis motus in collisione Corporum.

Definitiones.

I.

Corpora duo sibi directe occurrere dicuntur cum moventur in lineâ rectâ centra gravitatis jungente, atque per contactum eorumdem corporum transeunte.

II.

Velocitates corporum *propriæ* sunt illæ, quibus corpora moventur. *Velocitas* vero eorundem *relativa* est ea, qua cum ad se mutuo accedunt. Idcirco celeritas relativa corporum ex oppositis plagis sibi mutuo obviam venientium est *aggregatum* celeritatum eorundem propriarum. Sin vero velocius corpus alterum tardius ad eandem partem latum insequatur, velocitas eorum relativa erit *excessus* velocitatis majoris propriæ supra minorem.

III.

III.

212. Corpora A, B in planis horizontalibus moveri atque inter se collidi intelliguntur ad id, ut motus eorum ante & post occursum æquabiles evadant, nec iidem motus à gravitatis actione à plano utpote sufflaminanda, in quo mobilia incedunt, quicquam alterentur. Celeritates mobilium propriæ ante occursum designabuntur posthac per lineas rectas AD, BD in ipsorum directionibus sumtas; adeò ut quocunque modo mobilia A, B, incedant, dummodo non in rectis angulum continentibus ferantur, ipsorum celeritas relativa futura sit AB. Directiones verò particulares corporum, aut potius directionum plagæ, designentur deinceps per ordinem, quo literæ A, D & B, D scribuntur. Proinde AD significat mobile A ferri celeritate uniformi AD ex A versus D, & B ferri velocitate hac linea BD expressa ex B etiam versus D. Adeoque quoties signum D inter A & B cadit, toties ambo hæc corpora contrario sensu moventur, id est, ex oppositis partibus sibi invicem obviam veniunt celeritate relativa AB, quæ hoc casu composita est ex particularibus AD, BD; sin verò signum D cadit extra AB, ambo corpora movebuntur ad eandem partem, in qua signum D positum est celeritate relativa AB æquali in tali casu excessui velocitatis propriæ alterutrius mobilis supra celeritatem propriam alterius. Fig. 48.

213. Et quia motuum plagæ etiam per signa + & — subinde designari solent, probe sciendum + AD idem esse ac — DA, & + DA idem ac — AD, & sic de ceteris. Nam motui + AD contrarius est, seu in plagam contrariam dirigitur, tum — AD, tum etiam DA, atque adeo hæ duæ expressiones sunt æquivalentes; pariter quia & + DA & — AD eidem motui + AD contrarii sunt, notationes + DA & — AD unum idemque significant, adeò ut una alteri semper sufficere liceat, quod aliquando bene notatum, utile esse comperietur.

IV.

214. Celeritates corporum inter se collisorum ante conflictum considerabimus quandoque tanquam acquisitas lapsu verticali à quiete incepto motu gravium naturaliter accelerato; & celeritates eorundem post occursum tanquam velocitates initiales corporum, quæ verticaliter in altum lata motu naturaliter retardato certas altitudines emeteri valent priusquam motus eorum ascensionalis penitus extinguatur.

V.

V.

215. Vis corporum absoluta ante conflictum est altitudo, quam centrum gravitatis commune mobilium perlabi potest, quando unumquodvis corpus per suam altitudinem cadendo velocitatem suam propriam acquirit. Visque mobilium absoluta post collisionem, est altitudo, ad quam assurgere potest idem commune centrum gravitatis corporum, quando unumquodque horum corporum celeritate initiali ea, quam in conflictu acquisivit, suam altitudinem ascendendo absolvit.

Fig. 50. 216. Sic posito mobile A acquirere celeritatem suam propriam AD lapsu accelerato ex altitudine EA, & B suam celeritatem propriam descensu accelerato ex altitudine FB, centrum gravitatis G mobilium A, B in punctis E, F existentium cadet ex altitudine GC. Et si mobilis A post conflictum celeritas uniformis sit D*a* talis, ut eâ tanquam velocitate initiali rectam *ae* ascendendo conficere possit mobile A, alterumque B altitudinem *bf* celeritate initiali D*b*, quæ est velocitas uniformis, quam mobile istud B, in ipso conflictu acquisivit; commune corporum A, B gravitatis centrum *c* censetur ascendere posse vi absoluta mobilium post conflictum in recta verticali *cg* usque ad *g*.

VI.

217. Corpora, quæ nonnisi vi inertiæ materiæ prædita sunt, dicantur deinceps corpora inertia. Corpora verò, quæ vim actuosam habent repellendi corpora ea ipsa vi qua impulsa fuerunt, dicantur corpora actuosa. Corpora inertia alias etiam nominari solent *non elastica*, ac corpora actuosa *elastica*.

HYPOTHESIS.

218. *Cum corpora actuosa inter se colliduntur eadem manet vis eorum absoluta post conflictum, quæ erat ante eundem conflictum.*

Excipimus corpora inertia, quorum vis absoluta post collisionem nunquam eadem est, quæ erat ante concursum, quandoquidem hæc vis in ipso conflictu quandoque penitus absorbetur, scilicet cum mobilia celeritatibus massis suis reciproce proportionalibus sibi invicem obviam veniunt. Sed ejusmodi corpora penitus inertia forte nulla dantur, nam etiamsi pleraque corpora perfecta actuositate vel

elasti-

elasticitate prædita non sunt, quod particulæ eorum compressæ sese in pristinum statum restituere non valeant, eorum saltem elementa perfecte elastica esse queunt, à quo statuendo nullus ex præstantioribus Geometris hujus ævi abhorrere videtur. Verum quicquid rei sit, revertor ad corpora actuosa, quorum vis absoluta eadem manet vi hujus hypotheseos, si commune eorum centrum gravitatis ad eandem altitudinem *cg* ascendit post conflictum, ex qua delapsum erat ante occursum eorum, hoc est, positis quæ supra (§. 216.) si $cg = GC$.

219. Vires absolutas corporum æstimamus juxta altitudines, ad quas retardato suo à gravitate motu pertingere possunt, vel accuratius per facta ex his altitudinibus in massas corporum; in hac virium æstimatione præeuntem habemus Illust. Leibnitium, qui eandem non uno loco in Actis Eruditorum Lips. indicavit quidem, non tamen demonstravit, etsi apodictice demonstrari potest, ut forte alia id occasione ostendemus. Non ignoro perplures esse insignissimos viros, quibus talis vires æstimandi ratio non arrideat, existimantes eam à quantitatibus motus petendam esse. Celeb. Papinus sane diu multumque cum Leibnitio disputans rotunde negavit corporum vires altitudinibus, quas corpora ascendendo conficere possunt, proportionales esse; quin imo vires eas temporibus proportionari putat, quibus altitudines modo nominatæ absolvuntur vel etiam celeritatibus initialibus mobilium æqualium. Sed in probando hoc suo asserto incautus labitur ipse, principium assumens aperte falsum; & hoc principium falsum est, quod existimet corpora cum diversis velocitatibus initialibus ascendentia æqualem à gravitate ipsis resistente ictuum numerum exceptura esse temporibus æqualibus. Sed si plures docti Geometræ, præjudicatâ opinione communis vires æstimandi rationis per quantitatem motus detenti, à nobis diversa sentiunt, adsunt tamen alii acutissimi Geometræ, qui Leibnitianam ultro admittunt, quin imo jam ante complures annos Nob. Hugenius eadem quodammodo usus est in demonstrationibus suarum regularum motus ex percussione, principii loco in iis assumens, non posse commune centrum gravitatis corporum inter se collisorum altius ascendere post occursum, quam descenderat ante conflictum; non tamen supponit ascensum centri gravitatis descensui ejusdem æqualem esse; alias vero assumsit hypotheses, quæ æquivalentes sunt nostræ de æqualitate ascensus atque descensus centri gravitatis post & ante conflictum corporum. Idcirco hac nostra hypothesi posita

regulas motus corporum actuosorum facili ratione inde derivabimus; sed priusquam hanc tractationem aggrediamur, unicam propositiunculam præmittere libet circa motum corporum inertium post conflictum.

PROPOSITIO XXXVII. Theorema.

220. *Corporum inertium, atque sibi invicem directe occurrentium, celeritas & directio post conflictum est eadem, quæ erat ante communis ipsorum centri gravitatis occursum.*

Fig. 48. Sint AD celeritas uniformis corporis A, & BD velocitas corporis B ante conflictum, probandum est utrumque corpus A & B motum iri post occursum celeritate CD, quæ est celeritas, qua centrum gravitatis C mobilium A, B ferebatur ante collisionem, existente AC ad BC, sicut massa B ad massam A, seu ut pondus B ad alterius A pondus.

Demonstr. Quia motus corporum in collisione aliter non variantur quam pro ratione inertiæ materiæ, in ipso conflictu res eodem recidit, ac si corpora conjuncta, ac velut sibi invicem agglutinata movenda essent quantitate motus æquali excessui, quo motus major alterutrius ex mobilibus minorem alterius excedit, si corpora ex oppositis partibus sibi invicem obviam veniant, vel etiam æquali aggregato quantitatum motus utriusque corporis, si ambo ad easdem partes tendant. Unde cum in motus oppositione & casu, quo corporum centrum gravitatis C cadit inter puncta D & B (§. 44.) sit $B.BD - A.AD = (A + B).CD = A.CD + B.CD$, cumque $B.BD - A.AD$ sit excessus, quo motus B.BD fortioris B excedit motum alterius A, patet ambo corpora A & B post contactum celeritate æquali CD latum iri ex C versus O, id est celeritate & directione, qua centrum eorum gravitatis ante impactum ferebatur.

Sin vero ambo corpora A, B ad eandem partem versus O suis celeritatibus particularibus AD, BD moveantur, erit $A.AD + B.BD = (A + B).CD = A.CD + B.CD$, hoc est aggregatum motuum corporum A, B ante conflictum æquatur quantitati motus eorundem, sed celeritate CD centri gravitatis ante ictum movendorum, feretur ergo utrumque hac celeritate CD versus O. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII. Theorema.

221. *Si mobilia* A, B *in directionibus obliquis* AD, BD *quemlibet angulum* ADB *continentibus, atque celeritatibus hisce ipsis lineis* AD, BD *expressis sibi mutuo occurrant, commune illorum gravitatis centrum* C *eadem velocitate cum* CD *atque in directione hujus* CD *productæ in* d *post conflictum feretur.* Fig. 49.

Sit MN linea jungens centra mobilium A, B in casu contactus, atque ad eam demissæ sint ex centris corporum A, B eorumque communi centro gravitatis C normales A*a*, B*b*, & C*c*, motus juxta AD resolvetur in laterales A*a*, & *a*D, motusque BD in laterales B*b*, *b*D; at verò, cum motus juxta A*a* & B*b* paralleli sint, corpora hisce motibus in se invicem agere nequeunt, restant ergo soli motus *a*D & *b*D, quibus in se mutuo agunt. Jam si corpora A & B existerent in *a* & *b*, atque celeritatibus *a*D, *b*D sibi mutuo obviam venirent, post contactum utrumque moveretur (§. 220.) celeritate $D\varkappa = cD$, existente *c* eorum centro gravitatis, cum sit $AC : BC = ac : bc = B : A$, unde quia motus aD & bD in obliquis virtualiter continentur, ideo hæc motuum modificatio etiam in conflictu virtualiter accidisse censenda est: propterea ducta per punctum $\varkappa$ indefinita $\varkappa P$, in ea sumantur $\varkappa\alpha = Aa$ & $\varkappa\beta = Bb$, ac quia motus A*a*, B*b* in ipso conflictu nullam mutationem subierunt, mobile A post conflictum movebitur, aut moveri nitetur, motibus lateralibus $D\varkappa$, & $\varkappa\alpha$, ex quibus resultat motus $D\alpha$; alterum verò B motibus lateralibus $D\varkappa$ & $\varkappa\beta$, ex quibus nascitur motus $D\beta$. Sit *d* centrum gravitatis corporum A, B in α & β existentium, eritque (§. 44.) $A.\varkappa\alpha + B.\varkappa\beta = (A+B).\varkappa d$. item $A.Aa + B.Bb = (A+B).Cc$, & (constr.) $A.\varkappa\alpha + B.\varkappa\beta = A.Aa + B.Bb$, ergo etiam $(A+B).\varkappa d = (A+B).Cc$, vel $\varkappa d = Cc$: atqui per præcedentem est etiam $Cc = D\varkappa$, ergo $Dd = CD$, atque adeò post conflictum centrum gravitatis mobilium A, B movetur celeritate D*d* æquali illi C*c*, quâ ante occursum incedebat. Quod erat demonstrandum.

Tantum de corporibus inertibus seu vi elastica carentibus, sequuntur leges motus corporum elasticorum.

PROPOSITIO XXXIX. Theorema.

222. *Posita eadem quantitate vis absolutæ corporum inter se collisorum ante & post occursum eorum directum, facta ex massis corporum*

in quadrata velocitatum collective sumta ante & post conflictum aequantur.

Hoc est $A.AD^2 + B.BD^2 = A.Da^2 + B.Db^2$, existentibus Da, Db celeritatibus corporum A, B post collisionem, & AD ac BD velocitatibus ante conflictum.

Demonstr. Posito A acquisivisse celeritatem suam AD casu ex altitudine EA, alterumque B ex altitudine FB, divisaque recta EF jungente puncta E, F in ratione reciproca ponderum A, B, linea GC denotabit descensum centri gravitatis mobilium A, B; & *ea*, *fb* denotent altitudines, quibus accelerato motu transmissis mobilibus acquiruntur celeritates Da, Db, cum quibus deinceps in altum ferri incipientia iterum ad easdem altitudines *ae*, *bf* assurgere possunt; quo motu ascensionali eorum centrum gravitatis *c* ascendet per altitudinem *cg*. Jam quia (§. 218.) eadem manet vis absoluta corporum A, B ante & post conflictum eorum, erit $GC = cg$, vel posito C significare $A + B$, erit $C.GC = C.cg$; atqui (§. 44.) $C.GC = A.EA + B.FB$, & $C.cg = A.ae + B.bf$, ergo etiam $A.EA + B.FB = A.ae + B.bf$; verum (§. 150.) rectis EA, FB, *ae*, *bf* proportionalia sunt AD^2, BD^2, Da^2, & Db^2, unde sufficiendo haec illarum loco in proxime antecedenti analogia, reperietur $A.AD^2 + B.BD^2 = A.Da^2 + B.Db^2$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

223. Idcirco erit etiam $A.AC.AB + C.CD^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$. Nam $A.AD^2 = A.AC^2 + 2.A.AC.CD + A.CD^2$, & $B.BD^2 = B.BC^2 - 2.B.BC.CD + B.CD^2$, ergo $A.AD^2 + B.BD^2 = A.AC^2 + B.BC^2 + (A + B).CD^2, + 2.A.AC.CD - 2.B.BC.CD$ (vel quia centrum gravitatis C efficit $A.AC = B.BC$ vel $2A.AC - 2B.BC = 0$, & $C = A + B$, erit) $= A.AC^2 + B.BC^2 + C.CD^2$ (seu quia $B.BC = A.AC$ vel $B.BC^2 = A.AC.BC$, etiam) $= A.AC.AB + C.CD^2$. Pari argumento inferetur $A.Da^2 + B.Db^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$. Adeoque cum habeamus $A.AD^2 + B.BD^2 = A.Da^2 + B.Db$; erit etiam $A.AC.AB + C.CD^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$.

PROPOSITIO XL. THEOREMA.

224. *Centrum gravitatis corporum actuosorum inter se collisorum eadem post occursum celeritate ac directione feretur, qua ante incedebat, ea-*

eademque erit post impulsum à se mutuo recedentium corporum celeritas relativa, quæ ante conflictum erat accedentibus.

Positis quæ in præcedenti propositione, probandum est fore $Dc=CD$ & $ab=AB$, nam AB est celeritas relativa ante, & *ab* celeritas relativa eorundem corporum A, B, post occursum, punctaque C, *c* centra gravitatis indicant in utroque casu. Fig. 50.

Demonstr. Fingatur lineam rectam, in qua corpora moventur, infinite longam esse, atque moveri versus *m* velocitate infinite parva A*m*, huncque motum communem etiam corpora A, B in linea infinita incedentia participabunt; unde factis singulis $D\delta$, $a\alpha$, $c\varkappa$, $b\beta$ æqualibus A*m*, globus A movebitur tantum celeritate absoluta $A\delta$ loco ipsius AD ante occursum; quandoquidem ex motu ejus proprio AD communis $D\delta$ utpote contrarius est auferendus: B verò incedet velocitate $B\delta$ ante conflictum, accedente ejus motui proprio BD communi $D\delta$ alteri BD conspirante. Post conflictum autem celeritates D*a*, D*b*, mutabuntur in $D\alpha$ & $D\beta$; verùm quia omnes $b\beta$, $c\varkappa$, $a\alpha$, $D\delta$ (secundùm hypothesin) æquales, erunt $\alpha\varkappa=ac$, & $\varkappa\beta=ab$; atque adeò velocitates AC, *ac*, nec non AB & *ab* inalteratæ manent in æqualitate superiore (§. 223.) solis CD & D*c* variationem subeuntibus. Idcircò si in ea æqualitate $A.AC.AB+C.CD^2=A.ac.ab+C.Dc^2$ loco CD & D*c* substituantur $C\delta$ & $D\varkappa$; fiet $A.AC.AB+C.C\delta^2=A.ac.ab+C.D\varkappa^2$, quæ ex altera subducta relinquet $C.CD^2-C.C\delta^2=C.Dc^2-C.D\varkappa^2$, vel $CD^2-C\delta^2=Dc^2-D\varkappa^2$, aut etiam $2CD.D\delta-D\delta^2=2Dc.c\varkappa-c\varkappa^2$, hoc est quia $D\delta=c\varkappa$, erit $2CD.D\delta=2Dc.c\varkappa$, atque adeò $CD=Dc$. Fig. 51.

Porrò ex æqualitate $A.AC.AB+C.CD^2=A.ac.ab+C.Dc^2$ abjectis æqualibus $C.CD^2$ & $C.Dc^2$, restabit $A.AC.AB=A.ac.ab$, vel $AC.AB=ac.ab$. Verum est $AB:AC=ab:ac$, vel $AB^2:AC.AB=ab^2:ac.ab$, igitur propter $AC.AB=ac.ab$, erit $AB^2=ab^2$ atque adeò $AB=ab$. Quæ erant demonstranda.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA.

225. *Datis corporibus* A, B *utcunque inæqualibus sibi directe occurrentibus cum datis celeritatibus, invenire velocitates eorumdem corporum post conflictum.* Fig. 52.

Ex præcedenti propositione hujus Problematis solutio facillima est. Nam factis $Dc=CD$, item $ca=CA$, & $cb=CB$, ubi observandum punctum D, quo rectæ velocitatum ante occursum repræ-

 sen-

sentatrices terminantur, semper cadere debere inter puncta C, *c*, quibus centrum mobilium ante & post occursum signatur, punctaque *a* & *b* respectu puncti *c*, eodem ordine posita esse, quo alterum C situm est respectu corporum A, B. Quibus observatis erit semper D*a*, velocitas corporis A, & D*b* corporis B post conflictum.

Demonst. Quia (constr.) $ac = AC$, & $bc = BC$, erit $ab = AB$, & quia porrò (constr.) $Dc = CD$, hoc est, quia celeritas relativa corporum post collisionem æqualis relativæ ante eandem, & pariter celeritas atque directio centri gravitatis utroque casu eadem est, per præcedentem corpora A, B non aliis quam velocitatibus D*a*, D*b* moveri possunt post collisionem. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

226. Hinc 1°. si mobilia A, B ad eandem partem ferantur, adeò ut punctum D cadat extra AB, sed ad partes corporis B; erit $Da = CD - AC$ & $Db = CD + CB$. Sin verò punctum D ad partem corporis A extra AB cadat; fient $Da = CD + AC$, & $Db = CD - CB$. 2°. Si corpora A, B ex adversis partibus venientia inter se collidantur, ita ut D cadat inter A & B, & punctum C sit inter D & A, erit $Da = CD - AC$, & $Db = CD + CB$. Ac vice versa erit $Da = CD + AC$, & $Db = CD - CB$, quoties centrum gravitatis corporum situm est inter D & B.

Corollarium II.

227. Adeoque si corpus A celeritate AD impingatur in quiescens B, ita ut puncta D & B confundantur, huic quiescenti B dabit impellens A celeritatem duplam ipsius CB. Atque adeò si ambo A & B fuerint æqualia, in ipso conflictu sistetur motus corporis impellentis A, alterumque B tota velocitate AB deinceps feretur, qua agens A in ipsum impegerat.

Corollarium III.

228. Sin vero corpora ex oppositis partibus obviam veniant celeritatibus propriis AD, BD corporibus B, A reciproce proportionalibus, ita ut D incidat in C, utrumque corpus, qua advenerat velocitate, resiliet. Etenim hoc casu evanescit CD.

Co-

Corollarium IV.

229. Generaliter, si corpora A, B dicantur m, n, eorum velocitates propriæ ante occursum u & r, invenietur Da celeritas corporis A post conflictum $= (mu - nu + 2nr) : m + n, = u, + (u - r) . 2n : m + n$, & Db vel celeritas corporis B post conflictum $= (2mu + mr - nr) : m + n, = r, + (u - r) . 2m : m + n$. Hæ expressiones elicitæ sunt ex debitis substitutionibus valorum linearum CD, AC & BC in expressionibus Corollarii I. Da = CD − AC, & Db = CD + CB, pro casu, quo mobilia ante concursum ad easdem partes moventur. Formulæ pro altero casu corporum ex oppositis partibus in se mutuo irruentium ex hisce jam exhibitis elicientur mutando duntaxat signa quibus litera r affecta est, eritque D$a = u, + (u + r) . 2n : m + n$, & D$b = -r, + (u + r) . m + n$.

PROPOSITIO XLII. Theorema.

230. *Corpus* A *celeritate* AD *latum interventu corporis medii* X *eandem corpori quiescenti* B *velocitatem dabit, quam interventu alterius cujusdam corporis medii* Y, *si ipsum impellens* A *fuerit ad* X *sicut alterum* Y *ad quiescens corpus* B.

Hoc est, si corpus A celeritate AD primum in corpus X irruat, & hoc celeritate ab impellente accepta deinceps incurrat in corpus quiescens B; dico hoc corpus B eandem celeritatem accepturum, quàm si ab alio corpore Y impulsum fuisset celeritate ea, quam Y pariter quiescens à corpore A itidem celeritate AD ipsi occurrente accepisset, existente scilicet A ad X ut Y ad B. Ut propositum demonstretur, constructio Propositionis XL. est geminanda, & pro utroque corpore intermedio X & Y seorsim ponenda: propterea figura, in qua lineæ majusculis litteris signantur, respicit corpus intermedium X, & quæ iisdem, sed minusculis literis notantur, pertinent ad figuram corporis alterius intermedii Y,

Jam ex §. 227. constat corpus X accepturum ab impellente A celeritatem DB duplam ipsius CD, existente C centro gravitatis corporum A, X, atque adeò AC ad CD in ratione corporis X ad corpus A; ac divisa DB in puncto E, ita ut DE sit ad EB sicut corpus B ad medium X, mobile X daturum alteri quiescenti B, in quod impingat velocitate DB, celeritatem duplam ipsius EB. Similis

con-

constructio, sed respectu corporum *a*, Y & *b*, inter quæ ipsa *a* & *b* corporibus A & B æquantur, repetita intelligatur, accipietque corpus *b* à medio Y celeritatem 2*eb*. Probandum fore EB = *eb*.

Demonstr. Quia (secundùm hypothesin) est A : X = Y : B, & propter centrum gravitatis C, A : X = CD : AC ; nec non Y : *b*(B) = *be* : *de*, erit CD : AC = *be* : *de*, vel invertendo & componendo AD : CD = 2.*cd*(*db*) : *be*; adeoque etiam duplicatis consequentibus AD : DB (2.CD) = 2*cd* : 2.*be* = *cd* : *be*. Verùm est etiam B : X = Y : A, hoc est DE : BE = *ac* : *cd*, ergo & componendo DB : BE = *ad* : *dc*, hinc etiam *ad* (AD) : DB = *cd* : BE, sed paulò ante erat AD : DB = *cd* : *be*; ergo etiam *cd* : *be* = *cd* : BE, atque adeò *be* = BE. Quod erat demonstrandum.

231. *Aliter.* Sint LN = AD = *ad*, PN = CD; *ac* pN = *cd*, & denique dividatur LN in Q & *q*, ut LN sit ad QN sicut B + X ad X, & LN ad *q*N ut B + Y ad Y, & ostendetur puncta P, *q*, item & *p*, Q coincidere. Nam quia (secundùm hypothesin) A : X = Y : B, erit A + X : A = B + Y : Y, id est AD : CD = LN : PN = LN : *q*N, ergo PN = *q*N atque adeo coincidunt puncta P & *q*. Item quia B : X = Y : A, & B + X : X = A + Y : A, erit (constr.) LN : QN (= *ad* : *cd*) = LN : *p*N, ac proinde etiam QN = *p*N; coincidunt ergo puncta *p*, Q. Hisce positis, & quia AD : DB (2.CD) = LN : 2.PN; & DB : 2.EB = LN : 2.QN; erit ex æquo AD : 2.EB = LN^2 : 4.PN.QN. Eodem argumento invenietur *ad* : 2.*eb* = LN^2 : 4.*p*N.*q*N, ergo invertendo erit ex æquo 2.*eb* : 2.EB = 4.*p*N.*q*N : 4.PN.QN, vel *eb* : EB = *p*N.*q*N : PN.QN : unde cum ostensum sit esse *p*N = QN & *q*N = PN, erit omninò *eb* = EB. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

232. Si loco alterutrius ex mediis X, Y sumatur corpus M medium proportionale inter A & B, atque adeo inter X, & Y, cum A sit ad X = Y : B; atque LN dividatur in R, ut tota LN sit ad RN sicut A + M ad A, celeritas initialis mobilis A erit ad celeritatem corpori B interventu medii M acquisitam, sicut LN^2 ad 4.RN^2. Atque adeò celeritas, quam acquiret corpus B interventu alterutrius X vel Y erit ad celeritatem, quam acquiret interventu medii M, sicut 4.PN.QN ad 4.RN^2, vel sicut PN.QN ad RN^2. Nam quia A + M : M = LN : RN, & A + M : A = B + M : M, erunt hoc

hoc casu ambæ PN, QN cum inter se, tum etiam RN æquales, unde cum generaliter sit $AD : 2EB = LN^2 : 4.PN.QN$, erit in hoc casu particulari celeritas corporis A, ad celeritatem ipsius B ab M acceptam $= LN^2 : 4.RN^2$, & quia (§. 231.) velocitas ipsius B ab alterutro X vel Y accepta, est ad celeritatem initialem corporis A, sicut $4.PN.QN$ ad LN^2; erit ex æquo celeritas corporis B ab alterutro X vel Y accepta, ad celeritatem ejusdem à corpore M acquisitam sicut $4.PN.QN$ ad $4.RN^2$ hoc est, sicut $PN.QN$ ad RN^2.

Corollarium II.

233. Quia (constr.) $PN : LN = A : A + X$, & $LN : RN = A + M : A$, erit ex æquo $PN : RN = A + M : A + X$. Similiter invenietur $QN : RN = A + M : A + Y$, ergo per compositionem rationum erit $PN.QN : RN^2 = (A + M)^2 : (A + X . A + Y) = AA + 2.AM + MM : AA + (X + Y). A + XY = AA + 2.A.M + AB : AA + (X + Y). A + AB = A + 2M + B : A + X + B$, nam $A.B = MM = XY$, adeoque unum alterius loco, ut factum est, substituere licet. Jam quia X, M & Y sunt in ratione continua, erit $X + Y$ major quam $2.M$ atque adeo $A + X + Y + B > A + 2M + B$; hinc erit $RN^2 > PN.QN$; unde cum (§. 232.) celeritas corporis B ab alterutro X vel Y accepta, sit ad ejusdem celeritatem a corpore M ipsi impressam, sicut $PN.QN$ ad RN^2, liquet hanc celeritatem illa perpetuo majorem esse. Imò hæc velocitas mobili B a corpore M collata major erit ea, quam idem B a corpore A celeritate AD ipsum impulisset, nam loco corporis X intelligi potest quodvis corpus; atque adeò unum ipsi A æquale, quod ab impellente A totam celeritatem (§. 227.) CD accipiet, adeò ut idem sit, sive mobile A cum sua celeritate AD immediate impingat in quiescens B, sive id impellat ope intermedii ipsi A æquali, cui totam suam celeritatem contulerit; unde cum generaliter ostensum sit, interventu cujusvis corporis X, diversi ab M, minorem corpori B velocitatem collatum iri quam a medio proportionali M inter extrema A, & B; sequitur necessario etiam corpus A alteri B minorem daturum esse celeritatem quam M, etiamsi immediate in id impingat. Atque hoc corollarium continet demonstrationem facilem Propositionis penultimæ tractatus *Hugenii* de Motu corporum ex Percussione.

COROLLARIUM III.

234. Hinc primum ex corporibus continue proportionalibus ultimo majorem celeritatem dabit per corpora quotcunque interposita continue proportionalia, quam si eidem quiescenti immediate occurrisset.

SCHOLION.

Fig. 54. 235. Ex præcedentibus jam facile elicietur regula determinandi velocitatem, quam ultimum corpus quiescens ex serie quotcunque continue proportionalium accipiet transmisso motu à primo in secundum, tertium, quartum &c. Primum corpus dicatur A, ejusque celeritas ab initio AD, ultimum V: dividatur celeritas initialis AD in puncto C, in reciproca ratione secundi corporis ad primum, vel, quod idem est, in ratione cujuslibet corporis in serie proportionalium ad corpus, quod illud in eadem serie proxime præcedit, ita ut AC ad CD sit in hac eadem ratione, deinde ratio totius AD ad duplam CD continuetur in tot terminis uno minore quot sunt seriei corporum proportionalium, quorum ultimus sit Q, dico hanc Q exponere celeritatem ultimo corpori V collatam ab omnibus præcedentibus. Adeoque si numerus terminorum fuerit $n+1$, celeritas initialis AD primi corporis erit ad Q celeritatem ultimo U acquisitam, sicut AD^n ad $(2CD)^n$, hinc habebitur $Q = (2CD)^n : AD^{n-1} = (2CD)^n$, sumta scilicet AD instar unitatis, quod hoc loco fieri licet.

236. *Exempl.* Sint centum corpora in continua ratione dupla, motusque primum incipiat à maximo, quæritur Q seu celeritas minimo V conferenda. Hoc casu erunt $AC = \frac{1}{3}$, et $CD = \frac{2}{3}$, atque adeo $(2.CD)^n = (\frac{4}{3})^{99}$, est enim $n = 99$. Igitur habemus $Q = (\frac{4}{3})^{99}$, & Log-us Q = 99. Log-um $\frac{4}{3}$; atqui Log-us $(4:3) = 0.1249388$ qui Logarithmus ductus in 99 dat 99. Log. $(4:3) = 12.3689412 =$ Log. Q, ergo Q = 2338520732310 quam proxime, nam hic numerus log-mo illi, cujus characteristica est 12. proxime convenit; atque adeo celeritas, quam corpus centesimum accipere debet, est ad celeritatem primi A ut 2338520732310 ad 1 proxime.

Sin vero motus a minimo incipiat, erit hujus celeritas ab initio ad velocitatem, quam centesimo & maximo dabit interpositis 98. reliquis continue proportionalibus, sicut numerus 27103713483146067 ad

ad unitatem proxime. Hugenius in postrema propositione tractatus supra (§. 233.) laudati numeros pro hisce casibus nostris minores exhibet, transscriptorum forte aut calculi lapsu.

PROPOSITIO XLIII. Theorema.

237. *Centrum gravitatis duorum corporum sphæricorum elasticorum sibi invicem oblique occurrentium, eadem directione & celeritate feretur post conflictum, quibus ferebatur ante concursum.* Fig. 55.

Globi elastici P, Q sibi mutuo occurrant in D celeritatibus propriis PD, QD, & post occursum resiliant celeritatibus propriis D*p*, D*q*, ita ut hæ lineæ eodem tempore æquabili motu absolvantur, quo rectæ PD, QD ante synodum; sintque puncta M & m centra gravitatis globorum in P & Q, item in *p*, *q* existentium; probandum est rectas MD & D*m* tum æquales, tum etiam in directum positas esse; quandoquidem MD exponit velocitatem & directionem centri gravitatis M ante conflictum, D*m* vero velocitatem & directionem centri communis gravitatis post collisionem. Sit D punctum contactus globorum, & BA recta jungens centra eorundem, quæ, ubi globi se mutuo contingunt, per punctum contactus transibunt; ex centris Globorum P, Q demissæ sint ad AB perpendiculares PA, QB, & ex M recta MC reliquis QB, AP parallela, quibus positis, manifestum est ex art. 29, motui juxta PD æquipollere laterales PA & AD, & motui QD laterales QB & BD. Jam quia motus juxta PA & QB paralleli sunt, globi quatenus motibus hisce agitantur, in se mutuo agere non possunt, sed soli motus juxta AD & BD, utpote directe contrarii, in casu conflictus considerandi veniunt reliquis tantisper sepositis & postea iterum resumendis. Porrò quia M est centrum gravitatis globorum in P & Q existentium, etiam C eorundem globorum in A & B positorum erit centrum gravitatis; adeoque factis Dc = CD, nec non ca = CA & *cb* = CB, erit (§. 225.) D*a* celeritas propria globi A, & D*b* celeritas alterius B, post collisionem in indefinita linea *ab*. Porro per *a* & *b* ductæ sint rectæ *ap* = AP, & *bq* = BQ ipsi AB normales, quo posito & quia in ipso conflictu motus juxta PA & QB, utpote paralleli, nullam mutationem subire potuerunt, hi motus post impulsum illibati sunt conservandi; atque adeo post congressum corpus P à puncto D recedet motu D*p* resultante ex lateralibus D*a* & *ap*, alterumque Q motu D*q* nascente ex lateralibus D*b* & *bq*. Verum

 quia

quia (constr.) $ca = CA$; $cb = CB$; $ap = AP$; & $bq = BQ$, figura *abqp* similis & æqualis erit figuræ alteri ABQP, atque adeo $cm = CM$: unde cum (constr.) etiam sit $Dc = CD$, triangulum *Dcm* simile & æquale erit triangulo DCM, atque adeo lineæ MD & *Dm* in directum positæ erunt, hinc centrum gravitatis globorum P, Q post conflictum eadem celeritate & directione quâ ante, progredietur. Quod erat demonstrandum.



DE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM

LIBER SECUNDUS.

DE CORPORIBUS FLUIDIS.

SECTIO I.

De Viribus Fluidorum à Gravitate.



SI corpora fluida cum duris & consistentibus in hoc conveniunt, quod extensa sunt & particulis seu moleculis duris componuntur; ab iisdem tamen differunt, quod moleculæ fluidorum non solum exilissimæ sunt eousque, ut omnem oculorum etiam microscopiis armatorum aciem fugiant, sed etiam disjunctæ & valde mobiles, quæ cuilibet corpori solido trajicienti facile cedere atque varie inter se agitari queunt: cum ex adverso dura corpora constent partibus sibi invicem varie implexis atque adeo ægre separandis, ita ut nulla particularum sensibiliter moveri possit, quin totum partium aggregatum, hoc est corporis Massa eundem motum participet.

238. Est igitur *Corpus Fluidum, cujus elementa* (§. 14.) *à vi quacunque in ea agente commoveri possunt quantumque tota fluidi Massa oculorum judicio quiescere videatur*, ut jam supra §. 25. dictum. Sic Aqua, Aer, Oleum, Hydrargyrus &c. sunt corpora fluida, item metalla fusa, quandiu in fluore sunt.

Adeoque distinctus fluidorum corporum conceptus summam involvit molecularum exilitatem, talemque earum configurationem, ut

ut par inde agilitas provenire queat. Et hisce specificis proprietatibus fluida distinguuntur à solidis in minutissimas itidem particulas discerptis, non tamen tantæ agilitatis nec parvitatis, ut eadem qua fluidi elementa inter se agitari queant facilitate. Sic frumenta in subtilissimum pollinem contrita in corpus fluidum ideo non abeunt, quia hujusmodi pollinis particulæ ad eam exilitatem non accedunt; nec proinde ad eam mobilitatem perveniunt quam fluidorum natura requirit.

239. Cum de fluidorum viribus agere suscipimus, non ea nobis est mens, ac si particularum seu elementorum figuras definiri atque digito, ut ita dicam, monstrari posse crederemus, nec proinde curiosius in has elementorum corporum figuras inquiram, quia hæ nimis forte variare solent quam ut commode redigi possint sub mathematicos conceptus; nil enim impedire existimo, quominus unius ejusdemque fluidi particulæ tam ratione magnitudinis, quam ratione figuræ, infinitis modis variare possint. Idcirco figurarum indagationem, quibus cujuslibet fluidi particulæ circumscriptæ esse debent, Physicis relinquam, mihique deinceps sufficiet nosse, figuras particularum cujusque fluidi, qualescunque eæ fuerint, mobilitati earum nihil officere ipso facto, cum particulæ sint (secundùm hypothesin) alicujus fluidi, id est summe mobiles.

240. Nec etiam ad institutum nostrum pertinet anxie disquirere, num vera sit illorum opinio, qui fluidis quibuslibet motum quendam, quem *intestinum* vocant, tribuunt, quo fluidi particulæ variis irregularibus motionibus ultro citroque cieri finguntur, ad distinctionem motus progressivi fluidi, quo tota ejus massa de loco in locum transfertur. Sic cum labitur amnis, motus quo aqua in alveo suo ad inferiora devolvitur, est progressivus; motus vero aquæ calidæ, id est internus motus ejus molecularum, vocatur motus intestinus: exemplum adduco aquæ calidæ, quia certo certius ejusmodi motu intestino particulæ ejus agitantur, etsi motus ipse in oculos non incurrit; atque adeo tota aquæ massa quiescere videtur. Num vero omnia omnino fluida tali motu intestino agitentur philosophis pariter, ut dixi, expendendum relinquam; nec enim animus mihi est Philosophicis controversiis me quoquo modo irretire.

241. Corpora fluida à liquidis differunt ut genus à specie, cum liquida quidem fluida sint, non tamen vice versa. Liquida enim sunt, quæ in volumine non nimium exiguo fluunt donec eorum superficies in situm horizontalem se composuerit; unde, quia hæc pro-

prie-

prietas non flammæ nec aëri aut ætheri competit; ideo hæc corpora tantum fluida, non vero liquida dicuntur. Nos in sequentibus etiam liquoribus fluidi nomen tribuemus, quia revera liquores sunt corpora fluida: idcirco

242. *Fluida homogenea*, seu *uniformiter gravia* sunt, quorum densitas per universam massam uniformis est, adeo ut pondera ipsorum absoluta massis eorum proportionalia sint. Talia sunt præterpropter omnes liquores nobis cogniti.

243. *Fluida heterogenea*; seu *difformiter gravia*, sunt, quorum densitas per universam fluidi massam non eadem est nec propterea pondera fluidi massis proportionantur. Tale fluidum est athmosphæra, cujus partes altiores, hoc est à terræ superficie remotiores rariores comperiuntur; etenim experimenta aëra in montium editiorum jugis rariorem produnt quam in vallibus. Variæ vero athmosphæræ densitates variis lineis exprimi possunt, atque hinc nascuntur,

244. *Scala densitatum* cujusque Fluidi heterogenei est figura mixtilinea, cujus ordinatæ horizonti parallelæ fluidi densitatem exponunt in planis illis, in quibus ordinatæ existunt. Idcirco axis scalæ, ordinatas ad angulos rectos excipiens, horizonti perpendicularis erit.

245. *Densitas media* cujusque fluidi heterogenei est densitas uniformis alicujus fluidi homogenei, quod in eadem altitudine cum fluido heterogeneo eandem pressuram exerere valet in subjectum sibi planum horizontale ac fluidum heterogeneum. Talis media densitas innotescit applicando aream scalæ densitatum ad ejus axem, seu fluidi altitudinem super plano, quod ejus pressuram subit.

246. *Scala pressionum* seu *gravitationum* liquoris heterogenei est figura, cujus ordinatæ exponunt gravitationes seu pressuras fluidi in plana horizontalia exercitas, in quibus ordinatæ positæ sunt, abscissæ vero ordinatis respondentes designant distantias planorum, quæ pressiones subeunt à suprema liquoris superficie. Scala pressionum etiam definiri posset, quòd sit quadratrix scalæ densitatum; quandoquidem postmodum (§. 258.) demonstrabitur areas scalæ densitatum homologis ordinatis scalæ gravitationum proportionales existere.

247. *Liquores in statu manente*, seu *in æquilibrio consistere* dicuntur, cum nulla liquoris pars vicinarum actione situ suo expellitur, sed omnes partes perfectum inter se æquilibrium servant.

248. Infinitesimæ plani cujusque aut etiam superficiei particulæ

gra-

gravitationem vel pressuram cujusvis liquoris subeuntes *puncta* deinceps à nobis compendii gratia nominabuntur.

Pressionis verò vel *gravitationis* nomine intelligimus impressionem, quam fluidum gravitate sua in sibi subjectum planum exerit. Idcirco, ut rem generaliter possimus tradere, prout in primo libro tantum non ubique id fecimus, fluida utcunque heterogenea esse concipimus, atque quænam pressiones atque effecta ab ejusmodi fluidis resultare debeant, generalibus theorematibus complectemur, ex quibus deinceps omnia derivari poterunt, quæ ad liquores homogeneos spectant.

CAPUT I.

De generalibus legibus gravitationis Liquorum in subjecta plana.

PROPOSITIO I. LEMMA.

249. *Pressiones, quas corpora quæcunque solida vel fluida in se invicem exercent, fiunt juxta directiones communi plano contingenti corpora perpendiculares, atque transeunt per contingentiæ punctum eorundem* Fig. 56. *corporum.*

Sit MN corpus quodcunque, in quod aliud corpus CD juxta directionem FC impingat; per commune contingentiæ punctum D utriusque corporis transeat planum AB, ambo corpora in hoc eodem puncto D tangens, quod ideo commune eorum contingentiæ punctum vocatur. Dico impressionem impellentis CD in patiens MN exeri tantum juxta directionem CE plano contingentiæ AB perpendicularem, quæ per commune utriusque corporis punctum contactus D transeat.

Demonstr. Producatur FC usque ad occursum H cum plano AB, & circa diametrum CH descriptum intelligatur parallelogrammum rectangulum CDHI, cujus latera CD, IH plano AB normalia & CI eidem æquidistans sunt. Jam (§. 39.) conatus seu pressio juxta CH æquipollet impressionibus juxta CD & CI. Verum, quia CI plano AB parallela est, nulla in planum istud impressio juxta hanc directionem exeri potest, sed duntaxat impressio juxta CD plano perpendicularem tota in hoc planum redundabit. Ergo impressio, quam corpus impellens C, in planum AB seu in corpus MN exerit

rit tantum fieri potest juxta directionem CD plano AB perpendicularem, quæ per punctum contactus D transit. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II. Theorema.

250. *Liquor vasi cuicunque inditus non potest in statu manenti consistere, priusquam ejus superficies situm horizontalem acquisiverit.* Fig. 57.

Sit vas BAC figuræ cujuscunque & quomodocunque positum; dico liquorem ei infusum HGIA non posse situm manentem habere, nisi superficies ejus HGIF horizontalis fuerit. Habeat enim hæc superficies in statu manenti positionem EGCF horizonti inclinatam: quo posito, quia liquidi moles GCIF plano horizontali HGIF imminens gravis est, atque in spatium GHEF defluere potest, nec quicquam adest quod hunc fluxum impedire queat, ea actu defluet spatium illud GHEF repletura; idcirco cum liquoris superficies GCE plano horizontali HGF inclinata est, non est in statu manenti, contra hypothesin.

Corollarium.

251. Hinc si universa terra Oceano circundata esset, nec in se ipsam converteretur, ejus superficies perfecte sphærica foret. Sed quia motu diurno circa centrum suum revolvitur, aquæ superficies sphærica non erit, sed figuram habebit sphæroidis latæ, quia aquæ partes quo propiores sunt æquatori, eo majorem habent conatum à centro recedendi, atque adeo minus graves sunt, quandoquidem conatus centrifugi tanto magis de corporum gravitate detrahunt quanto majores sunt. Ob hanc vero gravitatis inæqualitatem accidit, ut ad obtinendum partium æquilibrium, ad eandem ubique altitudinem aquæ pervenire nequeant, ut aliàs fieret, si terra motu illo diurno, ex quo conatus centrifugi partium aquæ resultant, careret, sed sub Æquatore altissima & in polis maxime depressa existat. Hinc est, quod Newtonus, Hugenius aliique telluris superficiei figuram alicujus sphæroidis assignarint, oriundæ ex revolutione alicujus Ellipseos circa axem minorem, existente axe majore diametro æquatoris terrestris. Sed de hisce suo loco sermo recurret.

PROPOSITIO III. THEOREMA.

252. *Partes æquales* (HI, IK) *cujuslibet plani horizontalis* (FG) *intra liquorem quemcunque* (DBCE) *in statu manenti consistentem, vasique, ut libet irregulari,* (ABC) *inditum, æquales pressiones subeunt ab imminente liquore* (DFGE). *Et partes minimæ laterum vasis* (LF, MG) *ad idem planum horizontale* (FG) *terminatæ easdem pariter pressiones ab incumbente liquore patientur juxta directiones* (FP, GQ) *iisdem partibus* (FL, GM) *perpendiculares, quas patiuntur æquales particulæ* (FR, GK) *plani horizontalis juxta directiones ipsis normales.*

Fig. 58.

I. Quoniam (secundùm hypothesin) liquor vasis est in statu manenti, superficies ejus DE (§. 251.) horizontalis ac proinde plano FG parallela erit, & remoto cogitatione liquore DFG plano FG incumbente, residui in vase FBCG superficies FG etiamnunc in statu manenti consistet, quia horizontalis est. Adeoque si, restituto quem cogitatione removimus liquore DFGH, pars aliqua IK plani FG minorem pressionem subiret quam contigua & æqualis particula HI, liquor in loco IK deberet attolli, aut deprimi, vel ad latera dextrorsum aut sinistrorsum deflecti sive alicubi condensari, quandoquidem vis minor majori semper cedere debet, & aquæ vel liquoris particulæ per naturam fluidi cedere possunt, atqui talia sine motu partium, quo unæ ab aliis situ suo pelluntur, contingere nequeunt, ergo liquor non maneret in statu manenti, contra hypothesin. Partes igitur HI, IK omnesque reliquæ æquales plani FG, æquales pressiones sustinent. Quod est primùm.

II. Sit planum LM alteri FG æquidistans, & (§. 250.) omnes ejus æquales particulæ NO, OM æquales itidem pressuras ab imminente liquore DLME subibunt. Idcirco liquor inter duo plana æquidistantia LM & FG, velut in prælo, fortiter constringitur & quidem viribus æqualibus in partes oppositas, scilicet à liquore incumbente DLME perpendiculariter deorsum, atque à reactione plani inferioris FG perpendiculariter in altum; nam quanta vi planum istud premitur, tanta vi in rem prementem reagit. Unde cum plana NO & IK æqualibus viribus in oppositas partes urgeantur, necesse est ut in quolibet plano NI vel OK tantam pressuram subeat quantam in NO vel IK, alioqui si minorem pateretur, ibi elaberetur per planum NI liquor ONIK contra hypothesin. Et quia ob-

con-

contiguitatem partium aquæ particulæ laterales LF & MG vasis pressuras subire debent æquales illis, quas subeunt plana NI vel OK, & hæc pressiones pares illis, quas plana NO, IK, &c. patiuntur, liquet pressuras liquoris DFGE in particulas laterales vasis FL & MG æquales esse pressionibus, quas ab eodem liquore patiuntur particulæ illis æquales HI, IK plani horizontalis FG, (§. 249.) juxta directiones FP, GQ particulis illis FL & GM perpendiculares, perinde ac particulæ HI & IK, &c. itidem perpendicularibus plano FG directionibus urgentur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV. Theorema.

253. *Pressiones seu Gravitationes cujuslibet liquoris homogenei in quæcunque plana horizontalia proportionales sunt altitudinibus liquoris super his planis.* Fig. 59.

Sit DE superficies liquoris DBCE vasi cuilibet ABC infusi, fundoque vasis BC horizontali, quantum opus est, protenso, demittatur ad eum perpendicularis ET, intelligatur insuper quodvis planum FG fundo BC & DE æquidistans, quod productum occurrat rectæ ET in puncto S. Pressiones liquoris in plana FG & BC exercitæ designentur per *pr*. FG & *pr*. BC, probari debet fore *pr*. FG : *pr*. BC = ES : ET. Nam ES est altitudo liquoris DFGE super plano FG, & ET altitudo liquoris super BC.

I. Sit ES alteri ET commensurabilis, & E*p* communis utriusque mensura tantæ magnitudinis, ut ducto per punctum *p* plano *dp*, intra spatium vasis D*de*E duci queat rectula *eo* parallela E*p* vel perpendicularis ipsis DE & *de*, quod semper fieri potest quantumvis irregulare & superius angustum esse queat ipsum vas ABC. Factis porro singulis *p*2*p*, 2*p*3*p*, &c. æqualibus ipsi E*p*, ductisque per singula divisionis puncta 2*p*, 3*p*, &c. planis 2*d*2*p*, 3*d*3*p*, &c. quibus positis, & quia puncto *e* primi strati liquoris imminet *eo*, hoc punctum *e* tantam pressuram sustinebit, quantum est pondus columnulæ *eo*, & (§. 252.) omnia reliqua plani *de* puncta pressionem patientur æqualem pressioni puncti *e*; punctum 2*f* in basi 2*d*2*e* secundi strati *e*2*d* patietur pressionem compositam ex pressione, qua punctum ejus supremum d urgetur, & ex pondere columnulæ *d*2*f* æqualis ipsi *oe*, atque adeo gravitatio liquoris in punctum 2*f* & omnia reliqua plani 2*d*2*e* erit dupla ipsius in plano *de*, & propterea æquivalet ponderi columnarum *oe* + *d*2*f*, hoc est E2*p*; simili argumento

 con-

conficietur pressionem liquoris in quodlibet punctum plani $3d3e$ æquivalere ponderi columnæ ipsi $E3p$ æqualis in altitudine; hinc pressiones seu gravitationes liquoris in plano FG & BC æquivalebunt columnis, quarum altitudines sunt æquales lineis ES & EF, ergo erit omnino *pr*. FG : *pr*. BC = ES : ET.

II. Sit ES alteri ET incommensurabilis, &, si fieri potest, ratio *pr*. FG ad *pr*. BC major quam ES ad ET, puta æqualis rationi ES : EX cujus consequens EX minor quam ET defectu XT, ex quo defectu auferri poterit quædam TV minor quam XT, ita ut EV commensurabilis fiat ipsi ES. Quo posito, per punctum V planum *b*V transire intelligatur, eritque pr. *bc* minor quàm *pr*. BC, cum EV minor sit quam ET, & pr. FG : pr. bc > pr. FG : pr. BC. Jam quia (constr.) EV commensurabilis est ipsi ES, erit per partem primam hujus, pr. FG : pr. bc = ES : EV, & (secundùm hypothesin) est pr. FG : pr. BC = ES : EX, ergo ES : EV > ES : EX, atque adeo EX major quam EV, contra hypothesin. Adeoque nequit pr. FG : pr. BC major esse quam ES : ET.

Sit igitur ratio pr. FG : pr. BC minor quam ES : ET, scilicet æqualis cuidam ES : EY cujus consequens EY major quam ET, excessu TY, auferatur iterum ex hac TY portio YZ talis ut residua EZ alteri ES commensurabilis evadat, per Z transire fingatur planum $Z\kappa\beta$ fundo BC parallelum in quo $\kappa\beta$ instar fundi nunc considerabimus. Unde quia EZ (constr.) major est quam AT, erit pr. $\beta\kappa$ > pr. BC, adeoque pr. FG : pr. $\beta\kappa$ < pr. FG : pr. BC; & quia (constr.) EZ commensurabilis est ipsi ES, erit (num. 1 hujus) pr. FG : pr. $\beta\kappa$ = ES : EZ, ex hypothesi verò est pr. FG : pr. BC = ES : EY, ergo ES : EZ < ES : EY, eritque adeo EZ major quam EY, iterum contra hypothesin, nam EZ necessario minor erat quam EY, quandoquidem ex hac EY ablata ZY relinquebatur EZ; nequit ergo ratio pr. FG : pr. BC minor esse quam ratio ES : ET & quia nec major, sequitur pr. FG : pr. BC = ES : ET. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

254. Hinc ultrò sequitur, quod quælibet portio FM plani cujuslibet horizontalis FG ab incumbente liquore DFGE tantam pressionem subire debeat, quantam sustineret à columna ejusdem liquoris portioni illi FM ad altitudinem ES perpendiculariter imminentis. Nam, quod in propositione universaliter ostensum est, nulla habita

bità ratione figuræ vasis, idem valet etiam de vasis cylindricis, in quibus illicò liquet gravitationes liquoris altitudinibus ejus proportionales esse. Unde, si altitudines liquoris super plano aliquo horizontali in vase prismatico & in vase irregulari utrinque æquales sint, æquales utriusque plani partes æquales pressiones sustinebunt. At in vase prismatico quælibet cujusque horizontalis plani portio sustinet pondus totius columnæ ipsi perpendiculariter imminentis; atque adeo portio quæcunque FM plani FG tantum onus sustinebit, quantum est pondus alicujus prismatis, cujus basis FM & altitudo ES. Adeoque totum planum FG sustinebit onus æquale massæ liquoris in prisma conformatæ, quæ planum FG pro basi habeat & ES pro altitudine.

Corollarium II.

255. Et quia supra (§. 252.) demonstratum est, æquales particulas quam minimas FM & FL plani FG & lateris vasis, æquales pressiones sustinere, unamquamque juxta directionem sibi normalem, scilicet FM verticaliter deorsum, & FL juxta FR superficiei BFD in F perpendicularem, hinc sequitur *quamlibet particulam minimam in vasorum lateribus pressuram subire debere ab incumbente liquore æqualem ponderi columnæ, cujus basis est particula, quæ pressionem sustinet, & altitudo est distantia particulæ à liquoris superficie.*

Atque hæc est generalis hydrostaticæ regula ex suis genuinis principiis eruta, quæ etsi tantum in liquoribus homogeneis valere videtur, sese tamen ad quoscunque liquores, etiam heterogeneos, extendere in sequentibus probabitur.

Scholion.

256. Ex his ergo liquet, quod liquores homogenei gravitant in sua subjecta plana pro ratione altitudinis eorum super planis, in quæ gravitant. Ex qua fluidorum proprietate sequens nascitur paradoxum; quod scilicet parva liquoris cujusque copia tantundem in sibi subjectum planum gravitet, quantum ejusdem liquoris massa centies imo millies major in eadem altitudine. Etenim si vasi acuminato BAC, cujus basis BC notabilis sit amplitudinis, aqua infundatur pertingens usque in A, & per Corollarium I. hujus, aqua tantam pressionem in fundum BC exeret, quantam exereret cylindrus aqueus Fig. 60.

IBCK in eadem altitudine cum vasis liquore. Idcirco pauxilla aqua in tubo acuminato gracilique ABC tantum effectum præstare potest, quantum aquæ moles centuplo, imo pluries, major in eadem altitudine; quod haud dubie non paucis paradoxum videbitur. Ejus tamen veritas ipsa experientia comprobata est, atque deinceps probari potest; nam si fundo vasis stricti ABC orbiculus *a*BC*f* inditus sit vasi tam accurate quadrans, ut nullas rimas relinquat, per quas infusa aqua infra orbiculum transire queat, in centro Q affixum habens filum QM quo attolli possit, cujus fili alterum caput stateræ MDO annexum sit in M; ex altera bilancis parte applicetur pondus P eousque augendum minuendumve dum orbiculus B*f* nonnihil attollere incipiat stateram MO eam in partem flectendo, cui pondus appensum est; reperieturque hoc pondus P orbiculum paulisper attollere valens satis accurate æquari ponderi cylindri aquei BIKC, existentibus jugi brachiis DM, DO æqualibus. Unde cum pondus P tantillo majus esse debeat resistentia, quam in parte opposita superare potest, & hæc resistentia sit ipsa paucæ aquæ ABC gravitatio in orbiculum *a*BC*f*, omninò concludi debet hanc aquæ ABC gravitationem æquivalere gravitationi cylindri aquei I*af*K.

257. Sed inquies forte, si aqua ABC tantam gravitationem in suam basim exerceret, sequeretur fore, ut vas cum infusa aqua tantum ponderare debeat, quantum cylindrus aqueus IC auctus pondere vasis. Nam vas cum infusa aqua lanci impositum atque erecto situ detentum tantum ponderare debet, quanta vi lancem premet; sed lancem urgebit ea vi, qua basis vasis ab interno liquore urgetur aucta pondere vasis, hoc est pondere cylindri KB & vasis simul: interim tamen, si experimentum capiatur, comperietur semper pondus totius non fore majus quam infusæ aquæ & vasis pondera simul sumta, atque adeo regula nostra hydrostatica phænomenis adversari videtur. Sed objectio falsæ innititur hypothesi, quasi liquoris ABC in basin gravitatio etiam tota redundare atque exeri debeat in libræ lancem; quod tamen est falsum, nam si fundus BC urgetur onere IBCK à solo liquore ABC etiam latera tubi acuminati BRA & CSA in altum prementur, nam unumquodque horum laterum punctum tanta vi premitur (§. 255.) quantum est pondus filamenti aquæ æqualis distantiæ puncti ab aquæ superficie, juxta directionem superficiei vasis perpendicularem, adeoque applicando ea, quæ supra (§. 81.) generaliter & in abstracto ostensa sunt, casui præsenti, comperietur prædicta illa latera BRA, CSA vel potius inter-

ternam tubi acuminati superficiem convexam, tanta vi à liquore verticaliter in altum agi, quantum est pondus aquæ illius, qua cylindrus IC aquam in tubo ABC excedit. Unde, quia latera vasis & fundus cohærent, ea sola vis in lancem libræ MO redundare potest, quâ gravitatio aquæ ABC in basin BC excedit vim attollere conantem latera BRA & CSA vasis ABC ab aquæ pressionibus provenientem, aucta pondere vasis; vis vero illa, seu excessus cylindri IC supra massam aquæ, quæ modo nominatam vim attollentem exponit, est pondus solius aquæ in tubo acuminato ABC, ergo vis, qua lanx deprimi atque urgeri debet, est solum pondus aquæ ABC auctum pondere vasis, prorsus ut experientia id manifestat. Idcirco tantum abest, ut objectio ab experientia petita vim propositionis nostræ quicquam infringat, ut eam potius egregie confirmet.

PROPOSITIO V. Theorema.

258. *Gravitationes quorumcunque liquorum in subjecta plana horizontalia, sunt areis homologis in scala densitatum vel etiam ordinatis scalæ pressionis liquorum proportionales.* Fig. 61.

Sit vas quodcunque irregulare ABC liquoris heterogenei plenum usque ad DE, & circa axem ET superficiei liquoris DE fundoque BC perpendicularem, atque adeò fluidi altitudinem super fundo designantem, extructæ sint curvæ HKN & EIX, quarum illa sit scala densitatum liquoris, utpote cujus ordinatæ EH, $3p3h$, SK, TN densitates liquoris exponunt in illis planis, in quibus ordinatæ reperiuntur, hæc vero EIX scala pressionis liquoris, cujus scilicet ordinatæ $3p3q$, SI, &c. gravitationes liquoris denotant in plana $3d3e$, FG, &c. Ac denique area EHKNT applicata ad ejus altitudinem ET præbet mediam densitatem TV fluidi heterogenei. Ordinatæ verò scalæ gravitationum EIX (§. 246.) areis homologis scalæ densitatum HKN proportionales sunt, ultimaque TX toti axi AT æqualis esse ponitur. Quibus intellectis probandum est, fore gravitationem liquoris DFGE in planum FG ad gravitationem liquoris DBCE in fundum BC, ut area ESKH ad aream ETNKH, vel sicut SI ad TX, &c.

Vasis liquor divisus intelligatur, ut in præcedenti, in sua strata horizontalia æque alta quidem omnia, sed infinitesimæ altitudinis, per plana de, $2d2e$, $3d3e$, &c. fundo BC æquidistantia. Quia igitur cujusque strati altitudo insensibilis seu indefinite parva est, den-

densitas liquoris per totum stratum tanquam uniformis spectari potest, scilicet EH significabit densitatem primi strati *de*ED, ordinata *ph* densitatem uniformem secundi 2d2ed, atque ita porrò de reliquis. Jam puncto e primi strati perpendiculariter imminet columnula seu filamentum e o, ejusque adeò pondus sustinebit: atqui pondus ipsius *e o* (§. 33.) est ut ejus volumen & densitas seu gravitas specifica conjunctim, hoc est $= eo. EH = Ep. EH$ seu $=$ rec-lo ω areæ SHK inscriptum ordinatæ EH adjacens, eademque est pressio, quam subeunt omnia reliqua puncta plani *de;* pressio verò, quam sustinebunt puncta baseos *2d2e* secundi strati *2d2ed*, erit aggregatum ponderum filamenti cujusdam secundi strati, & æque alti filamenti *eo* in primo, quorum hoc, ut modo dictum, exponitur rec-lo ω, illud verò rec-lo 2ω seu $p2p.ph$: atque adeò erit talis pressio in *2d2e*, $= \omega + 2\omega$. Eodem argumento conficietur gravitationem liquoris in tertium planum *3d3e* exponi aggregato rectangulorum $\omega + 2\omega + 3\omega$; atque adeo pressio, quam plani FG puncta sustinebunt, exponetur omnibus rectangulis $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega$ quæ areæ ESKH inscripta sunt, atque ob infinitesimam cujusque altitudinem in hanc aream evanescunt, ita ut loco aggregati omnium area ipsa ESKH intelligenda sit, ac propterea pressio, quam planum FG à liquore incumbente subire debet, exponitur area homologa ESKH, & gravitatis liquoris in fundum BC per aream ETNKH; est ergo omnino *pr*. FG : *pr*. BC = ESKH : ETNKH = SI : TX per §. 246. Quæ erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

259. Hinc pressio, quam particula quævis FR plani FG ab imminenti liquore patitur, æquivalet ponderi absoluto massæ liquoris cujusdam homogenei, cujus densitas æqualis sit densitati mediæ TV liquoris heterogenei, volumen vero prisma rectum super basi FR & altitudine æquali SI homologæ ordinatæ scalæ pressionum SIX. Nam, juxta Propositionem præsentem, pressio, quam subit particula FR, exponi debet facto ex area SEHK in particulam FR plani FG; & (secundùm hypothesin) SEHK : TEHKN = SI : TX = SI. TV : TX. TV, atque (§. 245.) area ETNKH = ET. TV, cum ipsa TV seu media liquoris densitas sit ea, quæ oritur applicando dictam aream ad altitudinem ET, atque adeò facta, uti posthac semper factum supponemus, TX æquali ET, etiam rectangulum TX. TV

areæ

areæ ETNKH æquetur; reperietur rectangulum SI.TV ubique æquale homologæ areæ ESKH, & factum ex hac area in FR, exponens gravitationem seu pressionem in hanc particulam, erit æquale facto SI.TV.FR, quod designat prisma, cujus basis FR est planum pressionem sustinens; altitudo verò SI ordinata scalæ gravitationum, ductum in mediam densitatem TV liquoris heterogenei: atqui (§. 33.) prisma SI.FR ductum in TV exponit pondus liquoris homogenei, cujus densitas est TV & volumen ipsum prisma SI.FR; ergo particula FR plani FG ab incumbente liquore heterogeneo pressionem subit æqualem ponderi prismatis fluidi, cujus basis sit ipsa particula pressionem sustinens, altitudo ordinata homologa SI scalæ pressionum, & densitas uniformis TV media densitas liquoris heterogenei.

Corollarium II.

260. Unde, quia æquales & minimæ particulæ lateris FL & contigua FR in plano horizontali FG (§. 252.) æquales ab imminente liquore heterogeneo pressiones sustinent, quælibet, juxta directionem ipsi perpendicularem, etiam FL pressionem subibit æqualem ponderi prismatis liquidi, cujus basis sit particula hæc ipsa FL fluidi impressionem excipiens; altitudo vero SI ordinata homologa scalæ pressionum & denique TV media densitas liquoris heterogenei.

Corollarium III.

261. Si liquor est homogeneus, cujus densitas sit HE scala densitatum fiet recta axi ET parallela per punctum H ducta, eritque adeo hoc casu TV = EH, & curva EIX mutabitur in lineam rectam angulum semirectum cum axe ET continentem; adeò ut iterum hinc liqueat, cujusque liquoris homogenei gravitationes altitudinibus liquoris super planis, quæ pressiones subeunt, proportionales esse. Nam in triangulo rectilineo ETX ordinatæ SI, TX, quæ gravitationes liquoris in plana FG, BC significant, abscissis ES, ET proportionales erunt existente linea EIX recta, qualem nunc esse supponemus, ne pro hoc casu particulari novum schema delineare necessum habeamus.

COROLLARIUM IV.

262. Sed si liquores homogenei diversæ densitatis vel gravitatis specificæ inter se conferuntur, gravitationes sunt in composita ratione densitatum & altitudinem; adeoque si in syphonis ABd cru-
Fig. 62. re ABC insit liquor DC cujus densitas uniformis sit EH, & altitudo super fundum æqualis HN; alteri verò cruri *ab* insit liquor *dt* densitatis *eh* vel *nc* ad altitudinum *ce* in crure assurgens, erit hujus liquoris gravitatio exprimenda rectangulo *he.et*, & liquoris DEC gravitatio exponi debet rectangulo EH.HN, adeoque, si tubi per horizontalem *b*B communicantes, atque rectangula EH.HN, *he.et* æqualia fuerint, liquores in æquilibrio consistent; quod proinde continget, ubi altitudines liquoris EC, *ec* densitatibus seu (§. 33.) gravitatibus specificis *he*, HE fuerint reciproce proportionales.

CAPUT II.

De gravitationibus Liquorum in Vasorum latera, & de Tuborum firmitatibus requisitis ad perferendas liquorum pressiones.

IN Capite proxime antecedenti eas solùm gravitationes liquorum contemplati sumus, quæ in plana horizontalia exeruntur; in hoc verò examinandæ veniunt pressiones liquorum laterales, quibus parietes seu spondæ vasorum afficiuntur. Talis enim indago præbebit regulam pro definiendis tuborum firmitatibus ad resistendum aquæ pressionibus & viribus, quibus liquores vasorum latera ab invicem diducere conantur.

PROPOSITIO VI. THEOREMA.

263. *Vasis vel tubi* EAQP *ex utraque parte* ETPS *&* AYQV *apertis & liquori* βαθδ *immissi usque ad* ETP, *superficies externa & convexa ab ambiente liquore eadem vi introrsum versus axem premetur, qua cava vasis superficies extrorsum urgetur ab interno vasis li-*
Fig. 63. *quore.*

Nam si loco vasis EAQP intelligatur moles liquoris ejusdem constitutionis cum liquore ambiente, ejusdemque figuræ, magnitudinis

dinis & positionis cum vase; quia (secundùm hypothesin) omnia sunt in statu manenti, massæ liquidæ EAQP superficies externa eadem vi ab ambiente liquore *bab* urgebitur, quâ superficies ejus cava à liquore EAYQP; alioqui, si alterutra pressio alteri prævaleret, partes liquoris ad motum concitarentur, nec proinde aqua vel liquor foret in statu manenti, contra hypothesin. Jam eandem impressionem exercebit liquor ambiens in superficiem vasis rigidam convexam, quàm in similem æqualem & similiter positam superficiem aquæ EAYQP; ac pariter hic liquor vel aqua in suam cavam superficiem eandem impressionem exseret, quam exsereret in similem & æqualem superficiem cavam, sed rigidam vasis. Ergo externa & interna vasis superficies à liquore ambiente & interno, in vasis cavitate existente, æqualibus viribus in oppositas partes, juxta directiones superficiei vel superficiebus perpendiculares, urgentur. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII. Theorema.

264. *Si Prisma rectum* NEABL *terminatum superficie curva* NCEBL, *rectangulo* NLBC *& duabus figuris similibus ac æqualibus quibuscunque* BAC, LEN, *cujuslibet liquoris heterogenei plenum sit, & planum* cba *basi* CAB *parallelum, ab eadem distet intervallo* Aa, *insensibili respectu totius liquoris altitudinis* EA *vel* MD. *Superficies cava* CcaABb *& rectangulum* BCcb *viribus æqualibus in partes directe oppositas prementur; ipsaque potentia, qua superficies & rectangulum afficiuntur, æquabitur ponderi prismatis liquidi, cujus basis est rectangulum* BbcC, *& altitudo ordinata* af *scalæ gravitationum* EZ*a* *liquoris heterogenei, densitas verò uniformis* A*ω* *eadem cum media densitate ejusdem liquoris heterogenei.* Fig. 63.

Singula curvæ *cab* puncta eandem pressionem sustinent, æqualem (§. 260.) scilicet ponderi filamenti liquoris homogenei, cujus altitudo est *af* ordinata scalæ gravitationum, & densitas uniformis recta A*ω*, quæ liquoris heterogenei mediam densitatem repræsentat; & singula puncta curvæ CAB pressionem subeunt æqualem ponderi (§. 260.) filamenti ejusdem ac modò liquoris homogenei, cujus densitas uniformis sit iterum A*ω*, altitudo verò A*α* homologa ordinata scalæ pressionum. Verum, quia differentia *αg* ordinatarum *fa*, *α*A (secundùm hypothesin) insensibilis est atque adeo contemnenda præ his ordinatis, singula puncta superficiei cavæ C*a*B una eademque

 po-

potentia, quam exponit pondus filamenti liquidi altitudinis *af* vel *Aa* & densitatis *Aa* affici censeri debent, adeoque impressio, quam à fluido vasi indito patietur dicta superficies curva & cylindrica (§. 63.) æquivalet pressioni, quam subiret rectangulum BC*cb*, si etiam singulis ejus punctis potentia *af* applicata esset, atque gravitatio in hoc rectangulum est ut *af*. BC. B*b*, vel *af*. BC. A*a*, ductum in A*α*, cum pondus cujusque filamenti *af* sit ut hoc filamentum, tanquam volumen, ductum in densitatem seu specificam gravitatem A*α*. Atqui solidum *af*. BC. Bb ductum in A*α* denotat (§. 33.) pondus massæ fluidæ solido isti quoad volumen æquali, cujus uniformis densitas æquetur mediæ densitati A*α* liquoris nostri heterogenei. Ergo superficies cava C*a*B & rectangulum C*b* æquali vi in oppositas partes urgentur, & tanta quantum est pondus prismatis liquoris homogenei, cujus prismatis basis sit ipsum rec-lum B*c* superficiem curvam C*a*B subtendens, altitudo verò *af* ordinata scalæ gravitationem EZ*α*; & liquoris homogenei densitas sit media densitas A*α* liquoris heterogenei. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

265. Vires, quibus altera superficies cava C*cqyb*B & rectangulum ipsam subtendens CBb in oppositas partes urgentur, etiam æquales erunt, si toti prismati EAQP idem liquor heterogeneus inditus fuerit, utpote quæ vires exponuntur una eademque re, scilicet pondere prismatis liquidi basin rectangulam CBb & altitudinem *af* habentis, cujus densitas uniformis eadem est ac prius, media densitas A*α* fluidi heterogenei.

COROLLARIUM II.

266. Propterea gravitatio liquoris heterogenei in totam superficiem cavam CNEABL vel in rec-lum NCBL, item in superficiem NCVQPTLB & idem rectangulum NCBL æquivalebit ponderi prismatis recti & liquidi, cujus basis sit area seu trilineum EZ*α*AE altitudo CB, densitasque uniformis A*α*.

Nam si altitudo AE vasis in innumeras particulas indefinite parvas qualis A*a* divisa, & per singula divisionum puncta *a* plana horizonti parallela, quale *acqb*, ducta intelligantur, per art. 264. quælibet superficiecula cava *c*A*b* vel *c*Q*b* & rec-lum CB*b* pressionem subibunt

bunt æqualem ponderi liquoris homogenei, cujus volumen sit parallelepipedum seu prisma rectum, cujus basis rec-lum CB*b* ac altitudo *af*, scilicet homologa ordinata scalæ pressionum EZ*α*, & cujus liquoris homogenei densitas sit A*ω* par mediæ densitati liquoris heterogenei vasis EQ vel ECB, atque pondus liquoris homogenei sub dicto volumine (§. 33.) exponitur facto & volumine in densitatem liquoris, quæ est A*ω*, seu media densitas liquoris heterogenei, hoc est per *af*. BC. Dd. A*ω*, = A*ω*. BC. rec-lum *f*A; & pressio omnium superficiecularum C*a*B vel omnium C*q*B, quæ in tota CNELB, vel in tota CNPLB continentur, exponetur per factum ex A*ω*. BC in omnia rec-la *f*A, quæ areæ EZ*α*A inscribi possunt, vel quia hæc rec-la areæ inscripta in hanc ipsam aream desinunt, per factum ex A*ω*. BC in aream EZ*α*A. Atqui hoc factum (§. 33.) æquivalet ponderi quam habet massa liquoris homogenei, cujus densitas est A*ω* & volumen est prisma ex basi EZ*α*A & altitudine BC. Ergo etiam pressio liquoris heterogenei in superficiem curvam CNELB, vel in CNPLBQ æquivalet ponderi ejusdem liquoris homogenei massæ.

267. Zonæ vero C*cab*B vel C*cqb*B, quorum communis altitudo A*a* nunc ponatur finitæ magnitudinis, pressionem subibunt exponendam pondere prismatis liquidi, cujus basis sit trapezium vel quadrilineum *afα*A, altitudo BC, & densitas uniformis A*ω*.

Corollarium III.

268. Unde si planum EMDA rectangulo NCBL in medio MD occurrat ad angulos rectos, in hoc plano reperietur media directio pressionum, quas singula puncta superficierum NAL & NQL subeunt à liquore heterogeneo, cum in dicto plano EMDA media sit directio pressionum, quas singula puncta rectanguli NCBL ab eodem in vase liquore heterogeneo sustinent, & pressiones hujus liquoris in superficies curvas NAL & NQL eædem sint cum pressione, quam sustinere debet rectangulum NCBL. Idcirco, si per centrum gravitatis areæ EZ*α*A planum rec-lo NB perpendiculare ductum intelligatur, cujus & plani EMDA prolongati communis sectio sit ZK, hæc KZ (§. 54.) erit media directio gravitationum liquoris in superficiem cavam NAL. Et punctum K vocari nunc potest *Centrum pressionum* vel *gravitationum* liquoris heterogenei.

Corollarium IV.

269. Hinc liquoris heterogenei pressio lateralis, quam sustinent superficies cavæ NAL vel NQL aut etiam rec-lum æquealtum CBL, est ad pondus absolutum liquoris heterogenei NLBCE, sicut factum ex prismate recto, cujus basis est figura EZαA, & altitudo BC in Aα ad factum ex prismate NEABL in Aα, vel omissa hac Aα, velut prisma illud ex EZαA in BC ad hoc prisma NEABL. Nam (§. 266.) prisma EZαA.BC ductum in Aα significat pressionem, quam superficies curva CEB vel CQPB ab interno liquore heterogeneo patitur, & prisma NEABL ductum in eandem Aα (§§. 245. & 33.) significat pondus absolutum liquoris heterogenei sub volumine NEABL. Propterea, si area AαZE fuerit ad bilineum BACB, basin prismatis seu vasis NEAB, sicut AE ad BC, pressio lateralis, quam superficies cava NAL vel NQL sive rectangulum NCB subeunt, æquabitur ponderi absoluto massæ liquoris heterogenei NEAB; & pressio illa lateralis hoc pondere absoluto major minorve existet, prout ratio trilinei EZαA ad bilineum BACB major aut minor fuerit ratione AE ad BC.

Corollarium V.

270. Adeoque, si vas nostrum ponatur esse tubus SAYPQ, in quo rectangulum SVYT sit maxima sectio basi AYQV recta, duæ partes superficiei cavæ SEAT & SPQT, rectangulo SVYT adjacentes, *maximum* presſionem à liquore heterogeneo, tubo indito, patientur, atque adeò hic liquor, recensitas tubi partes à se invicem avellere conans, *maximam* impressionem in lineas SV & TY, in quibus duæ partes SEAT & SPQT sibi invicem adhærent, exseret; adeò ut, ni tubus satis firmus sit, qui liquoris pressionibus resistere valeat, in loco infimo linearum SV vel TY rumpi, vel saltem rimis pertundi debeat à liquoris pressurâ. Nam quia factum EZαA.VY.Aα exponit pressuram, quam semitubus SAT vel SQT à latere subit, & propter maximum rectangulum SVYT, basis ejus VT major est basi CB cujuslibet alius rectanguli NCBL, ultrò liquet veritas asserti.

Co-

COROLLARIUM VI.

271. Si ergo semel constiterit juxta quam proportionem procedant firmitates tuborum varias crassities habentium, ex collatione harum firmitatum cum liquorum gravitationibus innotescent facili negotio crassities tubi seu spissitudo materiæ, ex qua tubus paratus est, quæ requiritur ad id, ut tubus citra sui rupturam liquoris ei inditi pressionem perferre possit. Firmitatum vero ratio, quibus duo diversi tubi pollent, demonstrabitur in sequenti propositione.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA.

272. *Resistentiæ seu firmitates tuborum sunt in composita ratione ex ratione tenacitatis materiæ unius ad tenacitatem materiæ alterius tubi, ex ratione crassitiei ad crassitiem, & denique ex altitudinis tubi unius ratione ad altitudinem alterius.* Fig. 64.

Sit tubus, cujus orificium figura interior AVQY, crassities materiæ, ex qua tubus paratus est, VV vel AA aut QQ, & altitudo tubi V*u* seu Y*y*; erunt rectangula *u*VV & *y*YY partes, in quibus semitubi *u*A*y* & *u*Q*y* à se invicem avellendi juxta directiones VF & YF à potentiis in contrarias partes agentibus, sibi mutuo adhærent. Jam quia tot vinculis semitubi conjunguntur, quot sunt puncta physica in rectangulis illis uVV & yYY, manifestum est resistentiam tubi æqualem esse vi requisitæ ad omnia vincula seu fibras dilacerandas, atqui vis ejusmodi seu resistentia tubi est ut vis, qua unum vinculum seu una fibra rumpi potest & numerus fibrarum conjunctim; vis verò, qua opus est ad rumpendum unam fibram, est nobis tenacitas materiæ tubi vel saltem huic tenacitati proportionalis; numerus verò fibrarum est ut summa rectangulorum *u*VV & *y*YY, ergo vocando tenacitatem materiæ tubi T, erit ejusdem tubi resistentia sicut factum ex T in duplum rectangulum *u*VV, hoc est ut 2.T.VV.V*u*, vel etiam ut 2.A.C.T, vocando altitudinem tubi V*u*, A & crassitiem materiæ seu VV vel YY, C. Sic etiam in alio tubo, cujus firmitas, crassities materiæ ejusdemque tenacitas, ac denique tubi altitudo dicantur, *f*, *c*, *t* & *a*, & F indicet pariter firmitatem primi tubi, erit *f* ut 2*act*, & cum paulo ante fuerit F ut 2ACT erit omnino $F:f = TCA:tca$. Quod erat demonstrandum.

Co-

COROLLARIUM I.

273. Hinc figuras 63 & 64, junctim inspiciendo, quia (§. 267.) pressio liquoris heterogenei, quæ in partes *uAy* & *uQy* exseritur, est *afa*A. VY. A*u*, hæc pressio etiam erit = AMDS, nominando altitudinem zonæ *qua* ABQ, quæ est A*a* ut supra, A, quadrilineum *afa*A = A. M, diametrum VY vel AQ = D. adeoque pr. *uAy* + pr. *uQy* = 2AMDS, existente A*u* = S. Ponendo igitur liquoris pressionem in zonam aAQq præcise æqualem esse ejus firmitati, seu F = pr. *uAy* + pr. *uQy*, erit (§. 272.) 2. TOA = 2. AMDS, vel CT = MDS, & in alio tubo *ct* = *mds*, indicando similes res per similes litteras in utroque tubo majusculis in primo, & minusculis in altero. Ergo CT : *ct* = MDS : *mds*.

COROLLARIUM II.

274. Habeant insuper tubi nostri orificia circularia, atque contineant liquores homogeneos, eritque eo casu linea EZ*a* recta angulum semirectum continens cum EA, adeo ut sit *af* = E*a*, A*u* verò, quæ dicta est S, designat densitatem seu gravitatem specificam liquoris, & M erit E*i* bisecta scilicet A*a* in *i*; quandoquidem M. A*a* = *afa*A, & hoc casu hoc quadrilineum abit in trapezium æquale rectangulo sub E*i* & A*a*. Hisce positis analogia corollarii præcedentis transformabitur in sequentes I°. C : *c* = (M. S. D : T) : (*m. s. d* : *t.*). Hoc est, crassities materiæ in ambobus tubis firmitates habentibus liquorum pressionibus æquipollentes, sunt ut facta ex altitudinibus liquorum mediis & gravitatibus eorundem specificis in diametros orificiorum applicata ad tenacitatem materiæ, ex qua tubi fabrefacti sunt.

275. Adeoque si liquores ejusdem speciei & tubi ex eadem materia facti fuerint, crassities tuborum æqualiter firmorum erunt in composita ratione altitudinum, liquorum, & diametrorum tuborum, hoc est in ratione rectangulorum per axem tuborum.

276. II°. T : *t* = (M. S. D : C) : (*m. s. d* : *c*). Hoc est tenacitates materiæ tuborum æqualis roboris, sunt ut facta ex altitudinibus liquorum mediis & gravitatibus eorum specificis in diametros tuborum applicata ad crassities materiæ, ex qua tubi parati sunt.

SCHO-

Scholion.

227. Ut usus præcedentium regularum innotescat, unum atque alterum exemplum afferre libet. *Exempl.* I. Ad Calcem Operis nonnullorum Academiæ Reg. Paris. Scientiarum sociorum, quod inscribitur, *Divers Ouvrages de Mathematique & de Physique de Messieurs de l'Academie Royale des sciences*, extat dissertatiuncula Celeb. Olai Romeri Dani De Crassitie & Viribus tuborum in aquæductibus, secundum diversas fontium altitudines, diversasque tuborum diametros, in qua dissertatione fol. 517. relatum legitur, tubum plumbeum diametri 16 pollicum, cum crassitie $6\frac{1}{2}$ linearum (linea ipsi est 12^a. pollicis vel 144^a. pedis Parisiensis pars) pressioni aquæ 50 pedum in altitudine sufficienter restitisse in experimento quodam Versaliis olim sumpto, qua observatione posita, quærit Autor qualis crassities alii tubo plumbeo tribui debeat orificium habenti 10 digitorum, ut aquæ pressionem 40 pedum perferre queat. Canon articuli superioris 275 quæstioni illico satisfaciet, cum hoc casu crassities sint ut rectangula per axem; nam in tubo observationis multiplicando aquæ altitudinem 50 pedum in diametrum tubi 16 pollicum, productum 800 denotat rectangulum per axem in tubo observationis, & ducendo altitudinem aquæ 40 pedum in diametrum 10 pollicum alterius tubi proveniet 400 pro rectangulo per axem in hoc tubo, quod cum illius 800 tantum dimidium sit, hujus tubi crassities juxta canonem tantum dimidia erit crassitiei in tubo observationis, quæ erat $6\frac{1}{2}$ linearum; ergo quæsita alterius tubi crassities erit tantum $3\frac{1}{4}$ linearum, loco $4\frac{1}{2}$ lin. circiter, quam Dn. Romerus repererat, quia resistentias tuborum statuit esse in duplicata ratione crassitierum cæteris existentibus paribus, quas supra in propositione apparet esse in simplice non duplicata illa ratione.

278. *Exempl.* II. Mariottus censet, ut habetur in eodem Opere quod in antecedenti exemplo memoravi fol. 513, tubum cupreum sex pollicum in diametro aquæ pressionem 30 pedum perferre posse cum crassitie dimidiæ lineæ. Ponamus has tuborum plumbei & cuprei resistentias aquæ pressionibus præcise æquari, inveniendaque sit proportio tenacitatis plumbi & cupri. In formula superiore (§. 276.) elisis S & s utpote æqualibus provenit $T:t=(M.D:C):(m.d:c)$. ubi majusculæ ad tubum plumbeum, minusculæ verò ad cupreum pertinent, hinc subrogatis ordine loco M, D, C, nu-

 meris

meris 50, 16, $6\frac{1}{4}$; & loco m, d, c, numeris 30, 6 & $\frac{1}{2}$; invenietur $T:t = \frac{2400}{19} : 360 = 240 : 684 = 20 : 57$, atque adeo tenacitas plumbi foret, juxta has observationes, paulo major quam subtripla tenacitatis cupri.

PROPOSITIO IX. Theorema.

279. *Si vasis* BAS, *liquoris cujuscunque heterogenei pleni, partes* BAE, SAE *instar alarum follis circa verticem* A *ab invicem diduci queant, earundemque partium vel complementorum* OBbA, OSsA *solida analoga*
Fig. 23, 24. 2B2A2E, 2S2A2E, *vel* B2B2b2A, S2S2s2A *indicentur iisdem signis δ, κ, quibus eorundem solidorum analogorum centra gravitatis signantur, signoque ω pseudocuneus* LPQ *scalæ gravitationum* LrQ *utrique vasis alæ communis, quo ejusdem pseudocunei centrum gravitatis signatur, potentiæ quædam æquales ponderi massarum δ, κ liquoris cujusdam homogenei, cujus densitas eadem sit cum* PV *media densitate liquoris in vase heterogenei, in directionibus suis homologis αδ, ξκ vel δα & κξ per centra gravitatis solidorum δ, κ transeuntibus planisque* BS *normalibus vasi applicatæ, & aliæ potentiæ γ & ω inter se æquales, utpote singulæ æquales ponderi molis liquidæ ω, cujus densitas uniformis etiam sit* PV *æqualis mediæ densitati liquoris heterogenei, vasi applicatæ in directionibus* bγ, sω, *plano* BS *æquidistantibus, & per centrum gravitatis ω pseudocunei scalæ gravitationum transeuntibus; hæ quatuor potentiæ δ, κ, γ & ω simul agentes, quælibet scilicet secundum suam directionem, eadem vi pollent ad diducendas vasis alas, quam habet eidem vasi inditus liquor heterogeneus.*

Hæc propositio tantum est casus particularis corollarii primi Propositionis X. libri primi, nam quæ in hac propositione generaliter dicitur scala potentiarum solido patienti perpendiculariter applicatarum, nunc est scala gravitationum L*r*Q, quandoquidem quodvis punctum *b* in superficie A*b*B urgetur juxta directionem *bu* superficiei perpendicularem (§. 260.) potentia æquali ponderi filamenti liquidi voluminis 3*er* & densitatis PV, æqualis mediæ densitati liquoris heterogenei, quod pondus filamenti *r*3*e* exponitur (§. 33.) facto *r*3*e*. PV ex volumine scilicet in densitatem liquoris, atque adeò liquoris gravitationes in cavam vasis BAS superficiem idem præstant ac potentiæ singulis punctis cavæ isti superficiei applicatæ, quas designant ordinatæ respectivæ *r*3*e* scalæ gravitationum L*r*Q ductæ in datam PV. Propterea (§. 81.) liquor heterogeneus vasis

vasis eundem effectum præstabit, quem potentiæ expressæ per solida $\delta, \varkappa$, & ω ducta in PV, atque adeò æquales ponderi liquoris homogenei densitatis PV sub voluminibus illis $\delta, \varkappa, \omega$, applicatæ solido BAS in directionibus $\alpha\delta$, $\xi\varkappa$ vel $\delta\alpha$, $\varkappa\xi$ & $b\gamma$, $s\omega$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

280. Adeoque momenta fluidi heterogenei vasis alas diducere conantis circa hypomochlion A (§. 82.) pro ala BAE erunt PV. $\delta.\alpha$E + PV. γ. Ae, & pro ala SAE erunt PV. $\varkappa.\xi$E + PV. ω. Ae. Hæc enim facta PV. δ, PV. γ, PV. ω, PV. $\varkappa$ significant pondera liquoris densitatem PV habentis sub voluminibus δ, γ, ω, & $\varkappa$.

COROLLARIUM II.

281. Antecedens corollarium juxta §. 263. etiam obtinet, cum vasis alæ ab aliquo fluido ambiente extus premantur, sed permutatis gravitationum directionibus, hoc est, sicut interni liquoris gravitationes vasis alas ab invicem diducere conantur, ita vice versa ambientis fluidi pressione fit, ut eædem alæ ad se invicem constringantur fortiter. Unde eædem formulæ, quæ in corollario præcedenti momenta liquoris interni vasis alas dilatare conantis designabant, momenta pariter liquoris ambientis alasque constringere conantis exprimient, sed scalæ gravitationum liquoris exterioris applicatæ.

SCHOLION.

Adeoque, ad æstimandas liquoris pressiones in vasis diducibilibus, tota difficultas eo reducitur, ut habeatur regula calculum subducendi pro inventione momentorum solidorum δ & $\varkappa$ respectu plani recti AE, & pseudocunei ω respectu plani PQ, vel subinde etiam respectu plani OAO figuræ 24, quoties scilicet vasis vertex A sursum respicit. Calculus vero facile reduci potest ad quadraturas figurarum, ut ex sequentibus duobus theorematibus haud difficulter perspicietur.

PROPOSITIO X. THEOREMA GEOMETRICUM.

Fig. 27. 282. *Solidi cujusvis* CBAD, *cujus sectiones* cbd *basi* CBD *parallelæ sint, figuræ similes & similiter positæ, momentum respectu plani* CAD *basi* CBD *recti, æquabitur facto ex trilineo quodam* AEFfA *in rectangulum sub* EF, *quam ipsi* BE *rectæ* CD *normali æqualem ponimus, & data recta* D *ejus magnitudinis, ut parallelepipedum sub quadrato rectæ* BE *vel* EF *& hac data* D, *æquale fiat solido ex bilineo* CBD *in* XE, *existente hac* XE *distantia centri gravitatis* X *bilinei* CBD *ab ejus basi* CD, *ipsum verò trilineum ea lege descriptum sit, ut ejus ordinatæ* EF, ef *sint in triplicata proportione ordinatarum ipsis in directum positarum* BE, be, *in figura* AbBE, *quæ plano* CAD *recta est, & per axem* AE *figuræ* CAD *transit.*

Sit *x* centrum gravitatis figuræ *cbd*, eritque *xe* distantia hujus centri à basi *cd* bilinei *cbd* in plano figuræ AbBE, quandoquidem figuræ CBD, *cbd* (secundùm hypothesin) similes & similiter positæ sunt, eritque adeò CBDC. XE : *cbdc*. xe $=$ BE³ : *be*³ id est constr. $=$ EF : ef $=$ D. EF² : D. EF. ef, atqui (constr.) est D. EF² vel D. BE² æquale solido ex CBDC in XE, ergo etiam D. EF. *ef* æquabitur solido ex *cbdc* in *xe*, seu momento bilinei *cbd* axi *cd* appensi. Jam, quia momentum solidi totius CBAD respectu plani CAD æquatur momentis omnium bilineorum *cbdc*, quæ in hoc solido continentur, id est, omnibus *cbdc* in *xe*, idem solidi momentum etiam æquale erit omnibus D. EF. *ef*, quorum singula singulis *cbdc. xe* æqualia sunt, atqui omnia D. EF. *ef* $=$ D. EF. omn. *ef* $=$ D. EF. aream EA*f*F. Ergo momentum solidi CBAD æquatur facto ex area EA*f*F in rectangulum D. EF. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

283. Adeoque momentum complementi solidi CBAD respectu ejusdem plani CAD, seu solidi residui post detractionem ipsius CBAD à prismate recto & æquealto CDBG, æquabitur facto ex trilineo AFH in rec-lum D. EF. Nam momentum prismatis CDBG est factum ex rec-lo EH in rec-lum D. EF, & solidi CBAD momentum æquatur facto AEF*f*A. D. EF, adeoque momentum complementi hujus solidi CBAD æquatur omninò facto ex rec-lo EH, demto trilineo EAF, in rectangulum D. EF, hoc est facto ex AFH in D. EF.

Co-

Corollarium II.

284. Unde, si solidum nostrum CBAD fuerit analogum solido patienti BAE propositionis præcedentis, atque adeò idem sit cum solido δ, erit hoc casu δ.αE seu momentum solidi δ = EAƒF, D.EF, in casu figuræ 23. quo vertex solidi BAS deórsum respicit, & δ.αE = HFƒA. D. EF in casu figuræ 24, quo vertex sursum respicit.

PROPOSITIO XI. Theorema Geometricum.

285. *Si prisma rectum super basi* CAD *sectum intelligatur superficie quadam curva* QrLCD, *nascetur inde cunei species* QACD, *cujus acies erit in linea* CD, *ejusque facies curva aciei* CD *adjacens oritur motu parallelo lineæ* CD, *ita ut fixum in ea punctum* E *semper in curva* LrQ *existat inter movendum; lineaque* CD *plano* LPQ *perpendicularis sit, hujus cunei momentum respectu plani* PQ *alteri* CAD *recti æquabitur facto areæ seu bilinei* EiA *in rec-lum* AE. CD; *ubi bilinei ordinata quæcunque* ei *fuerit ad ordinatam homologam* er *figuræ* PLQ, *sicut rectangulum coordinatarum* Ae, cd *in figura* CAD, *ad rectangulum ex datis* AE, CD. Fig. 28.

Nam quia (secundùm hypothesin) *ei* : er = *Ae. cd* : AE. CD, erit *Ae. cd. er* hoc est momentum rec-li cd. er ad distantiam Ae plano PQ appensi = solido AE. CD. *ei*. Atqui momenta omnium rectangulorum *cd. er* contentorum in pseudocuneo æquivalent momento istius pseudocunei, ergo etiam omnia EA. CD. *ei*, hoc est, factum ex rec-lo AE. CD in bilineum E*i*A, æquantur momento pseudocunei QACD. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

286. Quoties figuræ CAD vertex A deorsum conversus est, atque adeo cum puncto P congruit, toties curva EiA per puncta L & P transibit, adeo ut ordinatæ ejus in his punctis nullæ sint. Sed si vertex A ejusdem figuræ CAD sursum respicit, adeo ut basis CD per punctum P transeat & vertex cum puncto L confundatur, curva LηI transibit quidem per punctum L, non verò per punctum P, cum ordinata ejus in hoc puncto PI ipsi PQ seu PL æqualis futura sit; nam si CD est in P & A in L, analogia *eη* : *er* = *Ae. cd* : AE. CD, fiet

fiet PI : PQ = AE. CD : AE. CD, atque adeò PI = PQ = PL, ubi scilicet *Ae* facta fuerit AE. Hocque casu erit momentum solidi respectu plani per L transeuntis alterique PQ æquidistantis, æquale facto ex rec-lo AE. CD in aream PL*n*I.

COROLLARIUM II.

287. Hinc, si figura CAD fuerit sectio recta in solido patiente BAS figurarum 23 & 24, & curva LrQ scala gravitationum liquoris heterogenei, solidum QPCD erit pseudocuneus scalæ gravitationum, & momentum ejus, seu *ω. Ae*, in casu figuræ 23 = AE. CD. L*i*PL, & *ω. Ae* in casu figuræ 24, = AE. CD. L*n*IP.

SCHOLION.

288. Patet ergo computum momentorum liquorum in vasis dividucibilibus gravitantium totum deduci ad investigationem arearum AEF*f*A, L*i*P & L*n*IP in figuris 27, 28. quæ in particularibus exFig. 23, 24. emplis semper haberi possunt, si non algebraïce, saltem transcendenter. Sit enim vas BAS conicum liquore homogeneo plenum, adeò
Fig. 27. ut curva LrQ abeat in lineam rectam, quo casu solida δ & κ erunt similia & æqualia solidis BAE & SAE, & solidum CBAD erit semissis coni recti, in quo cum sit EA³ : eA³ (= BE³ : be³) = EF : ef, liquet curvam A*f*F fore hoc casu parabolam cubicam, atque adeo trilineum EAF erit = $\frac{1}{4}$ AE. EF, & AFH = $\frac{3}{4}$ AE. EF. Et quia CBD est semicirculus, cujus centrum in E, erit CBDC. XE = $\frac{2}{3}$ BE³ = D. BE², atque adeo D = $\frac{2}{3}$ BE. Hinc (§. 284.) δ. αE = κ. ξE = D. EF. AEF = $\frac{2}{3}$ BE. EF. AEFA = $\frac{2}{3}$ BE. EF. $\frac{1}{4}$ AE. EF = $\frac{1}{6}$ AE. BE³.

Fig. 28. Porrò existente linea LrQ recta & LP = PQ, erit etiam L*e* = *er*, & sic ubique: unde cum (§. 285.) *ei* sit ad *er* ut *Ae. cd* ad AE. CD, erit ubique ordinata *ei* = *Ae. e*E. *cd* : AE. CD = *Ae*². *e*E : AE², substituendo loco rationis *cd* : CD æqualem rationem *Ae* : AE propter similitudinem triangulorum A*cd* & ACD, quandoquidem in præsenti casu figura ACD est triangulum. Hinc reperietur per notissimas quadraturarum methodos bilineum E*i*A = $\frac{1}{12}$ AE³ : hinc in casu figuræ 23. habebitur (§. 287.) *ω. Ae* (= AE. CD. LiAL) = AE. CD. $\frac{1}{12}$ AE³, seu, quia CD tantundem est ac 2BE, = $\frac{1}{6}$ BE. AE³.

Erit

Erit ergo $PV.\delta.\alpha E + PV.\omega.Ae = \frac{1}{4}.PV.AE.BE^2 + \frac{1}{4}.PV.BE.AE^2 = \frac{1}{4}PV.AE.BE.AB^2 = PV.\kappa.\xi E + PV.\omega.Ae$ quia in præsenti casu alæ BAE & SAE, utpote semisses coni recti BAS, similes & æquales sunt. Fig. 23.

289. Si conus BAS ab aëre etiam extus premi ponatur, & quæratur altitudo AE ipsius coni, in suppositione æquilibrii internæ liquoris pressionis in cavam coni superficiem cum externa aëris in convexam, erit hoc casu scala gravitationum LrQ linea recta axi LP seu AE parallela, cujus ab hac AE distantia sit PQ in figuris 23, 24, & 28, & EM vel AN in figura 27. Hoc casu solidum δ vel κ erit prisma baseos CBDC & altitudinis EM seu PQ, hujusque prismatis momentum seu $\delta.\alpha E$ nunc fiet $=$ CBDC. XE. EM (vel quia supra inventum est $CBDC.XE = \frac{1}{3}BE^2) = \frac{1}{3}EM.BE^2$. Loco pseudocunei ω nunc habebimus prisma ex basi CAD & altitudine PQ, unde, quia generaliter est $ei : er = Ae.cd : AE.CD$ (vel propter triangula similia CAD & $cAd) = Ae^2 : AE^2$, & propter æquales er & PQ, cum linea LrQ ipsi EA parallela supponenda sit, atque per Q transiens, erit $ei = Ae^2.PQ : AE^2$, hocque casu foret curva EiA parabola conica, cujus parameter est $AE^2 : PQ$, adeò ut area $EiAE$ hoc casu futura sit $= \frac{1}{3}AE.PQ = \frac{1}{3}AE.EM$; atque adeò $\gamma.Ae = \omega.Ae\ (= AE.CD.EiAE) = \frac{1}{3}AE^2.CD.EM = \frac{2}{3}BE.EM.AE^2$. Idcirco vocando athmosphæræ densitatem mediam Z, erit summa momentorum pressionis aeris, seu $Z.\delta.\alpha E + Z.\omega.Ae = \frac{2}{3}Z.BE.EM.BE^2 + \frac{2}{3}Z.BE.EM.AE^2 = \frac{2}{3}.Z.BE.EM.AB^2$. Hinc, quia (secundùm hypothesin) in casu æquilibrii $PV.\delta.\alpha E + PV.\omega.Ae = Z.\delta.\alpha E + Z.\omega.Ae$, erit etiam $\frac{1}{4}PV.AE.BE.AB^2 = \frac{2}{3}Z.BE.BM.AB^2$, adeoque $PV.AE = 4.Z.BM$. Invenimus enim supra, $PV.\delta.\alpha E + PV.\omega.Ae = \frac{1}{4}PV.AE.BE.AB^2$, & paulò ante pro momentis aeris extus prementis, seu pro $Z.\delta.\alpha E + Z.\omega.Ae$ invenimus $\frac{2}{3}Z.BE.BM.AB^2$. Atqui PV.AE denotat pondus columnæ liquidæ, cujus altitudo AE & media densitas PV, & Z.BM gravitationem totius atmosphæræ, quam simplicius per p indicabimus; ergo si vas conicum BAS hydrargyri plenum sit, oportet altitudinem AE quadruplo majorem esse altitudine columnæ mercurialis æquivalentis atmosphæræ pressioni, atque adeò minimum 120. digitorum, cum atmosphæræ gravitatio æquivaleat 30. digitis Mercurii, ad obtinendum æquilibrium inter externam atmosphæræ pressionem & internam Mercurii gravitationem follis conici alas ab invicem diducere conantem.

Sin

Sin vero coni vertex sursum conversus esset, ut in fig. 24. eo casu præcedentia theoremata præberent PV.AE=½ Z.BM pro casu æquilibrii inter pressuram externam aëris & internam Mercurii, atque adeò pro hoc æquilibrio obtinendo nunc sufficeret altitudo AE 60. digitorum. Atque hæ determinationes ad amussim consentiunt cum iis, quæ Celeb. Jac. Bernoullius super hac re prôdidit in Actis Erudit. Lipſ. 1686. & 1687. occasione alicujus perpetui Môbilis in Novellis Reipublicæ literariæ D. Bælii 1685. propositi, quod consistebat in quadam follis specie triangularis, circa axem horizontalem alterutrius alæ medio affixum mobilis, Mercurio modo implendi, modoque etiam in situm rectum deducti iterum aliquo usque deplendi &c. Hujus machinæ successum irritum fore ex principiis hydrostaticis & vectis natura ostendit eleganter modo laudatus Bernoullius. Papinus verò, etsi successum pro dubio habuisse videtur atque imperfecta pressionum æstimatione impossibilitatem motus ejus utcunque ostenderit, nihilominus tamen Bernoullianam machinæ discussionem eludi posse existimavit, motum parallelum alis tribuendo, quo vectis rationem, in qua Bernoullii impugnatio fundata erat, cessaturam esse confidebat perperam. Ea vero, quæ super prædictam machinam in utramque partem agitata fuere, legi possunt in Actis Lipſ. supra citatis.

CAPUT III.

De Æquilibrio Corporum solidorum in Fluidis quibuscunque demersorum, vel iisdem Fluidis innatantium.

PROPOSITIO XII. Theorema.

290. *Omne fluidum heterogeneum corpus quodcunque solidum in ipso demersum, vel eidem innatans, tanta vi in altum pellere conatur, quantum est pondus massæ liquoris cujusdam homogenei sub volumine solidi analogi corpori demerso ejusve parti immersæ, cujus densitas æquet mediam densitatem fluidi heterogenei, secundum directionem fluidi superficiei normalem per centrum gravitatis solidi analogi transeuntem.*

Fig. 25. Generale istud theorema aliud non est quam §. 83. in concreto sumtus; idcirco resumendo schemâ dicti paragraphi ponendoque lineam OLQ, quæ illic dicebatur scala potentiarum solido patienti appli-

applicatarum nunc esse scalam pressionum seu gravitationum fluidi heterogenei, planumque FO, quod supra in citato loco planum sublime vocabatur, nunc in concreto erit superficies fluidi, in quo corpus AB*a*S demersum est, & ex dicto paragrapho 83. illicò liquebit solidum corpus *a*BAS ea vi in altum urgeri, quæ æquetur ponderi massæ liquidæ 2*a*2B2A2S sub volumine solidi demerso corpori analogi, cujus densitas uniformis æqualis sit PV seu mediæ densitati fluidi heterogenei. Nam (§. 260.) singula puncta superficiei corporis *a*BAS pressionem subeunt æqualem gravitati seu ponderi filamenti cujusdam fluidi homogenei, cujus filamenti longitudo eadem est cum homologa ordinata scalæ gravitationum OLQ, & fluidi homogenei densitas uniformis æqualis mediæ densitati PV fluidi heterogenei, in quo corpus *a*BAS demersum est, quod pondus filamenti (§. 33.) æquatur perpetuo facto ex volumine ejus exposito per ordinatam scalæ gravitationum in densitatem ejus PV, unde, quia in casu præsenti potentiæ singulis punctis superficiei *a*BAS perpendiculariter applicatæ sunt ordinatæ respectivæ scalæ OLQ in datam PV ductæ, liquet (§. 83.) potentiam corpus *a*BAS in fluido heterogeneo attollere conantem facto ex solido 2*a*2B2A2S in PV exponendam esse, hoc est (§. 33.) pondere massæ liquoris homogenei, cujus densitas PV & volumen sit modo recensitum solidum, dictæque potentiæ directionem *xy* plano FO, hoc est fluidi superficiei normalem, transire per centrum gravitatis solidi 2*a*2B2A2S. Quod primùm de corpore demerso *a*BAS erat demonstrandum.

Non diversa erit demonstratio circa corpus *a*BAS fluido heterogeneo XZ innatans. Sit enim hujus fluidi scala gravitationum curva LQ, & 2B2A2S solidum analogum parti immersæ BAS, potentia solidum *a*BAS attollere connitens etiamnunc erit pondus molis fluidæ 2B2A2S, cujus densitas uniformis PV æquatur mediæ densitati liquoris heterogenei, ejusque directio superficiei liquoris heterogenei FL perpendicularis, transibit per centrum gravitatis ejusdem solidi 2B2A2S per §. 83. Quod erat demonstrandum. Fig. 26.

Corollarium I.

291. Hinc corpora in fluidis existentia non gravitant totâ suâ absolutâ gravitate, seu pondere absoluto, sed duntaxat pro quantitate, qua pondus illorum absolutum superat pondus massæ fluidi homogenei, cujus volumen sit solidum corpori dato analogum, densitas-

que par mediæ densitati fluidi, in quo corpus demersum est. Adeoque, si pondus massæ fluidæ modo dictæ æquetur ponderi absoluto corporis, hoc corpus in fluido non gravitabit, hoc est, non descendet nec ascendet, & tantum negative gravitabit, hoc est, in fluido ascendet, si nominata fluidi moles gravior fuerit quam demersum corpus, vi æquali excessui, quo fluidi pondus sub volumine solidi, dato corpori analogi, hujus pondus excedit.

Corollarium II.

292. In corollario præcedenti jam supponitur lineam jungentem centra gravitatis corporis dati & solidi eidem analogi, juxta scalam gravitationum, fluidi superficiei normalem esse, alioqui corpus in fluido demersum in omni casu circa seipsum convertetur, usque dum dicta linea centra gravitatis conjungens fluidi superficiei perpendicularis facta fuerit. Nam si linea xy producta superficiei fluidi FO
Fig. 25. ad angulos rectos occurrat, atque per centrum gravitatis solidi $2a2B2A2S$ transeat, vi præsentis propositionis solidum $aBAS$ juxta directionem hanc xy sursum agetur, ipsum verò proprio pondere descendere nititur juxta directionem tu parallelam xy per centrum gravitatis corporis $aBAS$ transeuntem. Jam, si linea connectens centra gravitatis corporum $aBAS$ & $2a2B2A2S$ plano FO obliqua sit, necesse est ut directio tu corporis $aBAS$ descendere conantis & xy directio potentiæ attollentis sint diversæ, seu non congruentes, unde, quia idem corpus $aBAS$ à duabus potentiis oppositas in partes agentibus juxta tu & xy urgetur, liquet id in se ipsum conversum iri juxta ordinem literarum $aBAS$, nec motum ejusmodi conversionis prius posse cessare, quam corpus eum intra fluidum situm nactum sit, quo directiones tu & xy sibi invicem congruant, atque adeò linea jungens centra gravitatis solidorum $aBAS$ & $2a2B2A2S$ plano FO perpendicularis facta sit.

Hactenus generalia circa æquilibria & motus corporum in omnis generis fluidis positorum, sequuntur unum alterumve corollarium circa fluida homogenea, & faciliora aliquot problemata.

Corollarium III.

293. Si corpus $aBAS$ fluido homogeneo immersum est, fluidi scala gravitationum erit triangulum rectangulum isosceles OPQ, &

& solidum 2a2B2A2S, corpori aBAS analogum, eidem simile & æquale erit; atque adeò fluidum homogeneum tanta vi seu potentia corpus in ipso demersum vel innatans attollere conatur, quantum est pondus massæ liquoris sub volumine corporis demersi simili & æquali vel partis fluido immersæ. Idcirco cuilibet corpori tantum de suo pondere intra ejusmodi fluidum decedit, quantum ponderat massa fluidi modò recensita. Atque in hoc corollariolo fundantur ferme omnes regulæ, quas Autores circa æquilibria solidorum cum fluidis homogeneis subinde tradunt.

Corollarium IV.

294. Hinc etiam (§. 292.) linea jungens centra gravitatis corporis cujusque fluido homogeneo innatantis & in eo in æquilibrio consistentis, ejusque partis fluido immersæ superficiei fluidi normalis existet. Alioqui corpus fluido innatans hinc & inde vacillaret, donec in hunc situm se composuerit.

Corollarium V.

295. Diversæ partes unius ejusdemque corporis diversis liquoribus homogeneis immersæ in casu æquilibrii, sunt in reciproca ratione densitatum seu gravitatum specificarum liquorum, quibus idem corpus successive immersum esse ponitur.

Dicantur liquores L, l, eorum gravitates specificæ S, s, corporis liquoribus successive immissi partes immersæ P, p; & dico fore $P:p=s:S$. Nam quia corporis liquori L immersa pars est P & S specifica gravitas liquoris, factum ex P in S (§. 33.) exprimet pondus absolutum massæ liquidæ sub volumine P, & eandem ob rationem $p.s$ denotabit pondus massæ liquoris l sub volumine p; sed pondera P.S & $p.s$, quæ in casu æquilibrii uni eidemque corpori liquoribus L, l immerso æqualia sunt, etiam inter se æquabuntur; adeò ut $P.S=p.s$, & per consequens $P:p=s:S$.

Scholion.

296. Corollarium præcedens fundamentum continet diversarum machinularum hygrostathmicarum, quibus diversorum liquorum specificæ gravitates explorari solent. Usitatissima constat bulla vitrea M collo tereti & cavo MA instructa, cui subinde pauxillum Mercu- Fig. 67.

 rii

rii infundi solet, ut machinula in liquoribus situ semper erecto consistat; bulla verò M ut plurimum definit in sacculum N, in quo infusus Mercurius se colligere possit. Machinulæ collum MA ab artificibus in partes æquales dividi solet, sed perperam, ad indicandas æquales gravitatis liquorum differentias. Verùm quâcunque ratione collum divisum sit, ope nonnullarum observationum machinula apta redditur indicandis omnium liquorum specificis gravitatibus. Ipsæ vero observationes sequenti ratione peragi debent. Fig. 67. Notetur primùm totius machinulæ cum indito Mercurio pondus, quod nominabimus P, idque granis expressum supponemus. Machinula deinde liquori cuidam L immissa mergatur usque ad primam divisionem, seu usque ad GG, quod semper fieri potest addendo vel demendo nonnihil Mercurii. Appendantur porro machinulæ successivis vicibus tot grana, usque dum eadem liquori L immergatur ad divisiones omnes sequentes 2, 3, 4, 5, 6, ponderaque totalia, quæ machinulam in eodem liquore usque ad dictas divisiones descendere faciunt, sint P, P+a, P+b, P+c, &c. qualia in adjecto laterculo conspiciuntur, & quæ pondera in hoc laterculo etiam signantur per P, 2P, 3P, 4P respective; in quibus expressionibus numeri literæ P præfixi non denotant multipla ponderis P, sed sunt duntaxat notæ generales characteristicæ significantes ad quamnam colli divisionem referendus sit granorum numerus per literam P cum suo præfixo numero significatus. Adeoque P, 2P, 3P, 4P &c. significant quidem diversos numeros granorum P, P+a, P+b, P+c qui ex observatione innotescunt, atque adeò in tabella quadam, ut in superiori laterculo, diligenter notandi sunt, sed minime progressionem arithmeticam, qualem series P, 2P, 3P, &c. exhibere videtur; ex ejusmodi observationibus parata tabella machinulam omnium reliquorum liquorum gravitati investigandæ aptam reddunt; nam remotis omnibus granis *a*, *b*, *c*, *d*, &c. ut sola machinula cum indito Mercurio remaneat, immergatur ea in liquore quodam A, usque in BB, id est ad quartam colli divisionem, & in alio liquore O immergatur usque ad 6 seu in CC, eritque gravitas specifica liquoris A ad gravitatem specificam alterius O, ut numerus granorum 6P conveniens sextæ colli divisioni ad numerum granorum 4P, qui convenit quartæ divisioni; id est gravitates specificæ liquorum sunt

Divisiones colli.	Pondera machinulam liquori immergentia.
1 . . .	P = P
2 . . .	2P = P + a
3 . . .	3P = P + b
4 . . .	4P = P + c
5 . . .	5P = P + d
6 . . .	6P = P + e
&c.	&c.

in

in reciproca ratione numerorum ex constructa tabula excerptorum, qui colli divisionibus, ad quas in liquoribus machinula descendit, conveniunt. Demonstratio facilis est, nam (§. 295.) gravitas specifica liquoris A est ad gravitatem specificam alterius O sicut N6 ad N4 hoc est, in reciproca ratione partium machinulæ liquoribus immersarum, atqui N6 est ad N4, ut massa liquoris L cujus volumen est N6 ad massam ejusdem liquoris cujus volumen est N4; hæ verò massæ N6 & N4 liquoris L ponderabunt 6P & 4P grana respective, cùm tot grana cum fluidi L massis modo indicatis in æquilibrio fuerint vi observationis paulo ante descriptæ; ergo gravitas specifica liquoris A est ad gravitatem specificam liquoris O, ut 6P ad 4P, prout dicebatur. Hujus generis aliæ machinæ ex iisdem principiis construi possunt.

Scholion II.

297. Etsi me non lateat æquilibria fluidorum cum inter se, tum etiam solidorum corporum cum fluidis homogeneis ex aliis principiis nonnihil brevius posse deduci, scilicet ex fundamento maximi descensus centri gravitatis, quem omnia corpora inter se commissa affectant; seu, quod ferme eodem redit, ab æqualitate momentorum corporum inter se agitandorum, cujusmodi principiis Pascalius aliique usi sunt. Verùm, præterquam quod talia principia indirecta sunt, ea vix ac ne vix quidem absque longis ambagibus fluidis heterogeneis applicari posse videntur in ea universalitate, in qua præcedentes propositiones ex principiis suis proximis directe deduximus; malui methodo & fundamentis circa potentias singulis punctis cujusque corporis applicatis, quæ in primo libro exposuimus, insistere, utpote quæ modum non inelegantem subministrarunt pressiones fluidorum heterogeneorum ad æquivalentes pressiones fluidorum homogeneorum reducendi.

Propositio XIII. Problema.

298. *Datis diametro alicujus pilæ metallicæ cavæ, & ratione specificæ gravitatis metalli, ex quo pila parata est, ad aliquem liquorem homogeneum, invenire diametrum cavitatis pilæ ad id requisitæ, ut pila in liquore illo homogeneo ad datam profunditatem immergatur.*

Sit pila FDE, & ex diametro ejus FM, profunditate LM, ad quam pila liquori APB immergi debet, & ex ratione 1 ad *n* scili-

cet gravitatis specificæ metalli ad liquoris gravitatem, invenire oportet diametrum HN cavitatis pilæ HIK superficiei FDE concentricæ.

Quia in casu æquilibrii pilæ cum liquore pondus pilæ (§. 293.) æquari debet ponderi, seu gravitati massæ fluidæ DME, atqui pilæ gravitas est factum ex sphæra FDE − sphær. HIK in specificam metalli gravitatem, quæ est ut 1, & gravitas massæ liquoris, est ut factum ex ejus volumine DME in gravitatem ejus specificam n, ergo sphær. FDE − sph. HIK $= n$. segm. DME. Dicantur FM, a; circumfer. FDE, b; LM, c & denique HN, x; eritque sphæra FDE − sph. HIK $= (a^3b - bx^3):6a$; & segmentum sphæricum DME $= (3abcc - 2bc^3):6a$, quod segmentum ductum in n, præbet $(3abccn - 2bcn^3):6a = (a^3b - bx^3):6a$, ex qua elicitur $x^3 = a^3 - 3accn + 2c^3n$, vel $\sqrt[3]{(a^3 - 3accn + 2c^3n)} = x$, seu posita $c = a:m$, existente m numero quocunque, erit etiam $x = a\sqrt[3]{(m^3 - 3mn + 2n:m^3)}$. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

299. Hinc, si tota pila fluido debet immergi, fiet $c = a$, seu $m = 1$, & postrema æquatio mutabitur in $x = a\sqrt[3]{(1 - n)}$. Idcirco, si pila ænea in aëre octingenties aquâ leviore natare ponatur, erit, posita gravitate specifica æris noncupla gravitatis aquæ, $n = 1:7200$, atque adeò formula $x = a\sqrt[3]{(1 - n)}$ abit in $x = a\sqrt[3]{(7199:7200)}$, atqui per compendium logarithmorum invenietur valor rationalis ipsius $a\sqrt[3]{(7199:7200)}$ inter fractiones decimales 0. 99995a & 0. 99996a, adeòque $a - x$ seu dupla metalli crassities est minor quinque centies millesimis diametri FM, atque adeò crassities ipsa FH vel MN minor una quadragesies millesima ejusdem diametri FM particula. Unde, si globus æneus cavus parari deberet, cujus crassities MN tantum sit unius scrupuli seu 144^{mæ} pedis partis, pilæ diametrum majorem 277 pedibus esse oporteret, ut in aere librata consistere possit. Sin vero cum P. Francisco de Lanis Pilæ æneæ diametrum 8. pedum assumere velimus, ejus crassities minor requireretur, quam una quinquies millesima pedis pars; ac denique si diameter statuatur cum eodem Autore Tom. II. fol. 291. *Magisterii Naturæ & Artis*, 25 pedum, crassities metalli foret minor quam tres quadringentesimæ pollicis partes. Hisce similia etiam exhibere digna-

dignatus est Illustris Leibnitius Tom. I. *Miscellaneorum Berolinensium* pag. 127. ex quibus omnibus abunde liquet, spem abjiciendam esse omnem, fore ut navigatio aërea fortunato aliquando eventu suscipi queat, in quam egregius ille de Lanis nos erigere voluisse videtur.

PROPOSITIO XIV. Problema.

300. *Data specifica gravitate bacilli teretis & gracilis* AB *& liquoris cujusque homogenei, determinare quousque bacillus extremitate sua* A *è filo suspensus, ita ut altera extremitate* B *libere pendeat, liquori debeat immergi.* Fig. 68.

Ponatur gravitatem specificam bacilli AB se habere ad gravitatem specificam liquoris ENF ut BD ad bacilli longitudinem AB, atque bacilli partem BC liquori immergi, quæritur magnitudo ipsius AC vel BC ex datis AB & DB.

Analysis Geometrica. Per §. 293. bacillus liquori immersus usque ad C perpendiculariter sursum agitur vi æquali ponderi liquoris sub volumine BC partis bacilli liquori immersæ juxta directionem IK per centrum gravitatis, seu per medium I ejusdem BC transeuntem liquorisque superficiei EF normalem; adeoque si filo IKP trochleam K amplectens appensum fuerit pondus P, æquale gravitati massæ liquidæ BC, hoc pondus P in directione KP descendere nitens eandem vim in bacillum juxta directionem IK exeret ac fluidum ENF bacillum attollere connitens; ipse vero bacillus proprio suo pondere descendere conatur juxta directionem OQ superficiei liquoris EF itidem perpendicularem & per centrum gravitatis bacilli, quod est in ejus medio O transeuntem; idcircò liquor baculum attollere conans & gravitas eundem effectum præstabunt, quem præstarent pondera P & Q, quorum hoc bacilli gravitatem absolutam, illud verò, ut jam dictum, pondus liquoris sub volumine BC designant, lineæ inflexili & gravitatis experti AB in directionibus IK & OQ inter se parallelis ac superficiei liquoris EF normalibus, applicata; unde, cum bacillus liquori aliquousque immersus (secundum hypothesin) in statu manenti, seu in æquilibrio, consistat, ex principio vectis erit (§. 55.) $P.SU = Q.TV$, demissa scilicet ex A normali AU super EF, vel $P:Q = TV:SV = 2OA:2IA$ (seu producta BA in M, ut AM æqualis sit CA) $= BA:BM$. Nam, quia IA est media arithmetica inter BA & CA vel AM, ejus dupla seu 2IA æquabitur

tur aggregato extremarum BA & CA vel AM, hoc est rectæ BM, & dupla ipsius OA est BA. Verùm pondus P est ad pondus Q (§. 33.) ut factum ex illius volumine BC in gravitatem ejus specificam AB ad factum ex volumine alterius Q seu AB in densitatem seu gravitatem specificam ejusdem BD, hoc est P : Q = BC. BA : AB. BD = BC : BD. Atqui paulo ante habuimus P : Q = BA : BM, ergo inde nascitur BA : BM = BC : BD; & BM. BC = BA. BD. Hinc si centro O & intervallo OB vel OA descriptus semicirculus BNA, atque per punctum in ejus diametro datum D perpendicularis diametro DN ducta sit semicirculum DNA secans in N, erit BN² (= BA. BD) = BM. BC, atque adeò recta BN tanget semicirculum CNM centro A & intervallo AC vel AM descriptum in puncto N, quod proinde communis erit intersectio semicirculorum BND & CNM; atque adeò æquales existent AC & AN; atqui hæc AN est media proportionalis inter datas BA & DA, ergo etiam AC, atque adeò hæc AC data est. Quod erat inveniendum.

Corollarium.

301. Adeoque etiam ex parte bacilli BC cuilibet liquori immersa & bacilli ipsius longitudine AB, semper innotescet ratio gravitatis specificæ liquoris ad gravitatem specificam bacilli; etenim ad longitudinem bacilli BA ejusque partem CA extra liquorem extantem duntaxat sumenda est tertia proportionalis DA, eritque BA ad BD semper ut gravitas specifica liquoris ad gravitatem specificam bacilli liquori aliquousque immersi. Atque adeò portiones diversæ BD, quæ resultant à diversitate liquorum, quibus bacillus successive immergi potest, erunt in reciproca ratione gravitatum specificarum ipsorum liquorum. Liquet ergo talem bacillum aptum exhibere instrumentum hygrostathmicum (Gallis *Pese-liqueur* dici solitum) quo liquorum specificæ gravitates examinari queant. Qua ratione bacillus dividi debeat, ut ex partibus ejus immersis gravitates liquorum dignosci queant, facile colligitur ex hoc corollario, adeoque eidem ulterius explicandæ supersedeo.

Hactenus aliquot exemplis illustravimus hydrostaticæ regulam indicantem quousque corpora solida liquidis immergi debeant, ut cum hisce liquidis æquilibrium faciant; restat adhuc unicum exemplum adducendum, quo alia hydrostaticæ regula, situm corporum solidorum in fluidis consistentium respiciens, illustretur, hunc in finem

finem facillimum omnium eligemus propoſitione ſequenti excutiendum.

PROPOSITIO XV. Problema.

302. *Datâ ratione ſpecificæ gravitatis prismatis triangularis* ABG *ad gravitatem alicujus liquoris* XBZ, *determinare ſitum prismatis, in quo præcedente vertice* B *trianguli* ABG, *id liquori immiſſum cum eo in æquilibrio maneat.* Fig. 65.

Sit MBN pars liquori immerſa & punctum D ejus centrum gravitatis, C verò centrum gravitatis trianguli totius ABG; adeoque (§. 294.) lineam DC, jungentem centra gravitatis totius & partis immerſæ triangulorum, oportet eſſe liquoris ſuperficiei XZ perpendicularem in caſu æquilibrii. Jam ex centrobaricis conſtat, centra gravitatis C, D triangulorum ABG & MBN reperiri in lineis BP & BQ, baſes AG & MN triangulorum bifariam dividentibus in punctis P & Q, lineasque vel intervalla PC, QD trientes eſſe totarum PB & QB; hinc ductis PQ, PM & PN, ipſæ PQ & CD æquidiſtantes erunt, cum PC & QD ſint partes ſimiles ipſarum PB & QB. Jam cum oporteat ipſam CD perpendicularem eſſe rectæ XZ, neceſſe eſt ut etiam PQ eidem XZ vel MN normalis ſit, unde, quia jam QM & QN æquales oſtenſæ ſunt, ipſas PM & QN pariter æquari oportet.

Porrò, quia in caſu æquilibrii maſſæ liquoris MBN pondus (§. 293.) æquale eſt ponderi abſoluto prismatis ABG, per §. 33. erit gravitas ſpecifica liquoris ad gravitatem prismatis ut triangulum ABG ad triangulum MBN; atque adeo hæc triangulorum ratio data, quandoquidem ratio gravitatis ſpecificæ liquoris ad prisma ABG (ſecundùm hypotheſin) data eſt. Propterea problema eo reducitur, ut deſcribatur centro O & intervallo quodam PM vel PN circulus MON, qui ex lateribus AB & GB abſcindat ſegmenta MB & NB talia, ut ducta linea MN, triangulum ABG ſit ad triangulum MBN, vel rectangulum ABG ad rec-lum MBN in ratione data ſpecificæ gravitatis liquoris ad gravitatem prismatis ABG, quam dicemus $a:f$. Idcirco demiſſis ex P perpendicularibus PR ad BA, PS ad BG ac denique BV ad AG, ſi dicantur AB, a; BG, b; BR, l & BS, m; incognita verò BM, x; ex comparatione triangulorum rectangulorum PRM & PSN, in quibus juxta ſuperius oſtenſa hypothenuſæ PM & PN æquantur, elicietur æquatio, quæ reducta exhibe-

 bit

bit iſtam biquadraticam $x^4 - 2lx^3 + 2bfmx - bbff = 0$, cujus radices determinabunt BM vel BN, atque adeò punctum M vel N & radium PM circuli deſcribendi MON, cujus interſectiones M & N cum rectis BA & BG determinant poſitionem rectæ MN. Quod erat inveniendum.

Similiter incidiſſemus in æquationem biquadratam, ſi loco priſmatis ABG ſumſiſſemus conum ſcalenum.

CAPUT IV.

De Figuris, quas fluida in corporibus flexibilibus ſtagnantia hiſce corporibus flexibilibus inducere debent.

CONſideravimus hactenus vaſa liquores continentia tanquam rigida & inflexibilia, quorum figuræ à liquorum gravitationibus mutari nequeant. Sed ſi vaſa materia molli & flexili conſtent, non continget, ut liquor intra eorum cavitatem ſtagnans in ſtatu manenti ſtatim conſiſtere queat, quæcunque figura ipſis tributa fuerit, ſed poſteaquam ipſorum latera variis modis inflexa fuerint, eam liquoris preſſuræ figuram vaſis inducent, quam perfectum inter omnes potentias gravitantes æquilibrium depoſcet.

Ejuſmodi vaſa in œconomia animali magno numerò occurrunt, cum pleraque flexilia & mollia, utpote ex fibris carnoſis contexta, ſint, in quibus vaſis varii humores & fluida periodicis motibus circumeunt. Quales igitur figuras ejuſmodi vaſa induere debeant non injucunda nec inutilis eſt diſquiſitio. Revera enim talis indagatio non contemnenda Celeb. Joh. Bernoullio produxit circa Vires & Motus muſculorum in Diſſertatione ejus ſuper hac materia oppidò eleganti, cujus præcipua contenta in Actis Lipſ. 1694. pag. 200. ſeq. continentur. Sic etiam inſignis Medicus & Geometra Scotus Archibaldus Pitcarnius illius generis ſpeculationes in Phyſiologiam loco multiplicium illorum fermentorum, quibus ſecretionum in œconomia animali negotium antehac tranſigi credebatur, ad Garamantas procul & Indos ablegandarum, invehere conatus totus in eo eſt, ut probet in ſua docta Diſſertatione de *Circulatione Sanguinis*, orificia vaſorum & poros glandularum partiumque corporis noſtri alias quam circulares figuras non habere, nec proinde figuris, ſed figurarum amplitudine inter ſe differre; ex quo deinceps concludit,

dit, *nulla fermentis peculiaria superesse promptuaria, fermentaque ipso in animali nulla.*

Figuram vasorum circularem ex generali Mechanicæ principio, *Quod fluida quæcunque pressionem suam communicent per lineam corpori continenti & fluidi actionem sustinenti in quovis puncto impulsus perpendicularem*, supra etiam (§. 249.) à nobis demonstrato, derivare contendit, sectionem canalis axi rectam tanquam polygonum infinitilaterum respiciens, cujus polygoni latuscula indefinite parva impressiones fluidi juxta directiones ipsis normales sustineant, & quia hæ impressiones in singula latera æqualia poligoni in circumstantiis apud Autorem æquales sunt, eas per lineolas rectas & poligoni lateribus perpendiculares repræsentat. Hucusque omnia bene, sed dum ex eo, quòd hæ perpendiculares laterum poligoni cum se invicem angulos efficiunt, concludere vult, aut saltem inferre videtur, omnes dictas perpendiculares in uno eodemque puncto concurrere debere, fallitur, etsi cæterum certissimum sit perpendiculares illas reapse in uno eodemque puncto convergere; nam ex eo, quod duæ quæque perpendiculares concurrunt, non sequitur omnes in uno puncto coire. In omni curva rectæ, quæ duobus curvæ contiguis elementis perpendiculares sunt, angulos continebunt, hoc est, concurrent, sed quis inde inferret omnes perpendiculares curvæ in uno eodemque puncto convenire? Ex principiis ergo illis, quæ Cl. Vir posuit, & quæ tanquam vera ultro admittenda puto, nondum satis ostendit rem eò deduci, *ut inveniatur curva cujus omnes subtangentes in puncto concurrant*, prout scribit pag. 28. *Differt. Medic.* Voluit dicere rem deduci ad inventionem seu investigationem curvæ, cujus omnes *subperpendiculares* curvæ ad unum idemque punctum terminentur; nulla enim datur curva, cujus subtangentes concurrant, quandoquidem omnes subtangentes sumuntur in eadem linea, id est, in axe datæ curvæ, seu in alia linea, quæ instar axis sit. Fateor quidem, quòd, si omnes curvæ perpendiculares in puncto concurrant, omnes subnormales ad unum idemque punctum quoddam terminatum iri, ast etiam est fatendum, tunc ea reductione problematis ad considerationem subnormalium non opus esse; nam si omnes curvæ perpendiculares in quodam puncto convergant, ilicò concludendum hanc curvam esse circulum; adeò ut problema jam solutum sit absque ulteriore reductione, sive ad proprietatem nominatam subperpendicularium, sive ad methodum, quam Pitcarnius dicit inversam fluxionum. Idcirco nos sequenti Problemate perspicue ostendere conabimur cur-

vam quæsitam reapse eam esse, cujus cunctæ perpendiculares in idem punctum seu centrum vergant, non obstante, quòd hoc idem problema jam supra (§. 102.) solutum sit, sed diversâ ratione ad illustrationem generalis theorematis, quod infinita ejusmodi alia problemata solvit.

PROPOSITIO XVI. Problema.

Fig. 69. 303. *Dato tubo* AB *ex materia molli seu flexili clauso in* B, *apertoque in* A *ad horizontem verticaliter erecto, & aquæ aliusve liquoris pleno, determinare figuram, quam sectio quælibet horizontalis in tubo à liquoris pressuris acquiret.*

Fig. 70. Sit AZBX figura quæsita, cui rectæ ZX, AB ad angulos rectos in R se invicem decussantes perpendiculariter occurrant in punctis A, Z, B, X. Sint contigua curvæ elementa DC, DE & Zz, Aa, punctis Z, A adjacentia singula inter se æqualia, ducanturque zy, DK rectæ ZX normales, ipsisque æquidistans EN, nec non per puncta C & D rectæ CM & DN ipsi ZX parallelæ, & per *a* lineola *ab* eidem ZX æquidistans; ac denique fiant D*m* = EN & Dg = CM. Quibus positis, quia sectionis tubi ZAXB singula puncta à liquoris superficie æqualiter distant, singula puncta æqualem pressionem subibunt, & quodvis ejus punctum D (§. 255.) pressionem sustinebit æqualem ponderi filamenti liquoris, cujus longitudo, quam per lineam DH curvæ perpendicularem in puncto D indicabimus, æquetur fluidi altitudini super sectione ZAXB, juxta directionem curvæ ubique normalem Dδ; ergo singulæ DH, quæ sumuntur in lineis curvæ perpendicularibus, potentias eidem curvæ applicatas repræsentabunt, atque adeo rec-lum DH. DC refert potentiam in totum elementum DC agentem. Verum potentia DH (§. 39.) æquipollet lateralibus DF & FH, quarum hæc ipsi ZX parallela, illa verò eidem perpendicularis est; ergo etiam potentia agens in totum curvæ elementum CD, quæ exponitur rec-lo DH. DC, æquipollet potentiis lateralibus CD. DF & CD. FH, vel quia triangula similia CDM & DHF præbent CD. DF = CM. DH & CD. FH = DM. DH potentiis lateralibus per rectangula CM. DH ac DM. DH exponendis juxta directiones DF & FM vel huic parallelam, agentibus.

Jam (§. 98.) est generaliter ∫FH, hoc est aggregatum potentiarum juxta directiones FH, seu juxta directiones rectæ ZX parallelas

las agentes in omnia elementa curvæ CD vel DE, in curvæ arcu ZDE vel ZD contenta, id eſt per modò oſtenſa, omnia rectangula DM.DH reſpectu arcus ZD, quæ componunt rectangulum DK.DH, ad DN — Zy, ſeu CM — Zy, ſicut firmitas curvæ in puncto A, quam firmitatem hac litera A deſignamus, ad conſtans curvæ elementum CD; hoc eſt DK.DH : CM — Zy = A : CD, vel quia (ſecundùm hypotheſin) ZX curvæ ad angulos rectos occurrit in Z, atque adeò Zy reſpectu Zz & CM evaneſcit, fiet DK.DH : CM = A : CD & permutando DK.DH : A = CM : CD.

Item omnes DF ſeu ∫DF, hoc eſt, in præſenti caſu omnia rectangula CM.DH pertinentia ad arcum curvæ DA, hoc eſt, rectangulum KR.DH, quandoquidem omnes CM componunt KR, ſeu ſinum arcus DA, ſunt ad DM — *Ab* ſicut A ad CD, vel quia etiam RA (ſecundùm hypotheſin) curvæ normalis eſt in A, atque adeo *Ab* præ A*a* vel CD aut MD evaneſcit, erit etiam KR.DH : DM = A : DC, & permutando KR.DH : A = DM : DC; atqui paulo ante etiam habuimus DK.DH : A = CM : CD ſeu invertendo A : DK.DH = DC : CM ergo ex æquo KR.DH : DK.DH = KR : DK = DM : CM = FH : DF, adeoque juncta DR triangula DKR & DFH ſimilia ſunt, atque adeo rectæ DR & DH ubique in directum jacent, ac proinde omnes DH curvæ ZDA normales productæ in eodem puncto R concurrunt; hinc curva quæſita ZDA eſt circulus. Quod erat inveniendum & demonſtrandum.

Corollarium I.

304. Analogia præcedentis paragraphi DK.DH : A = CM : CD, elemento curvæ A*a* vertici A adjacenti applicata, præbebit *b*R.DH : A = *ab* : *a*A, verum quia RA curvæ perpendicularis eſt, fiet *ab* = *a*A ergo etiam A = *b*R.DH ſeu AR.DH. Eſt igitur firmitas tubi in quolibet ſectionis puncto, ut rectangulum ex radio ſectionis AR vel ZR in potentiam ſectionis puncto applicatam DH, hoc eſt in liquoris altitudinem ſuper hoc punctum. Propterea 1°. in tubis æqualium orificiorum tenacitates ſeu firmitates requiſitæ ad perferendas fluidi preſſuras erunt ut altitudines fluidi homogenei ductæ in ſuas denſitates ſeu gravitates ſpecificas. 2°. Si facta ex altitudinibus liquorum in denſitates æqualia fuerint, firmitates tuborum erunt ut radii orificiorum. 3°. Si ejuſmodi facta radiis ſectionum tuborum axibus normalium reciproce proportionalia fuerint, firmitates erunt æquales.

COROLLARIUM II.

305. Quia vires æquales eidem vel similibus subjectis similiter applicatæ non nisi similes effectus producere possunt, ideo nihil refert, an tubus seu vas flexile à pondere liquoris in ejus cavitate gravitantis, an vero à fluido quodam elastico extrorsum prematur juxta directiones, perinde ac fluidum facit, curvæ perpendiculares. Nam fluidi elastici pressiones semper revocari possunt ad æquivalentes pressiones alicujus liquoris, cujus altitudines per DH repræsentabantur. Hinc enim est, quod bullæ aqueæ, quas pueri loturam saponis per fistulas stramineas flatu suo protrudentes subinde ludendo formant, in globulos intus cavos rotundentur. Idcirco viscositatis aquæ in ejusmodi bullis vis requisita ad resistendum aëris inclusi elasticitati est ut hæc vis elastica, ducta in radium bullæ vel potius in radium cavitatis ejusdem.

SCHOLION.

306. Non abs re fuerit hoc loco observasse firmitates tuborum flexibilium eodem prorsus modo se habere, quo firmitates tuborum rigidorum, has enim ostendimus esse (§. 275.) ut rectangula tuborum per axes, seu ut facta ex altitudinibus liquorum inter se & absolute homogeneorum in diametros tuborum, quoniam crassities tuborum in hac factorum ratione esse oportere ostendimus, &, cæteris paribus, resistentiæ sunt ut crassities, in flexibilibus vero resistentia seu firmitas in quolibet puncto est ut vis inflans, seu ut liquoris altitudo ducta in tubi semidiametrum, adeoque firmitas tubi in duobus punctis diametraliter oppositis perinde ac in rigidis est factum ex liquoris altitudine in totam diametrum. Hinc non video, quibus rationibus Vir ingeniosus D. Parent rationem peripheriæ ad diametrum formulis suis pro firmitatibus tuborum rigidorum æstimandis introduxerit in Commentariis Academiæ Reg. Scientiarum 1707.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA.

Fig. 71. 307. *Si in linteo* ZDAX *in terminis suis* Z *&* X *fixo stagnet quilibet liquor heterogeneus, cujus scala gravitationis sit curva* ROS; *invenire figuram lintei manentem.*

Sint

Sint iterum, ut in præcedenti problemate, Zz, CD, DE, Aa elementa curvæ ZDA æqualia, & DL, El ordinatæ axi AR rectæ, Dr vero & Ep eidem axi parallelæ, & reliquis ductis quales in figura apparent. Jam, quia omnia in æquilibrio sunt per hypothesin & (§. 260.) elementum curvæ CD pressuram sustinet æqualem ponderi prismatis liquidi CD. LO, cum LO sit ordinata scalæ gravitationum, potentia qua elementum CD urgetur juxta directionem perpendicularem erit DC. DH facta DH ubique æquali homologæ LO, & quia insuper ob omnes potentias curvæ perpendiculares (§. 96.) firmitas lintei in omnibus punctis eadem est, atque adeo per datam quantitatem A designari potest, erit (§. 98.) ∫FH seu omnes FH : DN − Zy = A : DC; vel quia Zy evanescit præ ipsa DN, fiet ∫FH : DN = A : DC, & permutando ∫FH : A = DN : DC. Jam, quia potentia FH, quæ ex DH derivata est, non solum punctum D, sed integrum elementum DC respicit, loco FH poni debet FH. DC perinde ac loco DH in hoc casu intelligi debet DH. DC, & quia præterea FH. DC (propter triangulorum DHF & CDM similitudinem) æquale est rec-lo DH. MD, vel DH. NE, id est, LO. Ll, erunt omnia LO. Ll areæ RLO inscripta æqualia huic areæ; ergo ∫FH, id est, area RLO : A = DN : DE vel DC, & hæc analogia respectu elementi curvæ Aa fiet area ROsb vel ROSA : A = ab : aA, unde, quia in A, elementum aA = ab, erit etiam A = areæ ROSA, adeoque præcedens analogia RLO : A = DN : NE mutabitur in RLO : RAS = DN : NE.

Sit denique curva RQT ejus naturæ, ut rec-lum SA. AT sit = trilineo ROSA, & SA. LQ = trilineo ROL, eritque ROL : RAS = AS. LQ : AS. AT = LQ : AT : unde cum invenerimus ROLR : RASR = DN : NE, erit etiam LQ : AT = DN : NE. Hinc centro A intervalloque AT descripto quadrante circuli TKV, ductaque per Q rectæ RA parallela QK quadranti occurrente in K, ac denique acta AK, erit etiam AI : AK = DN : DE, atque adeo triangula DNE & AIK sunt similia & similiter posita, ac proinde radius AK parallelus erit tangenti curvæ quæsitæ in puncto D. Eritque pariter DN : NE = AI : IK. Quæ erant invenienda.

Corollarium I.

308. Ducta per quadrantis punctum K tangente Kα, si in recta LO sumatur Lβ = Kα & sic respectu cujusvis alius curvæ puncti, omnia

omnia puncta β erunt in curva quadam, $R\beta\omega$ asymptotam AS habente, cujus area $SAL\beta\omega$ ad partes asymptotæ æquabitur rectangulo sub radio AT & ordinata DL curvæ ZDA. Nam triangula similia AIK & $AK\kappa$ præbent $AI : IK = K\kappa : AK$, sed $AI : IK = DN : NE$, ergo $K\kappa : AK$ vel $AT = DN : NE$, ergo $AT . DN = K\kappa . NE = L\beta . Ll$, ergo omnia $AT . DN$ hoc est rec-lum $AT . DL =$ omnibus rec-lis $L\beta . Ll$, quæ areæ $AL\beta\omega S$ inscripta sunt, id est, huic areæ $AL\beta\omega S$; atque adeò $DL = AL\beta\omega S : AT$.

Corollarium II.

309. Analogia, in quam paragrapho 307. circa finem incidimus, $DN : NE = AI : IK$ immediate præbet æquationem differentialem curvæ quæsitæ $DN = NE . AI : IK$. Nam si dicantur $Z\pi = y$, $\pi D = RL = x$, $AI = LQ = p$, adeoque $IK = \sqrt{(bb - pp)}$ existente $AT = AK = b$, $RA = AS = a$, & denique $\pi\rho = DN = dy$, $NE = Ll = dx$, superiorque æquatio $DN = NE . AI : IK$ factis debitis substitutionibus juxta denominationes linearum modo institutas, mutabitur in $dy = pdx : \sqrt{(bb - pp)}$. quæ est æquatio differentialis curvæ quæsitæ ad amussim conveniens cum æquationibus, quas Celeberrimi Bernoullii Fratres, quisque sua methodo, invenerunt. Si linea $R\omega OS$ fuerit recta, curva RQT erit parabola conica æquationem habens $aap : b = xx$; & substituto valore $bxx : aa$, loco p in æquatione differentiali ante inventa $dy = pdx : \sqrt{(bb - pp)}$, habebitur $dy = xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ quæ iterum coincidit cum eâ quam supra (§. 104.) dedimus.

Corollarium III.

310. Quoniam (§. 96.) tenacitas lintei in omnibus punctis eadem est, recta 12 angulum DiA à tangentibus curvæ DI & Ai formatum bisecans (§. 110.) erit media directio omnium fluidi gravitationum in curvam DA, & subtensa anguli TAK æqualis angulo LDI (§. 112.) parallela existet mediæ directioni 12; adeoque (§. 110.) erit potentia juxta mediam directionem 21 ad tenacitatem lintei in D ut sinus anguli $D1A$ ad sinum $A12$, hoc est, ut sinus KAT ad sinum KTA, id est, sicut KT ad AK. Unde cum tenacitas lintei (§. 307.) sit trilineum ROSA (constr.) $= AS . AT$. vel AK, erit potentia juxta $21 = AS . AK . KT : AK = AS . KT = AR . KT$. Et quia in symbolis corollarii antecedentis $KT = \sqrt{(2bb - 2bp)}$ & $AR = a$, erit potentia juxta mediam directionem $21 = a\sqrt{(2bb - 2bp)}$.

Scho-

Scholion.

311. Curva hujus propositionis ZAX uni parti famosi problematis circa isoperimetras ab ingeniosissimis Bernoulliis soluti, satisfacit. Nam si ex singulis ejus punctis D, E, &c. indefinitæ $D\sigma$, $E\theta$, &c. axi AR parallelæ agantur, & in iis fiat $\sigma\sigma = LQ$, $\rho\theta = lq$, &c. nascetur curva ZξX, quæ cum basi ZX, majus spatium continebit quam quælibet alia curva ex alia isoperimetra ZDAX simili lege descripta, ut in Actis Lipf. 1701. pag. 213. & Comm. Acad. Reg. Scient. Paris. 1706. d. 17. Apr. ab eximiis Geometris est ostensum.

Præter æquationem $dy = pdx : \surd(bb-pp)$ Dn. Jac. Bernoullius invenit aliam hujus formæ $dy = (b-p).dx : \surd(2bp-pp)$ quæ *minimum* continet, & altera *maximum*. Sed una ex altera nullo negotio elicitur, etenim, si in priore $dy = pdx : \surd(bb-pp)$ loco p ponatur $b-p$, seu complementum ejus ad maximam b, orietur altera æquatio, & si in altero pro $b-p$ substituatur p, redibit prior.

312. Radius circuli curvam osculantis in ejus puncto quolibet D, seu radius evolutæ $D\gamma$, est quarta proportionalis ad LO homologam ordinatam scalæ gravitationum ROS, & datas RA & AT. Cujus rei demonstratio ex nostra constructione facilis est.

CAPUT V.

De Pressionibus Aeris et Gravitate.

QUæ Capitibus I. & II. hujus libri secundi circa pressiones omnis generis fluidorum *generaliter* ostensa sunt, etiam de *Aëre* in *specie* intelligenda esse nemo non videt, quandoquidem etiam Aër gravis est, atque adeò legibus fluidorum gravitate sua agentium subjici debet. Propterea supersedere particulari deductione phænomenorum ex aeris gravitate provenientium, eamque ex superioribus à nobis adductis Lectoris industriæ eliciendam relinquere potuissemus, nisi argumenti præstantia ejusmodi deductionem vendicare sibi videretur.

312. Aëra gravem esse extra omne dubitum est positum, cum experimenta omni exceptione majora gravitatem ejus invincibiliter adstruant. Talia experimenta apud Galilæum, Boylium, Mariottum, Borellum & alios dilucide describuntur, qui proinde consuli possunt.

Huc etiam facit schediasma Celeb. Jac. Bernoulli Actis Lipf. 1685. pag. 430. insertum, quo peringeniosum ponderandi aeris modum aperuit, cum successu aliquando in opus deductum.

313. Antiquissimum probandæ gravitatis aëris experimentum Aristotelis illud videtur esse, quo Philosophus *Utrem inflatum plus trahere quam compressum & flaccidum existimavit*, & post eum plerique etiam ex recentioribus Philosophis, quorum nemo ante Jac. Bernoullium experimenti fallaciam cognovisse videtur, tametsi omnes idem experimentum parum accuratum judicarunt. Ast Bernoullius in Actis Lipf. 1685. pag. 436. luculenter ostendit, atque deduxit ex principiis hydrostaticis, *Utrem seu vesicam inflatam non esse gravioris ponderis, quam complicatam, licet aërem gravitate haud destitui præsupponas*. Quod mirum est ante ipsum neminem vidisse, aut saltem à se observatum monuisse illis occasionibus, quibus de aëris gravitate ejusve probandæ rationibus agebatur; cum illius ratio vel leviter attendenti satis manifesta sit; atque duobus verbis explicari possit. Nam cum vesica tumida cum aëre incluso ponderatur, id contingit in aëre cujus columna lancibus imminet, adeò ut pondus in unam trutinæ lancem agens sit hæc columna aërea & vesicæ pondus; si postea expresso seu expulso è vesica aëre vesica denuo ponderatur, lanci eadem ac prius columna aërea imminebit, adeò ut & hoc quoque casu pondus in lancem agens futurum sit eadem ac prius columna aërea atque vesicæ pondus. Adeoque utroque casu, sive tumida sive compressa & flaccida vesica trutinæ appendatur, semper idem pondus ut reperiatur necesse est, vel si quando contingat ut postquam aërem è vesica expressimus, ejus pondus tantillo minus quam ante reperiatur, ejusmodi ponderis decrementum non aëris expulsi gravitati debet tribui, sed particulis pinguibus inter contrectandum & comprimendum vesicam ab ea abrasis, vel alia de causa exhalantibus. Sed ut hæc omnia verbo complectar, aëris ponderatio ope vesicæ, perinde se habet, ac si quis aquæ phialæ inclusæ pondus exploraturus primum phialam cum inclusa aqua ponderaret, & deinceps effusâ in lancem trutinæ aquâ, hujus aquæ effusæ & phialæ pondus eadem trutina conjunctim quæreret, quis non videt idem pondus utroque casu repertum iri, sive phiala cum infusa aqua, sive etiam vacua phiala, sed aquâ, quam capiebat, lanci infusa, simul ponderentur?

314. Idcirco si ponderandi aeris modus fallacia vacare debet, *oportet vasis volumen post expulsum aërem non mutari*, & deinde aeris ejecti

ejecti pondus satis accurate innotescet. Ad hoc proinde Celeb. Joh. Bernoullius ex amplo recipiente vitreo aërem, quantum fieri potest, diligenter eduxit, & aquæ in aëris expulsi locum ingressum permisit; quo experimento comperit gravitatem aëris ad aquam esse ut 1 ad 740 circiter. Sed alio postea, eoque magis accurato, experimento per condensationem aëris in amplo vase æneo tentato invenit gravitatem aëris ad aquam, ut 1 ad $774\frac{1}{11}$. Hinc, quia hæc ratio rationi 1 : 800 proxime æquatur, ob numerorum commoditatem hanc posteriorem loco alterius 1 : $774\frac{1}{11}$ deinceps adhibebimus, ad exprimendam rationem specificæ gravitatis aëris ad gravitatem aquæ.

Aëris gravitas etiam probari solet, & recte, phænomeno Barometrorum. Sed ut argumenti vis melius capiatur, sequentem propositionem facilem præmittam, ex qua deinde præcipuum Barometri symptoma, item & Antliæ Ctesibianæ, Siphonum reflexorum, aliorumque ejusmodi instrumentorum phænomena, per modum corollariorum, deducam. Et denique in Scholio annexo Barometrum novæ constructionis à Celeb. Joh. Bernoullio excogitatum proponam, quo atmosphæræ variantes pressiones, magis quam ullo alio barometro, sensibiliter indicari queunt.

PROPOSITIO XVIII. Theorema.

315. *Si in vase amplo* MON *liquoris cujuscunque pleno, usque ad* MN *demittatur vasculum* BE *argentum vivum continens, cum tubo vitreo* AB *utraque sui extremitate aperto & vasculo* BE *perpendiculariter insistente; sed ita tamen, ut orificium ejus apertum* A *semper extra liquorem* MON *extet, hydrargyrus per orificium tubi inferius* B *ascendet, usque dum altitudo ejus in tubo* CD, *sit ad altitudinem* PC *liquoris super superficie residui in vasculo Mercurii, ut specifica gravitas liquoris* MON *ad specificam gravitatem Mercurii.* Fig. 73.

Id est, posito liquorem MON aquam esse, decies quater argento vivo leviorem, altitudo DC Mercurii in Tubo AB constanter decima quarta pars erit altitudinis aquæ PC.

Hæc propositio tantum casus est particularis Propositionis V. hujus secundi libri, & coincidit cum corollario IV. ejusdem Propositionis, in quo indicatur pressiones liquorum homogeneorum in se, sed heterogeneorum inter se æquales fore, atque adeò liquores ipsos in se invicem gravitantes in æquilibrio consistere, quoties facta ex

eorum altitudinibus in specificas eorum gravitates æqualia, atque adeò altitudines specificis gravitatibus reciproce proportionales fuerint. Unde, quia (secundùm hypothesin) argentum vivum in tubo AE in altitudine CD pressioni liquoris in altitudine MO æquilibratum est, erit (§. 262.) altitudo Mercurii CD ad altitudinem liquoris tubum ambientis MO, sicut hujus liquoris specifica gravitas ad gravitatem specificam hydrargyri. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

316. Cum tubi AB liquor ambiens MON quodcunque fluidum grave repræsentare possit; ponamus eum significare aërem atmosphæræ, tubique foramen superius A extra atmosphæram extare; vel, quia hæc conditio in praxi impossibilis est, sumemus aliam, quæ
Fig. 72. ipsi æquivaleat, supponendo tubum AB una sui extremitate A hermetice sigillatam esse, adeò ut orificio ejus aperto B sursum converso & tubo Mercurio impleto per hoc orificium, posteaque eodem digiti pulpa obstructo, atque Mercurio in vasculo CE stagnanti immisso, post retractum digitum orificium inferius B intra argentum vivum vasis CE obstruentem, nullus aër forinsecus adveniens tubi partem superiorem AD à Mercurio descendente ad D usque relictam ingredi possit, & hoc pacto jam obtinetur scopus conditionis, quâ requiritur in propositione ut orificium apertum A extra liquo-
Fig. 73. rem MON promineat eo solo fine, ut liquor ambiens fistulam ingredi nequeat; quibus positis, & quia argentum vivum in fistula AB ad altitudinem plus minus 28. digitorum pedis Parisiensis suspensus hæret, oportet atmosphæræ gravitationem æquivalere pressioni isti Mercurii ad altitudinem 28. suspensi, etenim si aër gravis non esset in nulla prorsus intra fistulam AB altitudine elatus conspiceretur; sed in eadem cum Mercurio vasculi CE superficie terminatus; eodem plane modo, quo argentum vivum in fistula AB figuræ 73. plane ad nullam altitudinem CD attolleretur, si nullus esset liquor ambiens, qui in Mercurium vasculi CE gravitare possit.

COROLLARIUM II.

317. Ut sciatur, in qua altitudine pressio aquæ æquivaleat pressioni atmosphæræ, resumi debet casus propositionis præsentis & per liquorem MON intelligenda est aqua decies quater levior quam

Mer-

Mercurius, atque dispiciendum est, quousque tubus AB cum vasculo CE vasi MON debeat demergi, ut Mercurius in fistula utrinque aperta assurgat ad altitudinem 28. digitorum. Jam quoniam (§. 315.) demerso vasculo ad profunditatem 28. pollicum infra superficiem aquæ MN Mercurius assurgit in tubo AB ad altitudinem CD unius digiti; demergendum erit vasculum CE in liquore seu aqua MON ad profunditatem quater & decies 28. pollicum id est ad profunditatem 392. pollicum, hoc est, paulo minus quam 33. pedum, ut Mercurius ad altitudinem 28 pollicum elevetur. Igitur *pressio atmosphæræ æquivalet pressioni aquæ in altitudine* 33. *pedum circiter*. Ac per consequens, si aër atmosphæræ uniformis ubique densitatis esset, altitudo atmosphæræ foret 26400. pedum; sed multo major erit, quandoquidem aër, quo altior est, eò etiam rarior deprehenditur.

Corollarium III.

318. Ex hisce principiis peti etiam debent rationes phænomenorum antliæ Ctesibianæ. Hæc antlia consistit in Cylindro ligneo vel subinde etiam metallico BA cylindrice excavato, ab utraque parte aperto quidem, sed inferius orificium B aquæ immergendum nonnihil angustius habens cavitate antliæ. Cavitati huic intruditur, ope virgæ ferreæ, embolus coriaceus GD, attollendus per vices atque deprimendus, qui per totam antliæ longitudinem antliæ cavitati tam affabre quadrare debet, ut omnem aëri ex superiori cavitatis parte in inferiorem transitum præcludat. Ejusmodi organon *Antlia Suctoria* vel *Aspirans* subinde vocatur, quod in ea quadam attractionis specie attolli aqua videatur. Sed ascensionis aquæ causa eadem est, quæ Mercurium etiam in Barometris suspensum tenet, *pressio* scilicet *atmosphæræ*. Nam retracto embolo CD in *mn*, necesse est aquam vigore hujus atmosphæræ pressionis per orificium B antliam ingredi & cavitatem *m*B*n* ab aëre vacuam implere, siquidem (secundùm hypothesin) ex superiore antliæ parte A*mn* aër embolo *mn* impeditus in cavitatem *m*B*n* transire nequit, nec proinde quicquam est in spatio *m*B*n*, quod externæ aëris pressioni aquam per orificium intrudenti resistat. Hinc, quo altius attolletur embolus, eò altius etiam aqua, ipsum pone insequens, in antlia assurget; usque dum embolo delato in MO ad distantiam ab aqua IK 33. pedum circiter, aquæ altitudo super IK totidem pedum fuerit, adeò ut per corolla- Fig. 74.

larium præcedens ejus pressio æquivaleat pressioni atmosphæræ. Nam si embolum quantum voles ulterius eleves in *cd*, aqua non ideo altius enitetur, sed in altitudine sua 33. pedum subsistet, quæ altitudo aquæ maxime limitata est, ut aquilex quondam Galilæo retulit, utpote quæ atmosphæræ pressioni æquivalet.

COROLLARIUM IV.

319. Quod ad siphones reflexos attinet, eorum vires ex præcedentibus commode deducentur. Sit ABC ejusmodi tubus in B inflexus inæqualium crurum AB & CB; & in vulgus notum est, quod immisso breviori crure AB vasculo EF, aquæ aliusve liquoris pleno, si suctionis ope aqua ex longiore brachio BC eliciatur, fore, ut aquæ aut liquoris fluxus juxta ABC ex breviore in longius brachium tamdiu continuetur, donec vasculum EF penitus exhaustum fuerit, modò crus brevius AB altitudinem in aqua 33. pedum circiter non superet, sed eâdem minus sit, & orificium C cruris BC humilius sit orificio A alterius cruris AB. Hujus phænomeni ratio statim apparebit considerando hunc siphonem aliud non esse, quam geminum barometrum, cujus utrumque crus simplicis barometri vices obeat. Etenim cogitando crus AB aquæ plenum in vasculo EF itidem aquam continenti insistere, concipitur barometrum simplex BAEF, & crus CB aquæ plenum in vasculo GCH aqua pariter impleto erectum, efficit alterum barometrum BCGH. Repræsentet nunc KL columnam aquæ 33. pedum æquivalentem atmosphæræ pressioni, & in ea sumantur KM = AB cruri minori, & KN = CB cruri majori. Jam, quia gravitatio atmosphæræ in aquam EF est KL, & gravitatio aquæ BA in crure siphonis minoris est tantum KM, prævalebit externa aëris pressio KL internæ pressioni aquæ in tubo BA, quæ est KM, vi LM, quam vim ideò *attollentem* atmosphæræ in tubo BA deinceps dicemus, quia tanta præcise vi atmosphæræ pressio aquam AB in crure minori siphonis elevare conatur. Eodem argumento erit LN vis attollens atmosphæræ in crure longiori BC, nam hæc vis attollens est excessus pressionis externæ KL supra internam BC, quæ est KN ex constructione, atque adeò aqua in tubo BC revera attolletur, aut saltem pressio atmosphæræ eam attollere conabitur, vi illa LN. Verum, quia vis attollere conans aquam in tubo AB est LM, & vis attollens aquam in tubo BC est LN, & minor majori cedere debet, liquet aquam revera in tubo AB in

in altum coactum iri vi MN, æquali differentiæ virium attollentium LM & LN. Hanc ergo differentiam MN appellare possumus *vim motricem* aquæ in tubo reflexo juxta ordinem AQBC; propterea aqua ex vasculo EAF per tubum recurvum ABC fluet, & per orificium C sese exonerabit, & effluet, donec totum vasculum EAF depletum fuerit.

Corollarium V.

320. Quia MN est vis motrix aquæ in siphone ABC circulantis; & hæc vis MN est differentia inter KN & KM, id est inter BC & BA, hoc est DC, facta scilicet BD=BA. Fig. 75.

Hinc 1°. vis motrix nulla est, nec proinde aqua in siphone juxta ABC fluere potest, ubi crura BA & BC æquantur. 2°. Nec fluere potest, cum crus brevius AB excesserit vel æquaverit altitudinem 33. pedum atmosphæræ pressioni æquipollentem. Sint enim K*m* major quam KL & æqualis AB, & K*n*=BC, & quia nunc interna pressio aquæ BA est *m*K; externa verò atmosphæræ est LK, prævalebit externæ interna vis *m*L, quæ nunc est *vis extrudens*, quoniam hac vi *m*L aqua aliquousque ex tubo BA hoc casu extrudetur, tantum abest, ut externa aëris pressio vim habeat attollendi aquam ut in corollario antecedenti; sic etiam *n*L est vis extrudens aquam ex tubo BC. Adeoque hæ vires extrudentes efficient, ut in crure minori aqua se demittat usque in Q ita ut QA nunc æquetur ipsi LK, perinde ac PC in altero crure, aqua in eo sese demittente in P; scilicet in utroque crure eousque, quo vires extrudentes evanuerint.

Corollarium VI.

321. Sed si AB fuerit minus 33. pedum & BC multò majus, fluet quidem ex minori AB per majus BC, sed absque eo, ut in toto tubo aqua continua sit, sed in summitate formabitur subinde vacuum. Sit enim ut prius KL, 33 pedum, AB vel KM minor quam KL & BC, cui æqualis sit K*n* major quam KL; quibus positis, si L*n* major fuerit quam LM plus aquæ effluet ex tubo BC quam influere potest per crus AB, atque adeo in summitate B erit vacuum, nec proinde aqua inter fluendum per totum siphonem contigua erit. Nam quia K*n* hoc casu exprimit pressionem aquæ in tubo BC & KL pressionem atmosphæræ minorem, *n*L exponit vim extrudentem

aquam

aquam ex tubo BC; in altero verò AB, vis attollens est LM, major ideo erit vis extrudens nL vi attollente LM, atque adeò plus aquæ egredietur atque expelletur ex tubo BC, quam ingreditur in tubum AB. Idcircò ubi fluxus ad statum manentem perductus fuerit, relinquetur in summitate vacuum BP æquale excessui, quo vis extrudens nL superat vim attollentem LM, seu æquale $nL - LM$. Idcirco existente $nL - LM = 0$, vel vi extrudente æquali vi attollenti, aqua in siphone contigua erit.

COROLLARIUM VII.

322. Ope corollarii præcedentis jam facile derivabitur solutio sequentis Problematis. *Dato minore siphonis crure* AB *invenire longitudinem majoris* BC, *ut aqua in siphone fluens in summitate siphonis vacuum* BP *relinquat datæ magnitudinis* R. Nam positis KM cruri minori, KL atmosphæræ pressioni seu 33. pedum, & Kn cruri majori æqualibus, per corollarium 6. hujus aqua per siphonem ABC fluens relinquet vacuum $BP = nL - LM$, unde cum hoc vacuum debeat esse æquale R, erit $nL - LM = R$, vel $nL = R + LM$, hinc $nK = LK + R + LM = 2LK + R - MK$, hoc est, crus majus BC æquari debet residuo detracti minoris cruris AB ex dupla atmosphæræ pressione data R aucta. Adeoque, si AB fuerit 16. pedum & R, 10. pedum, erit $BC = 60$. pedum. Sed in ejusmodi casu adhibenda foret aqua ab aëre, quantum fieri potest, purgata; aliàs aër ex aqua transspirans ac sese in spatio BP sensim sensimque colligens liberum aquæ fluxum ex crure AB in alterum BC impediet.

SCHOLION.

323. Quanquam supra dictum sit in Barometris ordinariis Mercurium in altitudine 27. vel 28. pollicum certorum locorum respectu subsistere, id tamen non in mathematico rigore est accipiendum quasi argentum vivum barometri, in eodem semper loco constituti, in eadem altitudine constanter hæreret; nam ejusmodi Mercurii altitudines subinde variant, & ex hisce variationibus variationes in atmosphæræ pressionibus utcunque dignoscuntur. Dico *utcunque*, nam ut Celeb. *Wolfius* in sua *Aërometria* optime notavit, variationes Barometrorum non satis accuratè diversitatem gravitationis atmosphæræ indicant, & propterea, quæ aliàs barometra vocari solent instrumenta,

menta, duntaxat *Baroſcopii* appellatione digna cenſuit, *Barometri* nomen inſtrumento illi reſervaturus, ſi quod unquam inveniri poſſit, quod aëris gravitationes accuratiſſime monſtret.

Inter alios defectus, quibus communia baroſcopia laborant, forte præcipuus eſt, quod variationes eorum non ſatis ſenſibiles ſunt; hanc ob rem eximii Philoſophi Hugenius, De la Hire, & Joh. Bernoullius alias baroſcopiorum conſtructiones excogitarunt, quibus inſtrumentis minimæ in aëris gravitate mutationes ſenſibiliter exprimerentur; hinc nata ſunt gemina, quæ vocantur barometra Hugenii & Hirei, quorum conſtructionibus explicandis nunc non immorabor, cum Hugenii barometrum compoſitum in Ephemeridibus Gallicis deſcriptum habeatur, & apud alios paſſim Autores de rebus hiſce agentes, & Celeb. Hireus baroſcopii à ſe excogitati deſcriptionem etiam tradiderit in Actis Academiæ Regiæ Pariſ. Scient. 1708. d. 21 Martii. Sed quia barometrum, quod Acutiſſ. Geometra Joh. Bernoullius jam à multis retro annis excogitavit publico nondum innotuit, nec à ſimplicitate ſua contemnendum eſt, ejus deſcriptionem, ab Ingenioſiſſ. Autore mihi benigne communicatam, hoc loco afferre non pigebit; conſtructio itaque barometri Bernoulliâni ita habet.

324. Sit ABC tubus è duobus ramis inæqualium diametrorum compoſitus, figuram gnomonis præ ſe ferens; rami horizontalis BC in C aperti diameter lineam ſeu duodecimam digitis Pariſini partem non excedat; rami verò verticalis AB in ſummitate obſtructi diameter eſto 4. linearum vel amplius adhuc, prout variationum gradus in hoc barometro magis ſenſibiles ſunt exprimendi, & rami hujus altitudo ſit, qualis in baroſcopiis communioribus, 30. aut 31. pollicum; longitudo verò rami horizontalis BC, quæ à proportione diametrorum ramorum pendet, 3. pedum minimùm eſſe debet. Si tubo ſic parato Mercurius infundatur, & ramus ejus horizontalis pariter plenus ſit Mercurio ad medietatem uſque E circiter, aëre exiſtente mediæ conſiſtentiæ, habebitur barometrum, quod 16. vicibus magis ſenſibiles exhibebit variationes, quam ordinaria barometra. Liquet enim, quod, deſcendente Mercurio in ramo verticali ex ſpatio unius pollicis, progredietur in ramo horizontali ex E in F per ſpatium 16. pollicum; nam ramus verticalis aliud non eſt, quam ſimplex ſeu commune baroſcopium. Fig.76.

Quod ſi verò ramus horizontalis anguſtior aut verticalis amplior fieret, nemo non videt fore, ut variationes creſcant in duplicata

Z ra-

ratione diametrorum, adeò ut hæ variationes in infinitum magis magisque sensibiles reddi queant. Sed quia praxis talia semper incommoda secum trahere solet, quæ theoriæ successum difficilem efficiant, nimia est fugienda horizontalis rami angustia, quia aëris pressio non satis commode agit in tubo valde angusto, nec in eo Mercurius facile movetur. Horizontali igitur ramo vix minor quam unius lineæ diameter tribui debet. Propterea, loco imminutionis ejus diametri, satius est verticalem ramum majoris amplitudinis assumere, non quidem per totam ejus longitudinem, sed tantum in
Fig. 77. summitate, addendo scilicet tubo BM, qui ejusdem ac in vulgaribus barometris crassitiei esse potest, capsulam vitream AM, in qua Mercurius perinde ac in Hugenii geminato descendet atque ascendet. Verum existente hac capsula valde laxa, insignis rami horizontalis longitudo, quæ hoc casu requiritur, instrumentum inconcinnum usuique parum accommodatum redderet, nisi incommodo isti promptum esset remedium, contorquendo ramum horizontalem in spiralem vel quoquo alio modo in minus spatium redigendo flexuris illis, quas figura 78. exhibet, dummodo hæ flexuræ omnes in eodem plano horizontali existant.

Ad commodiorem hujus Barometri impletionem non abs re fore notat Autor, si ramus perpendicularis AB in exiguum tubulum in L apertum desinat, ita ut per ejus orificium argentum vivum infundi possit, dum orificium rami horizontalis C, obstructum tenetur. Ambobus ramis hoc pacto impletis orificium L hermetice est sigillandum & obturamentum, quo orificium C obstruebatur, demendum, ut argentum vivum in verticali tubo AB ad consuetam in communioribus barometris altitudinem se demittere possit scilicet ad terminum D, & ex horizontali ramo superfluus effluere hydrargyrus; sed quia hac ratione ramus horizontalis Mercurii plenus manebit, suctione pars ejus conveniens est adimenda vel beneficio tubi capillaris ampullula instructi, quæ calefacta atque tubo horizontali intrusa atque in eo refrigescens Mercurium in suam cavitatem trahet. Hac ratione barometrum constructum usuique paratum erit.

Cæterum non inutile fuerit, si tubus verticalis in loco, quo horizontali jungitur, exigua curvatura instar receptaculi H instruatur, ad impediendum ex horizontali in verticalem ramum aëris ingref- [illegible] si quando horizontalem forte Mercurius deficeret, aut fortasse etiam ex nimia atmosphæræ pressione seu à vibrationibus Mercurii ex

ex translatione barometri de loco in locum orta, quod postremum inconveniens si non tolli penitus, saltem obstruendo orificium C, minui potest.

Præter simplicitatem, qua Bernoullianum istud barometrum se commendat, aliis insuper prærogativis præstare videtur barometris compositis hactenus inventis. Nam tubi pro Bernoulliano & facile parantur facileque etiam implentur, nec liquores in eo adhibentur in vapores sensibiliter abeuntes, quibus barometri effectus mirum quantum alterari solent. Nam in baroscopio à nobis descripto solus adhibetur Mercurius, qui in vapores sensibiliter non solvitur. Geminatum vero Hugenii barometrum, præterquam quod tubos requirat ægre parabiles & difficillime liquoribus implendos, liquores deposcit evaporationi obnoxios, cui incommodo illud etiam quod à Celeberrimo De la Hire ingeniose excogitatum & in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. loco jam supra indicato subjectum est, aliudque præterea incommodum secum trahit, quod liquores ejusdem specificæ gravitatis sed impermiscibiles requirat, alioqui variationes ejus non indefinite augeri poterunt, sed intra certos terminos consistent quos transgredi nequeunt. Nam vocando specificas gravitates argenti vivi, & ex liquoribus in barometro isto adhibendis gravioris scilicet & levioris m, t, p; capsularum vitrearum diametrum a, diametrum tubi angustioris b; invenio post Clariss. Bernoullium, variationes in barometro Hireano se habere ad variationes in barometro ordinario seu communi, ut quantitas maa ad $2mbb, +(aa - bb.t-p)$. Jam quo minor est b quam a, eo propius accedit hæc ratio, rationi m ad $t-p$, quæ limitem exprimit, intra quem variationes barometri à Cl. De la Hire inventi collatæ cum variationibus Barometri communis continentur, quæ data ratio m ad $t-p$ eo solùm casu infinita fit, quo $t=p$, hoc est eo casu, quo liquores in Hireano barometro adhibiti ejusdem sunt specificæ gravitatis, sed qui invicem permisceri nequeant.

Posteaquam descriptio Bernoulliani barometri coram Concilio Academiæ Scientiarum Regiæ Parisiensis prælecta fuit, nuntiatum est Celeb. ejus Autori similem barometri constructionem jam ante complures annos excogitatam fuisse à Celeberrimo Astronomo Joh. Dominico Cassino, sed postea neglectam ab ipso jacuisse, quod in praxi non successisset ob aërem, qui Mercurio in tubo seu ramo horizontali se miscuisse ejusque liberum fluxum impediisse scribitur. Sed quia, quid hac in re laudatus Vir molitus sit, nusquam memo-

riæ proditum sit, nec Bernoullius de ejus tentaminibus quicquam fando audiverit, inventionis laus ipsi denegari non potest, maxime quod ejus cum successu in Belgio factum esse periculum testari potest; & incommodum illud, quod Cassino remoram injecit, tolli posse arbitratur, tubum horizontalem suctione implendo; vel etiamsi compressione crumenæ cujusdam coriaceæ argenti vivi plenæ tubique horizontalis orificio applicatæ Mercurius tubo intrusus ascendere cogatur usque ad summitatem tubi verticalis, orificium superius apertum habentis; hac Mercurii intrusione peracta, & obturato summo verticalis tubi orificio, crumena à tubo horizontali est removenda, ut argentum vivum in tubo verticali ad consuetam altitudinem delabi possit. Denique ut Mercurii fluxus in tubo horizontali commode fiat, tanta tubo isti amplitudo est tribuenda, quantâ opus est ut Mercurius in eo contineatur, absque eò ut diffluat.

CAPUT VI.

De Vi Elastica Aëris in Genere.

325. Aër, quantum experimentis constat, nullo alio in cæteris fluidis & liquoribus exemplo, sibi peculiarem habet affectionem, quâ non solum continuo se expandere conatur, sed etiam ad majus, quam antea occuparat, spatium seu volumen reapse se expandit quoties nullo corpore ambiente impeditur. Conatus ejusmodi expansivus aëris *Elater* seu *Vis elastica* ejus nuncupatur. Experimenta, quæ hanc aëri *elasticitatem* inesse evincunt, plura à Boylio, Mariotto, Jac. Bernoullio aliisque cautis observatoribus tentata & feliciter ad exitum deducta sunt, quæ apud laudatos Autores legi possunt, vel etiam in Aërometria Clariss. Wolfii, in qua selectissima quæque experimenta accurate describuntur. Inter hæc experimenta unum alterumve hoc loco recensebo, quod aëris vim elasticam ad oculum demonstrare existimo.

I. Vesica bubula vel porcina flaccida & complicata, sed obstructum habens orificium ope circumligati fili, in recipiente sensim sensimque intumescere conspicitur, simul atque aër ex recipiente educitur ope antliæ pneumaticæ, & si vesica tenera sit, rumpi subinde observatur à solo elatere pauxilli aëris in vesicæ rugis latentis.

II.

II. Ab eodem aëris elatere phiala vitrea tenuiorum parietum & probe obstructa in recipiente ab aëre evacuato in minuta subinde fragmenta dissilit; & huic simile phænomenum bibulos quandoque terret, cum generosum vini haustum facere volentes lagenam suam vitream hiscentibus labris tam arcte admovent, ut præ metu vel unius solum nectaris sui guttæ effusionis, communicationem aëris externi cum eo, qui lagenæ inest, tollant, atque strenue sugendo lagenæ aër rarefiat, quo fit, ut prævalente externi aëris pressione lagena in frustula conteratur, & merum pereat.

III. Vis elastica aëris probatur etiam experimento hæmisphheriorum æneorum, quæ educto ex eorum cavitate aëre, tam pertinaciter sibi invicem adhærere comperiuntur, ut maximis etiam ponderibus ipsis appensis, vel in oppositas partes trahentibus, vix separari possint, quæ tamen aëris plena nullo ferme negotio ab invicem diducuntur.

326. Verum, recensitis experimentis non obstantibus, D. Parent Elasticitatem aëris in Historia Acad. Reg. Paris. Scientiarum Academiæ 1708. in dubium vocare velle videtur, si Historiæ verba obiter tantum expendantur; ast textus diligentius inspectus postea manifestat, elaterem aëris in sensu paragraphi præcedentis non denegari. Nam Autor modo nominatus tantum negat particulas aëris concipiendas esse instar lamellarum plicatilium, vel instar filamentorum in spiras contortarum, & sese postea evolventium, aut ullius rei instar hisce æquivalentis. Sed eas potius tanquam moleculas considerandas arbitratur, materiæ æthereæ, ultra quam cogitari possit, exili & agitatissimæ innatantes. Idcirco juxta laudatum Autorem moleculæ aëreæ tanto magis ab invicem distant, &, quod elateris speciem præ se ferre dicit, tanto magis à se invicem recedere conantur, quo abundantior fuerit æcherea materia meatus aëris transfluens, & quo pernicior ejus motus. Ab hac enim materia æcherea vim omnem derivandam esse putat, qua aëris moleculæ in alia corpora agere possint. Ex quibus omnibus abunde liquet Cl. Parent tendentiam illam molecularum aërearum, qua à se invicem discedere conantur, non negare, nec proinde vim illam elasticam nostro sensu sumtam in dubium vocare. An autem hæc aeris Elasticitas, seu conatus particularum ejus à se invicem recedendi, proveniat ab elasticitate propria particularum compressarum, & deinceps in pristinum statum se restituere molientium, an vero ab æthere interfluente, quæstiones sunt physicæ, quæ in utramque par-

tem disputari possint, quæque omnes suis difficultatibus circumdatæ sunt.

327. Hypothesi Parentianæ explicandæ elasticitatis aëris similem ante plures annos etiam excogitaram, sed cui postea nuncium misi, quod eadem posita, non aëra tantum, sed omnes prorsus liquores vi elastica præditos esse debere, qua tamen liquores carent, ex ea sequi viderim. Nam si aëreæ moleculæ ideo à se invicem recedere conantur, quod rapidissimo ætheris motu per poros aëris indesinenter circulantis ejusdem aëris moleculæ à se invicem abigantur & repellantur, cur quæso in reliquis liquoribus moleculæ non eodem modo ab invicem repelluntur ab interfluente æthere, qui non minus trans liquorum poros, quam trans aëris meatus fluere & moveri debet? Respondebitur forte disparitatem provenire à crassitie moleculárum, quibus liquores componuntur, nec non à longe majori liquorum densitate, quam sit aëris densitas, & ob has duas rationes fieri, ut moleculæ liquorum non eo successu, quo aëris particulæ à se invicem ab interfluente æthere abigantur, cum ipsæ particulæ abigendæ valde magnæ & ætheris trans liquorum poros fluentis copia valde parva sint respectu aëris. Ast valde dubito, an hæ rationes sincere philosophantibus satisfacturæ sint; nam angustia pororum in liquoribus, quæ adducitur ad reddendam rationem, cur liquores vi elastica careant, potius contrarium probare videtur. Notum enim est, fluida eò velocius moveri solere quo angustiora sint loca, per quæ fluant, sic fluminis in diversis sectionibus fluentis velocitates sunt sectionibus reciproce proportionales; ac propter hanc rationem, velocitas ætheris fluentis per porum alicujus liquoris L erit ad velocitatem ejusdem fluentis per porum aëris A, ut amplitudo pori aëris ad porum liquoris; atqui in diversis liquoribus pororum similiter positorum amplitudines, hoc est, distantiæ duorum vicinorum elementorum in liquoribus, sunt in reciproca subtriplicata proportione densitatum; nam duæ massæ similes & æqualis ponderis diversorum liquorum volumina habent densitatibus suis reciproce proportionalia, & volumina, quæ (secundùm hypothesin) sunt solida similia, sunt in triplicata proportione laterum homologorum, adeoque & densitates erunt in reciproca triplicata ratione laterum homologorum in solidis similibus, atque adeo latera ejusmodi homologa in reciproca subtriplicata ratione densitatum; verum particulæ in ambobus liquoribus, præter propter similiter positæ, admittunt interstitia lateribus solidorum homologis proportionalia,

nalia, unde cum latera solidorum sint in reciproca subtriplicata ratione densitatum, erunt etiam pororum amplitudines seu particularum fluidorum sibi invicem proximarum distantiæ in reciproca subtriplicata ratione densitatum. Atqui velocitas ætheris fluentis trans porum liquoris L est ad celeritatem ejusdem fluentis trans porum aëris A, reciproce, ut porus aëris seu interstitium duarum ejus molecularum vicinarum ad porum liquoris, atque adeo directe in subtriplicata ratione densitatis liquoris L ad densitatem aëris A, id est, in subtriplicata ratione gravitatis specificæ liquoris ad gravitatem specificam aëris. Jam cum, ut supra (§. 314.) dictum, gravitas aquæ ad gravitatem aëris sit ut 800. ad 1, & radix cubica ex 800. sit quam proxime $\frac{92}{10}$; erit velocitas ætheris trans aquam ad celeritatem ejusdem trans aërem proxime ut 92. ad 10; hinc, quia fluidorum impressiones in corporibus in quæ agunt, sunt in duplicata ratione velocitatum, ut id suo loco ostendetur, erit hoc casu vis ætheris ad abigendas moleculas aquæ ad vim ejusdem ad abigendas à se invicem moleculas aëris, ut quadratum ex 92. ad quadratum ex 10. proximè, id est ut 8464. ad 100; adeoque aquam oporteret habere in Parentii Hypothesi plus quam octoginta vicibus majorem vim elasticam quam aër, cur igitur nulla in aqua elasticitas deprehenditur? multò major adhuc deberet esse elasticitas hydrargyri & aliorum fluidorum aquâ specifice graviorum.

Verùm quicquid sit de causa physica elateris aëris, ad institutum nostrum sufficit aëri vim elasticam inesse, quod præter experimenta ab initio hujus capitis relata, etiam probari potest effectibus antliæ Guerikianæ à Roberto Boylio postea magis perfectæ, cujus opera aër in vasis quibuscunque, quæ eidem rite applicari queunt, quantum velis rarefieri, atque adeò pars aëris quantacunque repetitis haustibus educi potest; quod minime succederet si aër virtute illa expansiva careret.

328. Est vero ejusmodi *Antlia Pneumatica* tubus æneus in tota sua cavitate perfecte lævigatus, ita ut embolus, qui ultro citroque in eadem cavitate agitandus antliæ cavitati ubique accuratissime quadret, nec ullas rimas relinquat per quas aër transpirare possit.

Embolus est pistillum ex circulis coriaceis orificio antliæ perfecte quadrantibus conflatum, quod antliæ cavitati ope manubrii centro ejus inserti ad fundum antliæ intrudi & dehinc iterum ad caput ejusdem seu orificium retrahi possit.

Epistomium Antliæ est clavicula cylindrica tubo incurvato antliæque

que fundo afferruminato ad angulos rectos inserta, libere hinc inde volvenda, foramine rotundo amplitudinis circiter tubi recurvi pertuso, eum in finem, ut foramen istud cum cavitate tubi recurvi antliæ communicans liberum aëri ex vase, ex quo aër expelli debet (quod vas *Recipiens* cum aliis brevius deinceps vocabitur) per tubum recurvum in antliam transitum permittat, & in alium sensum conversa, & cum sæpius jam nominato tubo recurvo non communicans modo commemoratum aëris transitum ex recipiente in antliam impediat atque tollat.

Spiraculum est cavitas ex summitate epistomii in foramen ejus transversum desinens, & cum tubi recurvi cavitate subinde communicans; hians acicula ænea pro rei indigentia obturanda, ejus usus, ut spiraculum apertum cavitati antliæ cum aëre subtili liberam communicationem permittat.

Tubus inflexus fundo antliæ afferruminatus plerumque desinit in cochleam marem, cui catinus æneus in centro cochlea fœmina excavatus circumvolvitur. Catino applicatur circulus coriaceus madefactus, cui recipiens utplurimum campaniforme imponitur, & circumcirca aqua affunditur marginibus catini, ad margines ejus elatis contenta, ad impediendum externi aëris ingressum.

Agitatio emboli constat uno ejus *itu* ex fundo antliæ usque ad orificium seu caput ejus, unoque *reditu* ab orificio usque ad fundum.

329. In figura 79. AB est corpus antliæ, EF embolus cavitati antliæ affabre adaptatus, ut antlia nusquam perfluere queat; BOH est tubus ad O inflexus antliæ fundo in B afferruminatus, & cum ejus cavitate & cum recipiente M communicans per foramen H; hujus tubi foramini inseritur epistomium IK, quod, prout in hunc vel illum sensum convertitur, tollit vel aperit communicationem antliæ cum recipiente M. Hoc epistomium IK perforatum est usque ad ejus foramen transversum, ac hæc cavitas vocatur spiraculum cui acicula I inseritur, ut communicatio antliæ cum externo aëre tollatur, acicula verò removetur iterumque extrahitur, quoties hac communicatione opus est; vel ad expellendum aërem ex antliæ cavitate, vel etiam ad admittendum externum aërem, eo casu, quo aër recipientis est condensandus. CD est catinus, cujus margines in C & D nonnihil elevati marginum instar sunt, aquam circa recipiens affusam continentes; catino circulus coriaceus in centro perforatus & madefactus applicatur, cui deinceps recipiens M imponitur mani-

manibusque fortiter astringitur, &, ut modo dictum, circumcirca aqua affunditur in catino, omnia ad id, ne aër exterior per ullam rimam in recipiens se insinuare queat. Et sic omnia ad usum erunt parata. Non me latet artifices nonnihil aliter antlias construere solere, quoad nonnullas circumstantias, cum ejus corpori situm inclinatum dent, qui tamen in schemate nostro est horizontalis; sed hoc accidentale est, nec ad ejus essentiales usus facit. Sic etiam spiraculum subinde aliter quam à nobis descriptum est parare consueverunt & tubum BOH; sed quocunque modo id construant, idem semper effectus debebit præstari, cum eo qui est in antlia hujus descriptionis. Imò vero, si quæ aliter parant, id duntaxat respicit faciliorem antliæ usum.

330. Præparatis omnibus quæ §. præcedenti descripta sunt, aperiatur epistomium IK, ut recipiens M cum antlia AB per tubum HOB communicare possit, obturato scilicet spiraculo I, & retrahatur embolus EF usque ad orificium antliæ A in *ef*, quo fiet ut aër qui cavitatem recipientis M & tubi HOB impleverat, se diffundat per totum spatium MHOB*ef*, compositum ex cavitatibus recipientis M, tubi HOB & antliæ B*ef*, atque adeò residuus recipientis aër se habebit ad aërem, quem antea continebat, ut recipientis M tubique HOB cavitates simul ad cavitates M, BOH & B*ef* simul sumtas, ac propterea raritas ejusdem aëris residui erit ad raritatem aëris totalis, qui antea recipienti inerat, ut MHOB*ef* ad MHOI. Dehinc clauditur epistomium IK, extrahiturque spiraculi I obturamentum, atque intrusione emboli *ef* versus fundum antliæ B aër ex antliæ cavitate per apertum spiraculum expellitur, ac clauso denuo spiraculo I prima emboli agitatio peracta erit, eodem tenore repetentur secunda, tertia, quarta, &c. agitationes; ex quibus ultro fluit sequens

PROPOSITIO XIX. Theorema.

331. *Si cavitates antliæ* Bef, *tubi* BH *& recipientis* M *simul, fuerint ad cavitatem solius recipientis* M *ut recta* Q *ad aliam* P, *raritas aëris residui post quamlibet emboli agitationem erit ad raritatem ejus ante hanc agitationem, ut* Q *ad* P. Fig. 79.

Nam, quia post emboli itum ex B in *ef* aër recipientis M (§. 330.) se diffundit per totum spatium MHOB*ef*, raritas aëris residui in cavitate M post emboli itum, ad raritatem ejus ante hunc itum,

erit, ut ſpatium MHB*ef* compoſitum ex cavitatibus recipientis M tubi HOB & antliæ B*ef* ad cavitatem recipientis ſolius M, id eſt (ſecundùm hypotheſin) ut Q ad P. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

332. Si ratio P ad Q continuetur in quotcunque terminis R, S, T, &c. & primus P exponat raritatem aëris in recipiente M in ſtatu naturali exiſtentis, termini ſequentes progreſſionis noſtræ Q, R, S, T, &c. indicabunt raritatem aëris in recipiente reſidui, poſt primam, ſecundam, tertiam, quartam, &c. emboli agitationem. Nam, quia raritas aëris poſt primam emboli agitationem eſt ad raritatem ejus ante hanc agitationem ut Q ad P, & hic terminus P exponit raritatem aëris in ſtatu naturali qualis erat ante primam agitationem, ideo exponet Q raritatem aëris in recipiente reſidui poſt primam emboli agitationem; ſic quia raritas aëris poſt primam ad raritatem poſt ſecundam emboli agitationem eſt ut P ad Q, vel ut Q ad R, & Q exponit raritatem aëris poſt primam emboli agitationem, exponet R raritatem aëris reſidui poſt ſecundam emboli agitationem; eodemque argumento conficitur exponere S, T, &c. raritates reſidui in recipiente aëris poſt tertiam, quartam, &c. agitationem.

COROLLARIUM II.

333. Hæc etiam obtinent, mutatis mutandis, in condenſationibus aëris recipientis. Quo caſu loco itus, quem diximus eſſe eductionem emboli ex fundo antliæ B usque in *ef*, nunc per itum intelligam intruſionem emboli *ef* usque ad antliæ fundum. Propterea, ſi progreſſio T, S, R, Q, P continuetur in totidem terminis *q*, *r*, *s*, *t*; &c. hi termini ſignificabunt raritatem aëris in recipiente M, poſt primum, ſecundum, tertium, quartum, &c. emboli itum ſeu in antliam intruſionem. Nam aër, qui ante primam intruſionem diffuſus erat in ſpatio MOef, poſt primam intruſionem redigetur in ſpatium multo anguſtius BOHM, vel neglecta cavitate tubi BOH (quæ inſenſibilis eſt præ cavitate recipientis M, & quæ tubi cavitas etiam ſubinde tollitur, ſpatium EFOH aqua implendo) raritas aëris ante primam emboli intruſionem, quæ dicitur P, ad raritatem ejusdem aëris poſt primum itum eſt ut ſpatium MHOef ad ſpatium M,

M, hoc est, ut Q ad P seu P ad q; ergo q repræsentat raritatem aëris in recipiente M post primam emboli intrusionem, & pari argumento termini sequentes r, s, t, &c. indicabunt raritates post secundam, tertiam, quartam, &c. emboli intrusiones.

Corollarium III.

334. Unde, cum (§. 20.) densitatibus raritates reciprocè sint proportionales, magnitudines Q, R, S, T, &c. quæ à magnitudine P æquè remotis q, r, s, t, &c. etiam reciproce proportionales existunt, exponent densitates aëris in recipiente M, post primam, secundam, tertiam, &c. emboli intrusionem in antlia AB.

PROPOSITIO XX. Problema.

335. *Cavitatibus antliæ & recipientis, vel saltem ratione unius ad alteram datis; definire, quot emboli agitationibus opus sit ad reducendum recipientis aërem ad datum raritatis vel densitatis gradum.* Fig. 80.

Ad axem AZ extructa sit quæcunque log-mica B1n, in qua magnitudines P, Q, R, S, &c. aptentur tanquam ordinatæ, ut in Po, Q1, R2, S3, T4, &c. quæ cum (secundùm hypothesin) sint in progressione geometrica, intervalla axis PQ, QR, RS, ST, &c. erunt æqualia. Numeri ordinatis adscripti indicant, quot emboli agitationibus opus sit ad redigendum recipientis aërem ad eum raritatis gradum, quem ordinata quæque exponit; sic Po significat nulla emboli agitatione aërem reduci ad raritatem Po seu P, S3 verò innuit 3 emboli agitationibus aërem reduci ad raritatem S3 vel S, & sic de reliquis; litera verò n denotat numerum quæsitum emboli agitationum, quibus aër Recipientis reducitur ad raritatem datam Z, quæ ordinata Zn repræsentatur. Hac raritates repræsentandi ratione fit, ut qualibet abscissa PS sit ad abscissam PQ ut numerus 3 ordinatæ S3 adscriptus ad unitatem 1 ordinatæ P1 adscriptam, hinc erit etiam PZ : PQ = n : 1, vel simpliciter n = PZ : PQ. Atqui PZ est log-us rationis Zn ad Po seu Z ad P, & PQ log-us rationis Q1 ad Po seu Q ad P; ergo numerus quæsitus n = log. (Z : P) : log. (Q : P). Atque hinc resultat regula Bernoulliana.

Log-us rationis (Z : P) *quam habet raritas aëris desiderati ad raritatem aëris naturalis, dividatur per log-um rationis* (Q : P) *quam habent*

habent antlia & recipiens simul, ad cavitatem solius recipientis, indicabit quotiens quæsitum agitationum numerum n. Qui erat inveniendus.

Hujus regulæ à Celeb. Jac. Bernoullio olim sine demonstratione publicatæ analysin ex calculo exponentialium petitam jam anno ni fallor 1693. promulgavit Cl. Varignon in Actis Acad. Reg. Scientiarum, eamque postea multis accessionibus auctam in Actis ejusdem Academiæ anni 1705. denuò cum publico communicavit.

COROLLARIUM I.

336. Cum log-us cujusque fractionis sit differentia log-orum numeratoris & denominatoris*, erit log-us $Z:P=\log. Z-\log. P$, & $\log. Q:P=\log. Q-\log. P$. adeoque n $(=\log. (Z:P):\log. Q:P)=(\log. Z-\log. P):(\log. Q-\log. P)$.

Hinc si $Q:P=2:1$, & $Z:P=6:1$, erit $\log. Z-\log. P=0.7781512$, & $\log. Q-\log. P=0.3010300$, adeoque $n=0.7781512:0.3010300=2\frac{1}{2}$ circiter.

Porrò ope canonis superioris ex tribus quantitatibus $Z:P$; $Q:P$ & n, datis quomodocunque duabus, tertia semper per log-os haberi potest. Sed hisce non vacat diutius immorari.

COROLLARIUM II.

337. Quanquam hoc Problema tantum de rarefactione aëris agit, canon tamen, in quem circa finem §. 335. incidimus, etiam casibus illis applicari potest, quibus aër recipientis non quidem rarefaciendus sed condensandus est. Ut si quæratur, quot emboli pulsibus aër recipientis in naturali vel quocunque alio statu constitutus, cujus densitas ad densitatem aëris in naturali statu data sit, ad gradum densitatis X reduci possit. Fiat ut X ad P ita P ad Z, & hæc Z exponet (§. 20.) raritatem aëris cujus densitas est X, quandoquidem P repræsentat densitatem & raritatem aëris in statu naturali. Jam datis $Q:P$, & $Z:P$ invenietur per canonem citatum numerus quæsitus n pulsuum emboli, quibus aëri raritas $Z=P^2:X$ seu densitas X inducitur. Verùm hoc casu, quo aër recipienti est intrudendus, magnitudo Z est infra ipsam P, atque adeo log-us rationis $Z:P$ erit negativus, hinc etiam valor numeri n negativus existet, quo tamen aliud non indicatur, nisi emboli itus in casu condensationis con-

contraria ratione se habere, quam in casu, quo recipientis aër est rarefaciendus, adeò ut ad signa non debeat attendi.

SCHOLION.

338. Modus est expeditus explorandi rationem cavitatis antliæ ad cavitatem recipientis, si vas quoddam cylindriforme super basi seu fundo suo rectum aqua impleatur tanta, quantam recipiens & antlia simul capere possunt & dehinc aquæ altitudo notetur per A; deinde ope siphonis tantum aquæ exhauriatur ex vase cylindrico, quantum aquæ capere potest antlia, residuæque in vase cylindrico altitudo signetur B, dico A fore ad B sicut Q ad P, nam cylindrus ex altitudine B æquatur cavitati recipientis solius, unde cum sit altitudo A ad altitudinem B, ut cylindrus A ad cylindrum B, id est, ut cavitates antliæ & recipientis simul ad cavitatem solius recipientis, hoc est (secundùm hypothesin) ut Q ad P, liquet propositum.

CAPUT VII.

De Viribus elasticis aëris cum densitatibus ejus comparatis.

NOn solum per experimenta, quorum nonnulla initio capitis proxime antecedentis recensui, constitit aëra vi elastica præditum esse; sed etiam Philosophis innotuit hanc vim expansivam aëris eo majorem esse, quo major sit aëris densitas, & vice versa; idcirco examinandum adhuc restat an elasticitates crescant præcise juxta proportionem densitatum, an vero secundum aliam quamcunque rationem. In hoc capite nonnulla exhibebimus theoremata ad hanc rem [illegible]scientia.

339. Cum aëris elasticitas consistat in nisibus illis, quibus aëris moleculæ à se mutuo recedere conantur, manifestum est, quod pressio, quam quodlibet planum, quo aëris expansio impeditur, à particulis aëris plano contiguis subit, æqualis est universæ vi singularum particularum urgentium.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA.

340. *Si aër sub volumine cujusvis prismatis* BOF *redigatur in mi-* Fig. 81.

 nus

nus volumen GOF, *nisusque, quibus proximæ quæque moleculæ* C, c *&* I, i *à se invicem recedere conantur, sint in reciproca ratione densitatis, cujus exponens est* n, *intervallorum* Cc *&* Ii *earundem molecularum, hoc est, in ratione* Cc^{-n} *ad* Ii^{-n}, *vel* Ii^{n} *ad* Cc^{n}. *Erunt vires, quibus plana* BC *&* GI *ab aëre elastico* BF *&* GF *premuntur, ut potestas* n *densitatis aëris* BF *ad similem potestatem aëris* GF. *Hoc est, ut* d^{n} *ad* D^{n} *vocando densitatem aëris in volumine* BF, d *& densitatem in volumine* GF, D.

Nam vis, quâ planum BC à particulis aëris ipsum tangentibus urgetur, est ad vim, qua planum GHI à particulis aëreis ipsi contiguis urgetur, est ut omnes particulæ in plano BC ad omnes, quæ sunt in plano GHI, vel potius, ut vis ex omnibus, quibus particulæ plano illi adhærentes pollent, resultans, ad vim resultantem ex viribus, quibus omnes moleculæ plani hujus GHI præditæ sunt, atqui vis omnium C, quæ sunt in plano BC, est ad vim omnium I, quæ sunt in plano GHI, ut vis unius C ad vim unius I, id est (secundùm hypothesin) ut Ii^{n} ad Cc^{n}; ergo vis, qua planum BC est ad vim, qua planum GHI urgetur, ut Ii^{n} ad Cc^{n}. Verum est Ii ad Cc ut IF ad CF, seu ut prisma BF ad prisma GF, id est, ut densitas aëris BF ad densitatem aëris GF vel, sicut *d* ad D, ergo Ii^{n} ad Cc^{n}, id est, vis, qua urgetur planum BC, ad vim, qua ab incluso aëre GF planum GHI urgetur, est ut d^{n} ad D^{n}, seu directe, ut densitatum dignitas cujus index est *n*. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

341. Adeoque, si vires, quibus particulæ C, *c*, & I, *i* à se invicem aufugere conantur, fuerint interstitiis Cc, Ii reciprocè proportionales, vires elasticæ aëris erunt densitatibus proportionales.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA.

Fig. 82. 342. *Si aër, qui est sub volumine* CFE, *redigatur in volumen minus* cfe *priori simile, ac vires, quibus moleculæ aëreæ in utroque volumine à se invicem recedere conantur, sint, ut in propositione præcedenti, in reciproca ratione potestatis ex indice* n *intervallorum* GH, gh *quibus moleculæ*, G, g *planis* BAE *&* bae *adjacentes à proximis* H *&* h *distant, erit vis, qua totum planum* BAE *ab aëre elastico* FCE *urgetur, ad vim, qua planum* bae *ab aëre elastico* fce *premitur, ut latus cubicum ex potestate*

testate densitatis d *aëris* FCE *ab indice* n *denominata, ad latus cubicum ex pari dignitate densitatis* D *aëris* cfbe; *hoc est, ut radix cubica ex* d^n *ad radicem cubicam ex* D^n.

Quia volumina CFE, *cfe* sunt solida similia, etiam plana BAE, *bae* erunt figuræ similes, & particulæ aëreæ in iis similiter positæ erunt. Propterea vis elastica aëris CFE, quæ exeritur in planum BAE, erit ad vim elasticam aëris *cfe* redundantem in planum *bae*, ut vis, qua unica particula G premit planum BAE ad vim unius particulæ *g* urgentis planum *bae*, id est (secundùm hypothesin) ut gh^n ad GH^n, seu quia GH & *gh* in solidis similibus CFE & *cfe* sunt lineolæ similiter positæ, ut ab^n ad AB^n. Jam quia solidum *cfe* est ad solidum CFE ut densitas aëris in FA ad densitatem aëris in volumine *fa*, id est, ut *d* ad D, tum etiam ut solidum *fa* ad solidum FA, vel quia hæc solida (secundùm hypothesin) similia sunt, ut ab^3 ad AB^3, erit $ab : AB = \sqrt{C}.\, d : \sqrt{C}.\, D$ & $ab^n : AB^n = \sqrt{C}.\, d^n$, ad $\sqrt{C}.\, D^n$. Ergo vis aëris, quæ exeritur in planum BAE, est ad vim, quæ exeritur in planum *bae*, ut latus cubicum ex d^n ad latus cubicum ex D^n. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

343. Figura verò KIE in plano BAE similis & æqualis figuræ *bae* pressionem subibit ab aëre elastico FA, se habentem ad pressionem, quam aër elasticus *fa* exerit in planum *bae*, ut latus cubicum ex d^{n+2} ad D^{n+2}. Nam pressio figuræ KIE est ad pressionem figuræ BAE, ut figura KIE, vel æqualis *bae* ad figuram BAE, id est, propter figurarum similitudinem ut ab^2 ad AB^2, & (§. 342.) pressio figuræ BAE ad pressionem figuræ *bae*, ut $\sqrt{C}.\, d^n$ ad $\sqrt{C}.\, D^n$, ergo ex æquo & per compositionem rationum pressio in figura KIE ad pressionem in figura *bae* se habet, ut latus cubicum ex d^{n+2} ad D^{n+2}. Ut habet Celeb. Newtonus Sch. Prop. 23. Lib. II. Pr. Ph. Nat. Math.

Corollarium II.

344. Hinc, si iterum fuerit $n = 1$, aut vires centrifugæ moleculারum aëris suis distantiis ab invicem reciproce proportionales, erunt vires elasticæ, seu pressiones, quas æquales figuræ KIE & *bae* à suo quæque aëre subibunt, in ratione densitatum, atque in hac circumstantia res convenit cum Corollario Propositionis præcedentis. Et con-

conversim, si vires elasticæ densitatibus proportionales fuerint, molecularum vires, seu conatus centrifugi, distantiis suis à proximis moleculis reciproce proportionales erunt.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA.

Fig. 83. 345. *Si vires elasticæ aëris fuerint, ut rationes, quas habent quantitates aëris ad residua voluminum, sub quibus aër continetur, eædem vires erunt ut ordinatæ ad lineam alterutri hyperbolæ æquilateræ asymptotam æquidistantem, densitates vero, ut abscissæ ordinatis homologæ, quarum abscissarum origo sit in ipsa hyperbolæ curva.*

Si segmenta AD lineæ datæ AB exponant quantitates aëris in eodem volumine, per totam AB exposito, contentas, eædem AD densitates aëris simul indicabunt; nam juxta §. 16, densitates sunt ut rationes, quas materiæ quantitates habent ad volumina, in quibus continentur, & hoc loco diversæ aëris quantitates eidem volumini inclusæ spectantur. Segmenta vero DB ipsius AB sunt residua voluminis AB, detractis scilicet ex hoc volumine aëris quantitatibus AD, AD, &c. In punctis D ad AB excitatæ sint perpendiculares DC exponentes vires elasticas aëris, densitates AD homologas habentis; quibus positis, & quia (secundùm hypothesin) elasticitas aëris sub densitate AD est, ut ratio AD ad DB; fiat, assumta quadam data H, ratio $DC:H = AD:DB$, eritque componendo $DC + H : H = AB : DB$, atque adeò producta recta EB datæ AB normali in G, ut GB fiat æqualis assumtæ datæ lineæ H, ductaque per punctum G linea GF alteri AB æquedistanti, erit $CF:DF = AB:DB$; vel ducta per C parallela CE ipsi AB, fiet $EG:BG = AB:CE$, unde curva AC cujus ordinatæ DC exponunt vires elasticas aëris, abscissæ verò AD densitates respectivas, est hyperbola inter asymptotas GF & GE. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

346. Si ipsæ AD fuerint exiguæ magnitudinis, respectu totius AB, trilineum, vel trilinea, ADC spectari possunt tanquam rectilinea absque errore sensibili, ac hoc casu elasticitates DC ejusmodi densitatibus AD quam proxime proportionales existerent; sin verò densitates majores sint, quam ut AD præ tota AB evanescat, elasticitates aëris in longe majori crescent proportione quam densitates.

Hy-

Hypothesin præsentem excogitavit Celeb. Jac. Bernoullius ejusque rationem physicam dare conatus est in tractatu suo de *Gravitate Aetheris* pag. 97. seqq. quas Lector ibi legere atque examinare poterit. Ex hac hypothesi etiam Celeb. ejus Frater Johannes hanc nostram Propositionem XIII. proposuit in eleganti sua Dissertatione *De Motu Musculorum* jam supra laudata.

Scholion.

347. Leibnitiana hypothesis, qua Illustris Vir statuit aërem ut plurimùm mixtum esse ex materia *comprimibili* & *incomprimibili* fortasse non incongrue ad præsentem propositionem exigi potest. In ista hypothesi aëris puri seu materia tantum comprimibili constantis elasticitates essent densitatibus proportionales, in aëre verò mixto ex comprimibili & incomprimibili vires elasticæ non sequuntur rationem densitatum, sed in majori harum ratione existunt inter se, ita ut pro varia proportione mixturæ ex comprimibili materia & incomprimibili elasticitatum cum densitatibus collatarum lex variare debeat, atque adeò rationi consentaneum sit, vires elasticas inter se esse in proportione rationum, quas quantitates materiæ comprimibilis sub aliquo volumine contentæ habent ad residua hujus voluminis materiæ incomprimibilis plena, ut habet hypothesis hujus Propositionis XXIII. Cæterum Boylius, Mariottus, Bernoullii, Amontonius, Joh. Polenus & alii accuratis experimentis comperierunt densitates aëris viribus comprimentibus, seu elasticitatibus ejus quam proxime proportionales existere. Modus unus inter alios quo experimentum sumserunt, est qui sequitur.

348. Sit tubus ABC instar siphonis reflexus apertus in A & hermetice sigillatus in C, per orificium A argentum vivum infunditur in breviore crure pertingens usque in E, & in longiore AB usque in H, & ubi omnia in statu manente fuerint, basis D ab incumbente Mercurio HD, aucto pressione totius atmosphæræ, seu 28. digitorum, eandem pressuram subibit, quam basis E ab elasticitate aëris spatio CE inclusi; si porrò Mercurius infundatur per orificium A ut tandem subsistat in I, & in altero ramo CB pertingat usque ad G, ita ut aër CE in spatium angustius CG redactus sit, basis F pressuram sustinebit columnæ IF auctæ atmosphæræ gravitatione 28. digitorum, alteraque G ab aëre elastico CG parem pressionem subibit. Idcirco si IF + 28. digit. Mercurii ad HD + 28. digit. fuerit, ut Fig. 84.

CE ad CG, erunt vires comprimentes ſeu elaſticitates aëris ejusdem denſitatibus directe proportionales, ut à Mariotto, Amontonio & Poleno pluribus experimentis comprobatum eſt. Vid. Mariotti *Tentamen de Natura Aëris*, tum etiam Tractatus de Motu Aquarum, in quibus ejusmodi experimenta à ſe capta diſtincte exponit, perinde ac poſt ipſum fecit Amontonius in Commentariis Acad. Scient. Pariſ. Sed quia communiter ſpatia CE, CG, &c. perexigua ſunt in eorundem menſuris & proportionibus explorandis, facile eſt errorem committere; idcirco Mariottus modo iſti proportiones inveſtigandi inter vires elaſticas, ſeu vires comprimentes, & denſitates aëris, merito alium adjecit ex obſervationibus barometri petitum, quem Jac. Bernoullius deinceps magis excoluit in ſuo Tractatu de Gravitate Ætheris. Hic modus eſt indirectus, quia in eo aſſumitur id, quod eſt probandum inſtar principii, & concluſio confertur cum phænomenis, cum quibus ſi conſpiraverit retrogrado ordine concluditur principium aſſumtum eſſe verum. Nam fiſtulæ barometri in hoc altero experimentali modo infunditur Mercurius ad certum ſignum usque, reliquo tubi aëri naturalis conſiſtentiæ relicto, non verò, ut in communi barometrorum conſtructione fieri ſolet, totus tubus hydrargyro impletur; dehinc inverſo tubo, obſtructo ejus orificio, & demiſſo infra ſuperficiem Mercurii in vaſculo quodam ſtagnantis, aperitur obſtructum orificium, ut Mercurius in fiſtula vaſculo perpendiculariter inſiſtenti deſcendere queat, qui non totus quidem ex tubo effluet, ſed tamen humilius ſe in fiſtula demittet, propter aërem fiſtulæ introductum, quam in barometro ordinario; ex quo, quantum fieri poteſt, omnis aër diligenter excludi ſolet. Jam ſi mercurius hac operatione poſita, ad illud ipſum ſignum delabitur, & in eo ſubſiſtit, in quo ipſum ſubſiſtere debere calculus indicavit, qui in hypotheſi fundatur, quod denſitates ſint viribus comprimentibus proportionales, ecquis de bonitate hypotheſeos ambiget? Quod vero Mercurius ad ea præciſe ſigna perveniat, quæ ipſe calculus in hac memorata hypotheſi fundatus determinavit, id conſtitit Mariotto & Jac. Bernoullio ex obſervationibus accuratis. Quousque vero Mercurius in præmemoratis circumſtantiis ſe demittere debeat, manifeſtabit ſequens Problema.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA.

Fig. 85. 349. *Datis atmoſphæræ preſſione, & longitudine alicujus fiſtulæ* AB *apertæ*

apertæ in B, *clausæ verò in* A, *definire ad quam altitudinem intra fistulam suspensus manere debeat Mercurius, si, post impletionem fistulæ eo usque ut sola pars longitudinis datæ,* V *æqualis, Mercurii vacua, sed aëris naturalis plena retineatur, & postquam apertum orificium* B *digiti pulpa vel alia ratione obstructum, inversoque tubo idem obstructum orificium argento vivo in vasculo* D *stagnanti immersum fuerit, tubo existente in situ perpendiculari, ita ut aër tubo inclusus in summitate fistulæ* AB *æquali* V *primùm se colligere possit, dein remoto digito orificium* B *obstruente, Mercurius libere descendere queat.*

Fiat AG æqualis columnæ argenti vivi æquivalentis atmosphæræ, seu 28. digitorum circiter, eique in G ad angulum rectum AGO aptetur linea indefinite longa GH, & in recta AL per A transeunte, ipsi GH parallela sumatur AL æqualis V, seu columnulæ aëreæ AC tubo AB Mercurii pleno usque in C intromissæ, descriptaque intra asymptotas AGH hyperbola LKN per punctum L, sumtaque in asymptota AG linea AB æqualis fistulæ AB longitudini datæ, ducatur per punctum B linea BK angulum semirectum constituens cum asymptota AG, agaturque ex puncto K hyperbolæ, in quo recta BK ei occurrit, linea IK parallela asymptotæ GH, eritque AI æqualis altitudini columnæ argenti vivi BM, in qua in æquilibrio existet cum externa atmosphæræ pressione, & BI vel IK exponet spatium AM, in quod aër naturalis consistentiæ in fistula AC sese extendet. Fig. 86. Fig. 85.

Demonstr. Quia densitas aëris AM est ad densitatem aëris AC ut AC ad AM, id est, ut AL ad IK, seu propter hyperbolam LKN, ut GI ad GA, & densitates aëris viribus elasticis ejus sub illis densitatis gradibus sunt (secundùm hypothesin) ut hæ densitates, erit vis elastica aëris AM ad vim elasticam aëris AC, ut GI ad AG; atqui aër naturalis consistentiæ AC vim elasticam habet atmosphæræ pressioni per AG expositæ æqualem, ergo vis elastica aëris AM æquipollet columnæ Mercuriali GI, atque adeo pressio composita ex elasticitate aëris AM & gravitatione columnæ BM = AI, est AG composita ex AI & IG; æqualis ergo est interna pressio, resultans ex vi elastica aëris AM & gravitatione Mercurii MB, externæ atmosphæræ AG, ac propterea columna argenti vivi in altitudine MB intra fistulam librata hæret. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

350. Ex hisce nunc facile elicietur valor rectæ BI aut æqualis IK vel AM. Sed in hac determinatione casus distingui debent. Nam fistulæ longitudo AB major esse potest quam AG, vel minor. Si illud, & quia angulus semirectus IBK lineam BI alteri IK æqualem efficit, adeo ut figura IKPB sit quadratum æquale duobus rectangulis IO & GP simul, hoc est $IK^2 = IK.BG + GH.HN = IK.BG + AG.AL$, ergo $IK = \frac{1}{2}BG + \sqrt{(\frac{1}{4}BG^2 + AG.AL)}$. Hinc existente BG nulla coincidentibus punctis B & G, fiet $IK = \sqrt{(AG.AL)}$.

Sin vero iisdem positis fistulæ AB longitudo minor fuerit quam AG, fiat Aβ eidem fistulæ longitudini æqualis, positaque constructione problematis antecedente paragrapho tradita, simili fere argumento invenietur $ik = -\frac{1}{2}\beta G + \sqrt{(\frac{1}{4}\beta G^2 + AG.AL)}$.

COROLLARIUM II.

351. Si jam cum Cl. Jac. Bernoulli, qui etiam in suo Tractatu *De Gravitate Ætheris* pag. 117. seqq. hoc problema tractavit, ponamus AC vel AL, a; BC, b; adeòque $AB = a + b$, $AG = b + c$, unde $AG - AB = \beta G = c - a$, & denique $CM = y$; substitutis hisce valoribus in ultima æqualitate paragraphi proxime antecedentis, invenietur $ik = a + y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab)}$ adeoque $y = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab)}$, quæ est ipsissima æquatio, quam insignis vir etiam reperit. In eandem incidissemus æquationem, si in altera formula corollarii præcedentis loco BG substitutum fuisset $a - c$.

In numeris sit fistula AB, 21. digit. AG. nunc 27. digit. AC, 1. dig. invenieturque ik vel AM, 3. digitorum adeòque BM, 18. digitorum.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA.

Fig. 85, 86. 352. *Datis columna* AG *argenti vivi, æquivalente pressioni atmosphæræ, & longitudine fistulæ* AB, *definire quantum spatium* AC *aëris naturalis consistentiæ plenum in summitatem fistulæ debeat introduci, ut, postquam aër ex* AC *se extendit in spatium* AM, *Mercurius in data altitudine* BM *intra fistulam suspensus maneat.*

In

In hoc problemate ex datis AG, AB, AI vel BM quæritur AL vel AC aut V. Idcirco facto iterum angulo semirecto ABK, & AI = datæ, in fistula altitudine Mercurii manentis BM, agatur IK parallela asymptotæ GH rectæ BK occurrens in K, per quod punctum nunc ducenda est hyperbola NKL, rectæ AL ipsi GH parallelæ occurrens in L, erit AL spatium quæsitum. Demonstratio eadem penitus est cum demonstratione propositionis antecedentis, atque adeo hoc loco non repetenda. In numeris habebitur AL applicando rectangulum datum GIK ad lineam AG, quæ atmosphæræ pressionem exponit: nam GI est excessus, quo AG excedit datam AI vel BM, & IK vel BI aut AM est etiam (secundùm hypothesin) data, adeoque & rec-lum GI. IK eique æquale rec-lum AG. AL datum erit; adeo ut diviso rec-lo GI. IK per AG, quotiens, vel in geometrica phrasi quarta proportionalis ad AG, IG & IK futura sit AL denotans quantitatem quæsitam aëris in fistulam AB intromissi, ut Mercurius in data altitudine BM consistat. Quod erat inveniendum.

SCHOLION.

353. Si jam determinationes hujus & antecedentis propositionis cum phænomenis convenerint, ut satis egregie cum iis conspirare deprehensæ sunt; omnino inferri debet, assumptam hypothesin, quod densitates aëris viribus comprimentibus seu elasticitatibus ejus proportionales sint, naturæ satis consentaneam esse, modo ea non in majore latitudine sumatur, quam experimenta, cum quibus convenire videtur. Ejusmodi verò experimenta cum aëre mediocris densitatis capta sunt; idcirco, si quis præmemoratam hypothesin ad aërem densissimum vellet extendere, insigniter hallucinaretur, quandoquidem juxta superius dicta (§. 346.) in aëre densiore elasticitates majorem habent inter se proportionem quam densitates ipsis convenientes.

CAPUT VIII.

De Densitatibus aëris in diversis Atmosphæræ locis in omni possibili elasticitatum hypothesi.

IN hoc capite non agetur de aliis aëris densitatibus quam quæ aëri à pondere incumbente inducuntur; propterea in hisce ser-

mo non erit de rarefactione & condensatione aëris, quæ à calore & frigore proveniunt.

DEFINITIONES.

I.

Fig. 87, 88. 354. Curva C1C2C circa axem OA2A extructa, cujus ordinatæ AC, 2A2C, &c. exponunt gravitatem variabilem cujusque corporis in locis A, 2A, &c. per quæ ordinatæ transeunt, dicatur *scala gravitatis variabilis*.

II.

355. Curva verò B1B2B circa eundem axem A2A descripta esto *scala densitatum* atmosphæræ, quia ordinatæ ejus AB, 2A2B, &c. exponunt densitates atmosphæræ in locis A, 2A, &c. per quæ ordinatæ ductæ sunt.

III.

356. Et curva A2DD subter CB horizontem circa eundem axem AO descripta, sit *scala elasticitatis* aëris, cujus scilicet abscissæ AO, A2O, A1O repræsentent elasticitates aëris sub densitatibus OD, 2O2D, 1O1D.

IV.

357. Productis ordinatis scalæ elasticitatis aëris DO, 1D1O, 2D2O in E, 1E, 2E, &c. si singula rectangula DOE, 1D1O1E, 2D2O2E inter se & dato plano æqualia fuerint, puncta E, 1E, 2E, &c. erunt in curva E1E2Ee, quam *reciprocam scalæ elasticitatis* deinceps vocabimus.

AXIOMA.

358. Elater aëris æqualis semper est vi comprimenti, atque adeo in quolibet atmosphæræ loco aëris vis elastica æquivalet ponderi aëris incumbentis. Nam vires directe contrariæ, ut vis aërem comprimens & elater aëris, æquales sunt, quia omnia in statu manenti posita esse intelliguntur.

PRO-

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA.

359. *Ordinatæ quæcunque æquales* ab & od *in scalis densitatum & elasticitatum aëris ultra communem scalarum axem* AT *productæ, in scala gravitatis variabilis & curvâ scalæ elasticitatis aëris reciproca perpetuò areas æquales* ACca & OEeo *abscindent.* Fig. 87.

Ordinatæ $\alpha\beta$ & $\omega\delta$ suis respectivis *ab* & *qd* indefinite vicinæ protrahantur in $\varkappa$ & *f*. Jam gravitas aëris *a*T loco *a* incumbentis, aërique in hoc loco densitatem *ab* vel *od* inducens (§. 358.) æquatur elasticitati aëris expositæ per abscissam A*o*, & pondus aëris loco α incumbentis æquatur elasticitati aëris in α, quæ repræsentatur abscissa Aω; adeoque differentia ponderum αT & *a*T, id est, pondus columnulæ aëreæ αa æquabitur differentiæ elasticitatum Aω & A*o* hoc est ωo. Atqui (§. 32.) pondus columnulæ αa exponitur solido *ab.ac.a*α; ergo hoc solidum æquatur alii solido ex ωo in datum planum EO.OD, vel (§. 357.) ipsi æquale planum *eo.od*, id est, *ab. ac.a*α = *eo.od.*ωo; seu deletis (secundùm hypothesin) æqualibus *ab* & *od*, rec-lum *ac.a*α = rec-lo *oe.*ωo, & cum descendendo versus CB & ED hoc ubique eveniat, ut singula elementa arearum AC*ca* & OE*eo* æqualia sint, æquabuntur etiam universa, id est omnia *ac. a*α seu area AC*ca*, quam illa exhauriunt, erunt æqualia omnibus *oe.*ωo, seu areæ OE*eo*. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

360. Si nunc scala elasticitatum aëris A1D2D ponatur esse parabola indefiniti gradus, cujus quælibet ordinata 1O1D sit ut A1O^m, seu ut dignitas abscissæ A1O ab exponente *m* denominata, erit propter rec-lum D1O1E, æquale dato rectangulo DOE, atque adeo propter 1E1O alteri 1D1O reciproce proportionalem, 1E1O reciproce ut A1O^m. atque adeo curva E1E2E hyperbola indefiniti gradus m. Sit insuper curva C1C2C alia hyperbola indefiniti gradus *n*, adeo ut quælibet ejus ordinata 1C1A sit reciproce ut abscissæ dignitas *n*, id est, reciproce ut O1A^n. Jam si æquales ordinatæ 1A1B vel 1O1D exponunt densitatem aëris in 1A, (§. 359.) quadrilinea A1A1CC & O1O1EE æqualia erunt, atqui juxta methodum supra (§. 92.) expositam invenitur Quadrilineum A1A1CC = (OA. AC − O1A.1A1C) : n − 1, & quadrilineum hyperbolicum OE1E1O

= (A1O.

$=(A1O.\ 1O1E - AO.\ OE) : m - 1 = (AO.\ OE - A1O.\ 1O1E) : 1 - m$. Ergo $(OA.\ AC - O1A.\ 1A1C) : n - 1 = (AO.\ OE - A1O.\ 1O1E) : 1 - m$. Jam, quia ipsæ AC & OE nullius sunt determinatæ magnitudinis, fiat $AC : EO = n - 1 : 1 - m$, eritque rec-lum OA. AC ad rec-lum AO. OE in hac eadem ratione ac consequenter etiam rec-lum O1A. 1A1C ad rec-lum A1O. 1O1E in eadem erit ratione $n - 1$ ad $1 - m$ seu AC ad OE. At vero in hyperbola C1C2C est rec-lum $OA.\ AC : O1A.\ 1A1C = O1A^{n-1} : OA^{n-1}$, ergo ex æquo & per compositionem rationum erit $OA.\ AC : A1O.\ 1O1E = AC.\ O1A^{n-1} : OE.\ OA^{n-1}$, item in hyperbola E1E2E, est $A1O.\ 1O1E : AO.\ OE = AO^{m-1} : A1O^{m-1}$ (hoc est propter parabolam A2D1D) $= OD^{m-1:m} : 1O1D^{m-1:m}$, ergo denuo ex æquo habetur $OA.\ AC : AO.\ OE = AC.\ O1A^{n-1}.\ OD^{m-1:m} : OE.\ OA^{n-1}.\ 1O1D^{m-1:m}$. Ex hac vero deducitur $O1A^{n-1}.\ OD^{m-1:m} = OA^{n-1}.\ 1O1D^{m-1:m}$, & rejectis quantitatibus datis, seu constantibus, quæ proportiones non alterant, scilicet $OD^{m-1:m}$, & OA^{n-1}, erit $O1A^{n-1}$ ut $1O1D^{m-1:m}$, vel dividendo exponentes per $m - 1 : m$, resultabit sequens 1O1D ut $O1A^{mn-m:m-1}$. Hinc

1°. Si cubus vis comprimentis proportionetur quadrato-quadrato densitatis, & gravitas sit reciproce ut quadratum distantiæ à centro gravium, erunt $m = \frac{3}{4}$, & $n = 2$, adeoque $mn - m : m - 1 = -3$, ergo 1O1D erit hoc casu, ut $O1A^{-3}$, hoc est, densitas erit reciproce ut cubus distantiæ.

2°. Si cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & gravitas reciproce ut quadratum distantiæ, fient $m = \frac{3}{5}$ & $n = 2$, ergo $mn - m : m - 1 = -\frac{3}{2}$, id est, densitas 1O1D erit in reciproca sesquiplicata ratione distantiæ O1A.

3°. Si vis comprimens sit ut quadratum densitatis, & gravitas in reciproca duplicata ratione distantiæ, fient $m = \frac{1}{2}$ & $n = 2$, ergo $mn - m : m - 1 = -1$, quod indicat densitatem hoc casu esse in reciproca ratione distantiæ.

Ex hisce ergo liquet veritas assertionum nonnullarum sine ulla demonstratione prolatarum ab Illustr. Newtono in Scholio post Prop. 22. Lib. II. *Pr. Phil. Nat. Math.* Et, quanquam hoc corollarium tantum casus sit particularis propositionis nostræ generalissimæ, idem tamen infinities infinitos casus diversos in se continet.

Co-

COROLLARIUM II.

361. Nam si scala elasticitatum aëris $A2D1D$ fuerit linea recta, hoc est, si elasticitas aëris, aut vis comprimens, est ut densitas, curva $E1E2E$ erit hyperbola conica intra asymptotas CA & AO descripta; est enim $1E1O : EO = OD : 1O1D$ (propter rectam $A2D1D$) $= AO : A1O$. Hinc, si hyperbolæ quadrilineæ $EO1O1E$, $1O2O2E1E$, &c. sint æquales inter se, & hisce æqualibus quadrilineis æquentur totidem in scala gravitatis variabilis $AC1C1A$, $1A1C2C2A$, &c. homologæ ordinatæ AB, $1A1B$, $2A2B$, &c. in scala densitatum $B1B2B$ erunt continue proportionales. Nam propter æqualitatem trapeziorum hyperbolicorum $O1E$, $1O2E$, &c. abscissæ AO, $A1O$, $A2O$, &c. vel abscissis hisce respectivæ ordinatæ in scala elasticitatis OD, $1O1D$, $2O2D$, &c. hoc est AB, $1A1B$, $2A2B$, &c. ipsis eodem ordine sumtis æquales erunt in continua ratione. Idcirco, si vires comprimentes, vel æquivalentes vires elasticæ aëris densitatibus ejus proportionales, in scala vero gravitatis quadrilinea $AC1C1A$, $1A1C2C2A$, &c. æqualia fuerint, densitates aëris in locis A, $1A$, $2A$, &c. erunt semper in continua ratione.

COROLLARIUM III.

362. Propterea si gravitas in loco quolibet $1A$, seu ordinata $1A1C$ fuerit reciproce ut $O1A^n$, existente curva $C1C2C$ hyperbola indefiniti gradus exponentis n, & magnitudines OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. sumantur in progressione arithmetica ascendente, ordinatæ scalæ densitatum AB, $1A1B$, $2A2B$, &c. erunt continue proportionales. Nam quia OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. proportionales sunt hisce sequentibus eodem ordine sumtis $O2A^{n-1}$, $O1A^{n-1}$; OA^{n-1}, &c. hisce jam proportionantur rectangula $OA.AC$, $O1A.1A1C$, $O2A.2A2C$, &c. ergo hæc rectangula sunt etiam in progressione arithmetica, atque adeo $(O1A.1A1C - OA.AC) : n-1$ id est, juxta ea quæ §. 360. dicta sunt, quadrilineum $AC1C1A$ æquatur $(O2A.2A2C - O1A.1A1C) : n-1$, seu quadrilineo $1A1C2C2A$; adeoque (§. 361.) ordinatæ AB, $1A1B$, $2A2B$, &c. erunt continue proportionales.

COROLLARIUM IV.

363. Si nunc n sit 1, adeoque curva $C1C2C$ hyperbola conica centrum habens in O, quadrilinea æqualia $A1C$, $1A2C$, &c. habebunt abscissas OA, $O1A$, $O2A$, &c. continue proportionales, & vice versa, si hæ abscissæ fuerint in progressione geometrica, quadrilinea prædicta erunt æqualia, ac consequenter densitates AB, $1A1B$, $2A2B$, &c. erunt continue proportionales, plane ut habet Prop. 21. Lib. II. *Princ. Ph. Nat. Math.* Cel. Newtoni, quam seorsim demonstravit.

COROLLARIUM V.

364. Si n sit 2, atque adeo curva $C1C2C$ hyperbola quadratica; id est, si gravitates corporum sint in reciproca duplicata ratione distantiarum à centro, & OA^{-1}; $O1A^{-1}$; $O2A^{-1}$, &c. in progressione arithmetica, atque adeo seriei hujus reciproca OA, $O1A$, $O2A$, in progressione harmonica, (§. 361. 362.) ordinatæ AB, $1A1B$, $2A2B$, &c. erunt in progressione Geometrica. Hoc ipsum demonstratum dedit alia ratione Cel. Newtonus Prop. 22. Lib. II.

COROLLARIUM VI.

365. Si $n = -1$, hoc est, si gravitas est ut distantia corporis à centro O, curva $C1C2C$ mutabitur in lineam rectam transeuntem per centrum O, seriesque, quæ juxta §. 362. debet esse in arithmetica progressione OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. nunc fiet OA^2, $O1A^2$, $O2A^2$, &c, adeoque, si quadrata distantiarum OA, $O1A$, $O2A$, &c. fuerint in progressione arithmetica, trapezia rectilinea, $A1C$, $1A2C$, &c. erunt æqualia, atque adeo (§. 361.) ordinatæ scalæ densitatum AB, $1A1B$, $2A2B$, erunt continue proportionales. Ut asseruit, sed absque ulla demonstratione, laudatissimus Newtonus in Scholio post Prop. XXII. Lib. II. *Princ. Phil. Nat. Math.*

COROLLARIUM VII.

366. Sin verò n fuerit o, id est, si gravitas corporum uniformis seu constans fuerit, qualis communiter considerari solet, tunc scala

gra-

gravitatis $C1C2C$ erit linea recta axi AT parallela, ut in fig. 88. & series OA^{1-m}, $O1A^{1-m}$, $O2A^{1-m}$, &c. quæ constituere debet progressionem arithmeticam ad id, ut ordinatæ AB, $1A1B$, $2A2B$, &c. sint in contigua proportione, nunc erit simpliciter OA, $O1A$, $O2A$, &c. in progressione arithmetica, atque adeò ipsæ distantiæ $A1A$, $1A2A$ ordinatarum scalæ densitatum atmosphæræ erunt æquales, scalaque ipsa $B1B2B$ proinde erit logarithmica. Huic corollario simile quid jam olim primus, quod sciam, observavit acutissimus Edmundus Hallejus.

Corollarium VIII.

367. Iisdem, quæ in corollario præcedenti, positis, si scala gravitatis uniformis tC producatur usque ad occursum E hyperbolæ $E1E2E$, & per hoc punctum E agatur EOD scalæ elasticitatis aëris $A2D1D$ occurrens in D, erit subtangens ab log-micæ $B1B2B$ æqualis abscissæ AO scalæ elasticitatis, ordinatæ OD correspondenti. Nam (§. 359.) est $ac.\,an = eo.\,ou$ atque adeò $ou : an = ac : eo = EO : eo = od : OD = Ao : AO$. atqui $g\delta$ vel $\gamma\beta$ est ad dg vel $ou = od$ vel $ab : Ao$, ergo ex æquo $\gamma\beta : an = ab : AO$. & propter triangula similia $\beta\gamma b$ & bah, est $\gamma\beta : an$ vel $b\gamma = ab : ah$, ergo etiam $ab : AO = ab : ah$, atque adeò AO æquatur subtangenti ah logarithmicæ $B1B2B$.

Corollarium IX.

368. Præterea erit, iisdem positis, quodlibet quadrilineum hyperbolicum $OE1E1O$ ad datum rec-lum AOE, ut $A1A$ distantia ordinatarum AB & $1A1B$ æqualium ordinatis OD, $1O1D$ scalæ elasticitatis applicatis hyperbolæ OE, $1O1E$, in directum positis, ad subtangentem ab log-micæ $B1B2B$. Nam, quia (secundum hypothesin) $OE1E1O =$ rec-lo $AC1C1A$, erit quadrilineum $OE1E1O : AO.\,OE = A1A.\,AC : AO.\,AC = A1A : AO = A1A : ah$.

Corollarium X.

369. Quia altitudines Mercurii in barometro sunt, ut pressiones atmosphæræ in diversis ab horizonte distantiis, & pressiones atmosphæræ & elasticitates aëris pressiones illas sustinentis, si elasticitates densitatibus aëris proportionales fuerint, ut quidem in corol-

 lariis

lariis 2, 3, 4, 5, & 6. hujus Propositionis suppofuimus, altitudines Mercurii in barometro in locis A, 1A, 2A, &c. positi, erunt ut ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. in scalâ densitatum B1B2B, si scilicet gravitas corporum uniformis, seu in omni à centro terræ O distantia eadem fuerit, ut tuto id assumere licet. Propterea datis quantitatibus Mercurii in barometro in locis A, 1A, & 2A existente, & altitudine A1A; invenietur logarithmorum ope altera distantia seu altitudo A2A. Nam, quia A1A est ad A2A ut log-us rationis AB ad 1A1B, ad log-um rationis AB ad 2A2B; si log-us rationis AB: 2A2B ducatur in datam altitudinem A1A, & productum dividatur per log-um rationis AB: 1A1B; quotiens manifestabit altitudinem quæsitam A2A. Sin verò ex datis altitudinibus A1A, A2A & ratione AB: 1A1B quæratur ratio AB: 2A2B, seu ratio Mercurii in barometro collocato in A ad quantitatem Mercurii barometro existente in 2A; log-us rationis AB: 1A1B tantum multiplicandus est per A2A & productum dividendum per A1A, & manifestabit quotiens log-um rationis quæsitæ AB: 2A2B, invento verò log-mo ipsa ratio ex tabulis usualibus logarithmorum illicò innotescet.

SCHOLION.

370. Ut regula noni corollarii exemplo aliquo illustretur, ponatur altitudinem Mercurii in A seu AB esse 28. digitorum, & in altitudine loci 1A supra A, id est A1A; 63. pedum Mercurium unâ linea deficere, ita ut 1A1B tantum sit 335. linearum, cum AB, seu 28. pollices, contineant 336. lineas. In altitudine vero A2A seu in loco 2A quantitas argenti vivi 16¼ lineis deficiat à quantitate in A seu AB, adeo ut 2A2B tantum sit 319¾ lin. Quæritur in hisce datis altitudo A2A. Juxta canonem (§. 369.) log-us rationis AB: 2A2B seu nunc log-us 336 : 319¾ multiplicari debet per A1A seu 63. & productum dividi per log-um AB: 1A1B seu log. 336 : 335, & quotiens indicabit quæsitum; atqui productum ex log. 336 — log. 319¾ in 63. divisum per log. 336 — log. 335, præbet 1053½, ergo hic numerus exprimit, quot pedum sit altitudo quæsita. Hoc exemplum sumsimus ex Mariotti *Tentamine De Natura aëris*, qui pag. 194. & 195. refert, Celeberrimum Cassinum observasse olim in summitate alicujus Montis in Provincia Galliæ, cujus altitudinem diligenti dimensione 1070. pedum invenerat, Mercurium barometri 16¼ lineis depressiorem fuisse, quam ad radicem montis ubi ad 28. digit.

digit. subsistebat, idcirco altitudo montis calculo nostro elicita 17. circiter pedibus deficit ab observata 1070. pedum, sed hæc differentia forte inde venit, quod cum Mariotto posuimus in altitudine 63. pedum argentum vivum una linea deficere à Mercurio barometri in horizonte ad 28. digitos sublato. Verùm si altitudinem in qua Mercurius una linea in barometro decrescit, vel uno tantum pede major fiat, scilicet 64. pedum, calculus, juxta Canonem superiorem subductus, præbebit altitudinem Montis $1069\frac{1}{11}$, adeò ut unica $\frac{10}{11}$ma pedis ab observata altitudine deficiat.

371. Cl. Mariottus, etsi hypothesin quod densitates aëris viribus comprimentibus proportionales sint, suam fecit, atque logarithmico calculo altitudines locorum ex argenti vivi differentiis eliciendas censuit, in calculo suo, eidem exemplo paragraphi præcedentis aptato, logarithmis tamen non est usus, sed faciliori quidem, minus exacto verò computo altitudinem montis elicuit 1080. pedum, idque sequenti ratione. Quoniam atmosphæræ pressio in loco infimo æquivalet 28. digitis Mercurii seu 336. lineis, totam atmosphæram in 336. partes æquiponderantes dirimit, quarum unaquæque unius lineæ Mercurii gravitationi æquipollet; sed harum aëris partium altitudines inæquales erunt, adeo quidem, ut ea, quæ divisioni 168. semissi ipsius 336. respondet, duplo altior seu major futura sit quam infima altitudo 63. ped. primæ Mercurii lineæ versus horizontem conveniens, atque adeo sit 126. pedum; altitudinum seu partium atmosphæræ differentias, singulis Mercurii lineis homologas, sursum crescere fingit in arithmetica progressione, quam à geometrica, juxta quam incrementa partium fieri recte judicat, perparum abludere arbitratur; idcirco dividendo 63. per 168, secundæ atmosphæræ divisionis incrementum supra primam horizonti proximam reperit $\frac{63}{168}$, & ducendo 63. in $16\frac{1}{3}$, invenit 1029. ped. pro altitudine totali, seu montis altitudine, si modò singulæ atmosphæræ divisiones $16\frac{1}{3}$ lineis Mercurii respondentes æquales extitissent, verum quia crescunt in proportione arithmetica, ideò omnia incrementa repertæ altitudini 1029. pedum adjicit; hunc in finem numerum 136. qui est aggregatum omnium numerorum naturalis progressionis 1, 2, 3. usque ad 16. inclusive, ducit in $\frac{63}{168}$, & productum 51. ipsi exhibet summam omnium incrementorum, atque adeo hic numerus 51. alteri 1029. additus dedit summam 1080. exprimentem altitudinem montis quæsitam.

372. Cl. Maraldus atmosphæram itidem in 336. partes æquipon-

 deran-

derantes distinguit perinde ac Mariottus, & harum partium altitudines in progressione arithmetica crescere fingit, agnoscens tamen extensiones aëris non esse præcise in reciproca ratione ponderum incumbentium, ut Mariotti hypothesis requirit, deinde etiam à Mariotti numeris discessit, statuens primam eamque horizonti contiguam atmosphæræ partem gravitati unius lineæ Mercurii convenientem esse 61. pedum, & post hanc sequentes crescere juxta numeros 1, 2, 3, 4, &c. ita ut partes secunda, tertia, quarta, &c. futuræ sint 62, 63, 64, &c. pedum. Hanc progressionem in omnibus observationibus barometro factis super diversis Galliæ montibus, satis prope quadrare se deprehendisse indicat laudatus vir; cum protrahendæ inde ab Observatorio Regio per Meridionalem Galliæ partem Meridianæ Cel. Cassino opus dirigenti operam suam juxta alios commodaret; atque adeo intra limites semissis Milliaris Gallici, quibus observationes suas terminari dicit, hujus progressionis beneficio locorum altitudines satis accurate haberi posse errore vix unam alteramque hexapodam excedente; ac juxta eandem progressionem altitudo atmosphæræ foret 12796. hexapodarum, seu, quod idem fere est, 6. Milliarium Gallicorum cum semisse. Hæc Cel. Maraldi progressio calculo aptissima est, sed cum observatione Cassiniana, ex Mariotto supra §. 370. relata, non satis convenire videtur, nam altitudo ex omnibus 16¼ divisionibus seu partibus composita invenietur esse 1122. pedum; & tamen altitudo montis inventa erat 1070, excessus est 52. pedum, seu plus quam 8. hexapodarum.

Ut autem certò constet, quantum hypothesis partium atmosphæræ uni Mercurii lineæ æquiponderantium, & juxta arithmeticam progressionem sursum crescentium, conspiret aut discrepet à Mariotti & Boylii Hypothesi, quâ densitates atmosphæræ in diversis locis sunt, ut vires comprimentes seu elasticitates aëris; quærenda prius est curva, cujus axis in partes arithmeticam progressionem constituentes divisus sit, ordinatæ verò per singulas axis. divisiones ductæ efficiant progressionem itidem arithmeticam, sed descendentem; dehinc inventa hac curva, definienda est scala elasticitatis aëris, & ex hac elicienda scala densitatum atmosphæræ. Huc faciunt sequentia Problemata.

PROPOSITIO XXVII. Problema.

Fig. 89. 373. *Si axis, seu linea* AH, *divisus sit in partes* AC, C1C, 1C2C, &c. *arithme-*

arithmeticam progressionem ascendentem constituentes, & per singularum terminos transeant ordinatæ AB, CD, $1C1D$, $2C2D$, *&c. juxta progressionem arithmeticam decrescentes, definire curvam* $BD1D2D$ *per singularum ordinatarum terminos* B, D, $1D$, $2D$, *transeuntem.*

Per puncta D agantur parallelæ ipsi AH, & in prima DE producta sumatur $EF = DE$, ac per F ducta FP parallela AB, in linea $1E1O$ à linea FP deorsum ponatur $1O1F$ æqualis excessui, quo secunda divisio $C1C$ primam AC, vel tertia secundam, seu quarta tertiam, atque ita deinceps, excedunt, ducaturque per puncta F & $1F$, recta FG; eruntque $AC = DE = EF$, item $C1C = 1E1F$, & $1C2C = 2E2F$, atque sic porrò. Adeoque $A2C = 2E2F + 1E1F + EF$. Verùm $2E2F =$ rec-lo $2E2F . 2E1E : 2E1E$, & $1E1F =$ rec-lo $1E1F . 1EE : 1EE$; ergo quia $2E1E = 1EE = EB$ ex hypothesi quandoquidem AB, CD, $1C1D$, $2C2D$ (secundùm hypothesin) sunt in progressione arithmetica; erit $2E2F + 1E1F =$ (rec-lum $K2E$ + rec-lo $I1E$) $: BE$; hæc vero rectangula simul sumpta quotcunque eorum fuerint, æquantur trapezio $EF2F2E$ simul cum triangulis $IF1F$, $K1F2F$, quæ sunt extra trapezium $EF2F2E$, & dicta triangula simul æquantur rec-lo sub dimidia $2O2F$ & $2E1E$ vel BE: ergo $2E2F + 1E1F = (EF2F2E + \frac{1}{2}. 2O2F . BE) : BE = EF2F2E : BE, + \frac{1}{2}. 2O2F$; ac proinde $A2C = EF2F2E : BE, + \frac{1}{2}. 2O2F + EF = 2E2F + 1E1F + EF$; eodem argumento probatur esse indefinite Ac vel $ed = EFfe : BE, + \frac{1}{2}. pf + EF$ vel ep, vel bisecta pf in q ductaque per q rectâ FqQ, erit $ed = EFfe : BE, + pq + ep = EFfe : BE, + eq$; adeoque $ed . BE = EFfe + eq . BE$; atqui trapezium $EFfe =$ rec-lo $eq . eE$; ergo $ed . BE = eq . Ee + eq . BE = Be . eq$; hinc curvæ quæsitæ hæc est proprietas, ut de vel cA ubique sit ad homologam eq ut Be ad BE, quæ proprietas parabolæ communi competit.

II. Nam si quædam T fiat ad EB, sicut EM (quæ resultat à concursu M rectæ QF productæ cum recta AB itidem protensa) ad EF; hinc erit etiam $eq : eM (= EF : EM) = BE : T$, curvæ vero modo recensitæ proprietas exhibet $de : eq = Be : BE$, ergo ex æquo $de : eM = Be : T$, & $de . T = Me . Be = Ne^2 - NB^2$, bisecta scilicet BM in N; hinc $de . T + NB^2 = Ne^2 = rd^2$; & si V sit tertia proportionalis ad T & BN erit $T . V = BN^2$, atque adeò $de . T + T . V$ $(= de . T + NB^2) = rd^2$, idcirco, si in rN perpendiculari ad AB producta versus S, sumatur $NR = V$, erit $T . Rr = rd^2$, atque adeò curva quæsita $RBD1D$ est parabola, cujus parameter est T, & vertex in R; in quâ T est quarta proportionalis ad datas EF, EM

&

& EB, & V tertia proportionalis ad T & datam BN. Propterea parabola est specie & magnitudine data, ejusque portio B D 2 D H quæsito satisfacit. Quod erat inveniendum.

COROLLARIUM I.

374. Quoniam partes AC, C1C, 1C2C, &c. sunt arithmetice proportionales, adeò ut earum differentiæ æquales sint, ordinatæque AB, CD, 1C1D, 2C2D, &c. etiam juxta proportionem arithmeticam, id est, per æqualia decrementa imminuuntur, partes illæ AC, C1C, 1C2C, &c. repræsentabunt atmosphæræ divisiones, quarum unaquæque æquivalet ponderi columnulæ liquoris homogenei altitudinis BE, vel E1E, &c. in methodo Mariotti & Cl. Maraldi, ipsæque BE, E1E, &c. denotabunt æqualia decrementa liquoris in barometro adhibiti, ac denique ordinatæ AB, CD, 1C1D, 2C2D, &c. exponent quantitates Mercurii seu liquoris in barometro in locis, A, C, 1C, 2C, &c. versante.

COROLLARIUM II.

375. Quoniam in hypothesi Mariotti densitates aëris ponderibus incumbentibus proportionales sunt, & quantitates argenti vivi in barometro æquivalent ponderibus aëri compresso in diversis locis incumbentibus, & quoniam (§. 374.) ordinatæ *cd* exponunt quantitates argenti vivi in locis *c*, sequitur (§. 355.) portionem parabolæ B2DH esse scalam densitatum atmosphæræ in suppositionibus Mariotti; & tamen supra (§. 366.) est ostensum, hanc scalam densitatum in hypothesi Mariottiana logarithmicam esse; ex quo liquet progressionem arithmeticam, quam Vir alioqui perspicacissimus loco progressionis geometricæ facilioris calculi ergo assumsit, atque à geometrica parum abludere existimavit, curvam suppeditare toto cœlo diversam à log-mica, quam progressio geometrica in hypothesi ejus, ipso etiam consentiente, adhibenda produxisset. Quoniam igitur, stantibus progressionibus à Celeb. viris Mariotto & Maraldo adhibitis, densitates aëris viribus comprimentibus aut elasticitatibus ejus nequeunt proportionales esse, disquirendum superest, juxta quam densitatum progressionem elasticitates crescant, vel, quod idem est, quæri debet scala elasticitatum atmosphæræ, quæ ubi data fuerit, scala densitatum ultrò determinabitur.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII. Problema.

376. *Si in arabola* BDH *propositione praecedenti reperta* AC, A1C, A2C, &c. *designent altitudines locorum, & ordinatae* CD, 1C1D, 2C2D *repraesentent quantitatem Mercurii barometro versante in locis* C, 1C, 2C, &c. *invenire scalas elasticitatis aëris & densitatum.* Fig. 89.

In figura 90. sint linea recta *am* = AM, *an* = AN, *ab* = AB, & *ad* = A*e*, eritque *db* = *e*B, & ipsae *bn*, *mn* respectivis BN & MN aequabuntur. Per punctum *b* agatur rectae *ab* normalis *ib*, quae sit ad *mb* ut data recta A, quae gravitatem uniformem exponit ad T parametrum parabolae B2DH, linea recta *nih* jungens puncta *n* & *i* erit reciproca scalae elasticitatis, idcirco producendo *ib* in β & per hoc punctum ducendo hyperbolam *l*δβ intra asymptotas *an* & *nk*, hyperbola ista erit scala elasticitatis aëris in suppositionibus Mariotti atque Maraldi, & applicando trapezium *bigd* ad datam rectam A, resultabit altitudo *ed*, in cujus termino *d* densitas aëris atmosphaerae est sicut *a*δ.

Demonstr. I. Ducatur linea *mix* per puncta *m* & *i*, & haec singulas *hu*, *gz*, &c. ipsi *ib* parallelas bifariam dividet in *x*, *y*, &c. si scilicet recta *iu* alteri *am* aequidistans ducta fuerit; hinc quaelibet *yd* erit media arithmetica inter *gd* & *zd*, vel inter *gd* & *ib*, atque adeo rec-lum *bdy* aequabitur ubique trapezio homologo *bdgi*: quibus positis triangula similia *mdy* & *mbi* suppeditant analogiam *md* : *dy* (= *mb* : *bi*, constr.) = T : A, atque adeo *md*. *bd* : *dy*. *bd* = *de*. T : *de*. A. atqui cum *md* & *bd* in fig. 90. aequales sint homologis M*e* & B*e* in fig. 89. & (§. 373, n. 11.) rec-lum M*e*. B*e* = T. *ed*, erit etiam *md*. *bd* = *de*. T; ergo aequabitur quoque rec-lum *dy*. *bd*, id est, ut paulo ante, dictum trapezium *bdgi*, cui rec-lum *bdy* aequale est, rec-lo A. *de* ex gravitate uniformi A in altitudinem alicujus loci *de*, & cum hoc ita sit de reliquis, (§. 359.) linea *nih*, vel ejus portio *ih*, erit reciproca scalae elasticitatis aëris.

II. Propter hyperbolam *l*δβ habetur *b*β : *d*δ = *nd* : *nb* = *gd* : *ib*, atque adeo singula rec-la *gd*δ, *ib*β, *hal*, &c. sunt aequalia, ac proinde (§. 357.) curva *l*δβ est scala elasticitatis, cum lineam *ib* ejus reciprocam esse ostensum sit.

III. Quia (num. 1. hujus) *ibdg* = A. *de*, erit *de* = *ibdg* : A = *bd*. *yd* : A, eritque adeo altitudo loci *d*, in quo densitas est *d*δ, quarta proportionalis ad A, *bd* seu B*e*, & *yd*, eaque semper haberi potest, ac

 proin-

proinde scala densitatis atmosphæræ in hac hypothesi semper per puncta describi geometrice poterit. Quæ omnia erant invenienda.

Corollarium I.

377. Patet iterum multum abesse, ut vires comprimentes aëris ejusve elasticitates densitatibus proportionales sint, stante progressione arithmetica altitudinum AC, C1C, 1C2C æquivalentium æqualibus cylindris Mercurii aliusve liquoris homogenei, quorum altitudines exponuntur per BE, E1E, 1E2E, &c.

Corollarium II.

378. Densitas aëris ad horizontem erit ad densitatem ejus in extremitate atmosphæræ sicut *bs* ad *al*, vel sicut *an* ad *bn*, hoc est in altera figura (89.) sicut AN ad BN vel MN.

Corollarium III.

379. Hinc si dicantur AC vel AP aut 1E1O, a; excessus ipsius 1E1F supra EF, hoc est 1O1F, e; tum $AB = b$, & $BE = E1E = l$, invenietur $BN = NM = 2al - el : 2e$, & $AN = b, + (2al - el) : 2e$, $= (2be + 2al - el) : 2e$; eritque proinde AN ad BN, hoc est, densitas atmosphæræ in horizonte ad densitatem ejusdem in confinio atmosphæræ totius ejusve termino, ut $2be + 2al - el$ ad $2al - el$. Igitur si in hac ratione generali cum Cel. Maraldo loco a, e, b & l ponatur 61, 1, 336 & 1, fiet AN ad BN ut 793 ad 121. Sin verò cum Mariotto sint $a = 63$ ped., $e = \frac{1}{12}$, $b = 28$ poll. $= 336$ lineis & $l = 1$ lin. erit $2be + 2al - el$ ad $2al - el$, ut 1007 ad 335 seu quam proxime in ratione tripla.

Scholion.

380. Liquet igitur, in suppositionibus D. Maraldi, aërem prope horizontem non septuplo densiorem esse aëre in termino atmosphæræ, nec Mariotti suppositiones eundem quadruplo densiorem facere ad horizontem, quam sit in summitate atmosphæræ, & tamen omni illic elastica virtute destitui oportere; quandoquidem nihil ipsi incumbit, quod ejus expansionem, si quam haberet, impedire valeat; quod procul omni dubio paradoxum est. Nam si experi-

mentis

mentis Academiæ Florentinæ *Del Cimento*, Roberti Boylii, aliorumque constat, aërem vi elaterii 60^{es}, 152^{es} imo & millies rariorem fieri posse, quam in statu naturali, quî fit, ut in suppositionibus Maraldi non septies, in Mariotti verò non quidem quater rarior in summitate atmosphæræ quam in statu naturali, omni vi elastica destituatur? Verum quidem est, Clariss. Maraldum non ultra extensionem semissis Milliaris Gallici progressionis suæ periculum fecisse, nec adeò ulterius eam extendi debere, expresse monuisse.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA.

381. *Si scala elasticitatis aëris* A_1DD *fuerit hyperbola communis inter asymptotas* FPQ *angulum rectum continentes, atque singula rectangula* EOD, $_1E_1O_1D$ *dato rectangulo* PFA *æqualia fuerint, quæritur reciproca linea* E_1E *scalæ elasticitatum, & scala densitatum atmosphæræ* B_1B *in suppositione gravitatis uniformis seu constantis, cujus scala sit* C_1C *axi* A_1A *parallela.* Fig. 90.

In recta indefinita AM sumatur AI æqualis datæ AF, ductaque per punctum I recta IT parallela AO, intra lineas MI & IT tanquam asymptotas descripta intelligatur hyperbola E_1E, ita ut quodlibet in ea rec-lum ILE æquetur quadrato datæ AI; eritque hæc hyperbola E_1E reciproca scalæ elasticitatis A_1DD; adeò ut facto rec-lo AC_1C æquali quadrilineo OE_1E_1O, densitas aëris in loco $_1A$ futura sit per §. 359, $_1O_1D$ vel $_1A_1B$.

Demonstr. Quia (secundùm hypothesin) $EO.OD = FP.FA$, erit $EO:FA$ seu $LO = FP:OD$ seu FG, ergo convertendo $EO:EL = FP:GP$ (id est propter hyperbolam A_1DD) $= GD$ seu $FO:FA$, ac dividendo $LO:EL = AO$ vel $IL:AF$ seu AI vel LO: ergo rec-la extremorum & mediorum æquabuntur, id est $LO^2 = AI^2 = IL.LE$, atque adeò punctum E est in hyperbola E_1E inter asymptotas MI & IT; ac propterea reciproca scalæ elasticitatis in præsenti hypothesi est hyperbola communis. Hinc, si rectangulum quoddam A_1C cuilibet in hac hyperbola quadrilineo O_1O_1EE æquale factum, atque linea $_1C_1A$ protensa ad alteram axis partem $_1A_1B$ æqualis facta fuerit ordinatæ $_1O_1D$, punctum $_1B$ (§. 359.) erit in scala densitatis atmosphæræ B_1B. Quæ erant demonstranda.

SCHOLION.

382. Hoc problema est tantum applicatio theorematis nostri generalis, supra (§. 359.) exhibiti, hypothesi particulari, quam Propositione 23. hujus excussimus; quoniam in superioribus jam vidimus, densitates aëris viribus comprimentibus non semper proportionales existere; sed præsentem hypothesin cum observationibus propius conspirare. Cæterum liquet etiam, quod, quia scalæ densitatum reciproca E1E etiam est hyperbola, perinde ac in hypothesi densitatum viribus comprimentibus proportionalium, hoc solo cum discrimine, quod in hac hypothesi ejus asymptota una sit ipsa AO, in præsenti verò recta IT, modo nominatæ AO æquidistans, linea seu scala densitatum B1B ope log-micæ cujusdam per puncta describi possit. Nam ad asymptotam AM ducta per punctum L logarithmica L1SS, cujus subtangens sit æqualis AI, perinde ac AC, quæ gravitatem uniformem exponit, fiat recta LR angulum semirectum ILR continens cum IL, atque ipsam 1L1D secans in 1R; si C1C constanter æqualis fiat ipsi 1R1S interceptæ inter log-micam L1SS & rectam L1RR, atque per punctum 1C ducta indefinita 1C1B in ea ultra axem abscindatur, ut prius 1A1B æqualis ordinatæ 1O1D in scala densitatum atmosphæræ B1B. Hisce diu nonnihil institimus, quia cognitio densitatum atmosphæræ utilitate sua non caret; nam præterquam quod accuratissimus haberetur modus mensurandarum altitudinum montium aliorumque in superficie terræ altiorum objectorum ope barometrorum, cognita lege, juxta quam densitates atmosphæræ sursum decrescunt, accuratius innotesceret linea in quam radii solares siderumve atmosphæram trajicientes incurvantur, quod utique utilitatem haberet eximiam in astronomicis. Cæterum difficillimum, si non impossibile, est à priori noscere quamnam densitates atmosphæræ cum ponderibus incumbentibus collatæ, legem sequi debeant propter mille anomolias, quæ in atmosphæra contingunt, idcirco res ex observationibus bene multis & diligenter institutis derivari debet modo sequenti.

383. In recta quadam indefinita abscindantur lineæ eandem inter se proportionem habentes, quam altitudines locorum diligentissime observatæ, & per singula divisionum puncta agantur perpendiculares eandem inter se proportionem habentes, quam quantitates Mercurii in barometro in prædictis locis versante, & sic tot habebuntur

tur puncta, quot sunt observatæ locorum altitudines, per quæ puncta proinde duci potest linea quædam regularis eo prorsus modo, quem Celeb. Newtonus Lemm. V. Lib. III. *Pr. Ph. Math.* absque ulla demonstratione exponit; & talis curva apta nata esset ad exprimendam relationem, quæ est inter altitudines locorum & argenti vivi quantitatem barometro successive in his locis versante. Ex hac curva elici potest linea reciproca scalæ elasticitatum, & ex figura hujus scalæ reciproca deduci potest ipsa scala elasticæ virtutis in aëre; dehinc, ope theorematis nostri §. 359. ipsa etiam scala densitatum atmosphæræ per puncta describi potest. Verum multis observationibus opus est, quia, quo plura sunt puncta positione data, eo accuratius definietur ipsa curva, de qua ante dixi; quomodo verò calculus subducendus sit pro hac curva aliàs commodius aliquando dicetur, quando demonstrationem præfati V. Lemmatis Newtoniani demonstratum dabimus cum aliis nonnullis affinibus materiis.

SECTIO II.

De Motibus Aquarum.

IN Sectione præcedenti pressiones tantum fluidorum ex gravitate, quas tum in subjecta plana tum etiam in vasorum latera exercent, contemplati sumus: In hac vero secunda Sectione, quæ ad motus liquorum per foramina, utlibet vasis insculpta, erumpentium pertinent, breviter excutiemus. Hoc argumentum utilitate suâ celeberrimis Geometris Castello, Baliano, Torricellio, Borellio, Mariotto aliisque se probavit, atque ab ipsis diligenter nec sine fructu examinatum est quidem, non verò exhaustum, quandoquidem Cel. Gulielminus ipsorum repertis nonnulla adjecit; ipsorumque, maxime verò Torricellii, doctrinam motui fluminum ingeniose applicuit. Nemo tamen hanc materiam adeò generaliter pertractavit ac Celeb. Varignonius, qui præclara atque universalia exhibuit theoremata, quibusvis liquoribus applicabilia, & quæ hac in re assequutus est, velut Iliada nuci, simplicibus formulis inclusit.

CAPUT IX.

De motibus Liquorum per minora foramina erumpentium.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA.

Fig. 92. 384. *Quantitates, seu filamenta liquorum, æquali tempore per qualibet orificia æquabili motu effluentia, sunt in composita ratione ex rationibus orificiorum & velocitatum, quibus liquores, quisque per suum foramen, erumpunt.*

Sint DEF, GH vasa quælibet foraminibus quibuslibet K & I pertusa, exeantque dato quodam tempusculo motu uniformi filamentum KN ex vase DEF & filamentum IO ex vase GH, ita tamen, ut superne tantum liquoris restituatur, quantum effluit, atque adeo in utroque vase liquor in eadem altitudine constanter conservetur; & hisce positis ultro liquet longitudines filamentorum KN & IO utpote æquali tempore uniformi motu descriptas, velocitatibus aquæ ex foraminibus K & I erumpentis proportionari, vel potius has velocitates repræsentare. Ex Geometriæ vero elementis constat, ipsa filamenta esse in composita ratione foraminum K & I tanquam basium prismatum, & longitudinum KN & IO, id est, velocitatum, quibus hæ longitudines describuntur, quare constat Propositum.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA.

Fig. 92. 385. *Quantitates motus, seu impetus liquorum quorumcunque & per quævis foramina erumpentium, sunt in ratione composita ex rationibus duplicata celeritatum, simpla densitatum seu gravitatum specificarum liquorum, & denique simpla foraminum.*

Ex vasis ABC & DEF erumpant eodem vel æquali tempore, per foramina B & K filamenta BM & KN, quorum longitudines celeritates exponent, quibus hæc filamenta e vasis egrediuntur. Gravitas specifica, seu densitas liquoris in vase ABC exponatur per magnitudinem R, densitasque liquoris DEF per S. In KN sumatur tertia proportionalis ad BM & KN & sit ea KV, & probari debet, quantitatem motus filamenti BM se habere ad quantitatem motus filamenti KN ut $B.BM^2.R$ ad $K.KN^2.S$, aut propter rectas BM, KN, KV continue proportionales, sicut B.BM.R ad K.KV.S.

De-

Demonstr. Quoniam per quantitatem motus alicujus corporis intelligitur factum ex massa hujus corporis in celeritatem, qua id fertur, erunt quantitates motus filamentorum BM & KN in composita ratione ex rationibus massæ ad massam, & celeritatis unius ad celeritatem alterius, sunt verò massæ BM & KN inter se (§. 18.) ut volumina BM & KN, id est, ut facta B.BM & K.KN ducta in densitates liquorum, seu (§. 33.) in gravitatem eorundem specificam R & S; velocitates verò sunt ut longitudines BM & KN; est ergo quantitas motus filamenti BM, quam simpliciter ejus motum deinceps dicemus, ad motum filamenti KN, ut $R.B.BM^2$ ad $S.K.KN^2$, hoc est, sicut R.B.BM ad S.K.KV. Quod erat demonstrandum.

Literæ B & K denotant orificia Vasis ABC & DEF quomodocunque insculpta.

PROPOSITIO XXXII. Theorema.

386. *Velocitates liquorum quorumlibet sunt in subduplicata ratione altitudinis liquorum super orificiis, per quæ erumpunt, si liquorum superficies eandem semper, durante effluxu, positionem servarint.* Fig. 92.

Iisdem positis, quæ in præcedenti, sint BQ & KD liquorum altitudines, & sumatur Kβ media proportionalis inter QB & DK, probari debet fore $BM : KN = BQ : K\beta = \sqrt{BQ} : \sqrt{KD}$.

Demonstr. Motus sunt ut eorundem causæ genitrices, & hæ causæ sunt pressiones liquorum foraminibus incumbentium, atqui gravitatio liquoris QB (§. 255.) æquivalet ponderi columnæ BQ.B, & (§. 33.) ejus pondus est ut factum ex volumine in gravitatem specificam R, adeoque B: BQ.R est ut gravitatio filamenti QB, & K.KD.S propter eandem rationem erit ut gravitatio filamenti DK, adeoque gravitatio QB : gravit. DK = B.BQ.R : K.KD.S, unde, cum gravitatio QB sit ad gravitationem seu pressionem DK, ut motus BM ad motum KN, erit B.BQ.R : K.KD.S = motus BM : mot. KN (§. 385.) = B.BM.R : K.KV.S, adeoque BQ : KD = BM : KV, atqui est ratio BQ ad KD duplicata rationis BQ ad Kβ, & BM : KV duplicata rationis BM : KN, ergo $BQ^2 : K\beta^2 = BM^2 : KN^2$, & $BQ : K\beta = BM : KN = \sqrt{BQ} : \sqrt{KD}$. Quod erat demonstrandum.

Hæc propositio generaliter obtinet, ubicunque foramina B, K vasis insculpta fuerint in fundo vel ad latera vasis, abstrahendo tamen à frictionibus, quas liquores in foraminibus exeundo subeunt, aliisque motus impedimentis, ut resistentiâ aëris, &c.

Co-

Corollarium.

387. Quoniam quantitates liquorum simul effluentes BM & KN (§. 384.) sunt in composita ratione ex rationibus foraminum B & K & velocitatum, hæ quantitates erunt in composita ratione ex ratione foraminum, & supduclicata ratione altitudinis liquorum in vasis, abstrahendo à densitatibus liquorum exeuntium, nam quantitates absolutæ filamentorum BM & KN seu massæ eorundem, sunt in composita ratione ex subduplicata altitudinum BQ & KD, ex simpla densitatum R & S, & denique ex simpla itidem foraminum B, K.

Scholion.

388. Celeberrimus Varignon in Comment. Acad. Reg. Scient. 1703, 14 Nov. velocitates liquorum erumpentium in circumstantiis hujus propositionis demonstrat esse, ut radices ex factis altitudinum in specificas gravitates liquorum, divisis per densitates homologas, quod cum præsenti proportione probe conspirat, cum (§. 33.) densitates gravitatibus specificis liquorum directe proportionales sint.

PROPOSITIO XXXIII. Problema.

389. *Definire quantum liquoris effluere debeat ex dato vase per datum foramen tempore dato, si liquor vasis constanter in eadem altitudine data conservetur.*

Sint data altitudo liquoris a, foramen vasis f, tempus datum t, m spatium quod grave accelerato motu, alio dato tempore d, perlabitur. Jam, quia tempora descensuum gravium (§. 151.) sunt in subduplicata ratione spatiorum confectorum, erit $\sqrt{m}:\sqrt{a}=d:n$, ubi n denotat tempus, quo grave altitudinem a accelerato motu cadendo absolveret, adeoque $n=d\sqrt{a}:\sqrt{m}$. Jam quia liquor ea velocitate effluit, quam grave casu ex altitudine a acquirere potest, &, hac velocitate semel acquisita, duplum spatium describit æquabili motu eo tempore n, quo accelerato motu simplex a percurrebatur; filamentum liquoris hoc tempore n, æquabiliter effluens celeritate æquali, quam grave acquirit ex casu accelerato ex altitudine a erit $2af$. Unde si tempore n effluit filamentum liquoris $2af$, tempore t effluet

effluet filamentum $2aft:n$ vel subſtituendo $d\sqrt{a}:\sqrt{m}$ pro n, quantitas $2aft\sqrt{m}:d\sqrt{a} = 2ft\sqrt{(am)}:d$. Quod erat inveniendum.

SCHOLION.

390. Dicatur quantitas liquoris dato tempore t per foramen f effluens x, ſitque foramen circulus diametri e; eritque $f = \pi ee:4\delta$, qui valor ſubſtitutus in $x = 2ft\sqrt{(am)}:d$ exhibet $x = \pi ftee\sqrt{(am)}:2\delta d$, ponendo $\delta:\pi$ pro ratione diametri ad circumferentiam circuli.

Exempl. Quæritur quantum aquæ effluere debeat ex vaſe cylindrico indeſinenter pleno 15 ped. 5 poll. 7 lin. alto, per foramen circulare in fundo pollicis unius in diametro, tempore 6 ſecundorum. Erunt ergo $a = 15$ ped. 5 poll. 7 lin. $t = 6''$ $e = 1$ poll. $= 12$. lin. $\delta = 113$ & $\pi = 355$. Jam, cum Hugenius obſervarit grave aliquod altitudinem 15 ped. & 1 poll. tempore minuti ſecundi perlabi, d ſignificare poteſt 1″, & m, 15 ped. 1 poll. ſeu 2172 lin. Loco literarum adhibendo numeros hactenus indicatos & operationem logarithmis perficiendo invenietur log-mus x, ſeu quantitatis $\pi ftee\sqrt{(am)}:2\delta d = 6.4811958$ log-us numeri quæſiti in lineis cubicis; idcirco ſi ex hoc log-mo log-us ipſius 12 triplicatus, ſeu log-us cubi ex 12, auferetur, remanebit log. $x = 3.2436522$ log-us numeri quæſiti in pollicibus cubicis expreſſi, cui log-mo convenit proxime numerus 1752 ergo tot pollicum cubicorum erit aqua effluens ex vaſe 6 ſecundis temporis, vel unius pedis cubici, & 24 pollicum.

391. Viciſſim ex aquæ quantitate tempore dato effluente & obſervatione data elicietur altitudo vaſis, ad id requiſita, ut quocunque alio tempore determinata quædam aquæ copia effluat, nam ex formula ſuperiore $x = \pi feet\sqrt{(am:)}2\delta d$ elicietur $a = 4\delta\delta ddxx:\pi\pi ffe^4ttm$, in qua excepta a omnes reliquæ ſunt quantitates datæ.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA.

392. *Si ex vaſe quocunque liquore pleno* BAD *liquor per foramen* F *effluat, & circa lineam* AC *liquoris ſuperficiei* BD *normalem deſcripta ſit parabola* EGS, *verticem ſuum habens in puncto* E *tantum diſtanti à liquoris ſuperficie quantum foramen vaſis* F, *& curvæ* AID *ac* OMN *ejus indolis, ut ſingula rectangula ſub data recta* V *& ordinata* HI *curvæ* AID, *tum etiam ſub ordinatis* GH *parabolæ &* HM

 curvæ

curvæ OMN *æqualia ubique sint sectioni vasis respectivæ* KL, *dico fore* I°. *ut tempus descensus superficiei* BD *in* XX *per spatium* CY *ad* Fig. 93. *tempus descensus in* KL *per spatium* CH *sit, ut area* COZY *ad aream* COMH. II°. *Ut velocitas superficiei* KL *sit in composita ratione ex directa ordinatæ parabolæ* GH, *& reciproca ordinatæ* HI *curvæ* AID, *id est, ut* GH : HI.

Demonstr. Quia in parabola est PC : GH = $\sqrt{}$EC : $\sqrt{}$EH (§. 386.) = velocitas liquoris effluentis sub altitudine EC ad celeritatem effluentis sub altitudine HE; ideò, si PC exponat celeritatem illius liquoris, qui habet altitudinem EC super foramen F, ordinata GH exponet celeritatem, qua filamentum liquoris indefinite parvum FH tempusculo itidem indefinite exiguo erumpit, existente liquoris altitudine super foramen F linea EH. Sed eo tempusculo, quo effluit filamentum FT, superficies KL descendens spatiolo infinitesimo Hh se demittet in kL, ita quidem ut duo prismata sub sectione KL & altitudine Hh, & FT necessario æqualia sint, unde quia (constr.) sectio KL = GH.HM, erit GH.HM.Hh = F.FT, vel HM.Hh : F = FT : GH. Atqui FT, seu longitudo filamenti, applicata ad celeritatem, qua id effluit æquabili motu, exponit tempus effluxus hujus filamenti, seu synchroni descensus superficiei KL ex hoc situ in kl per spatiolum Hh, ergo etiam HM.Hh : F exponit hoc idem tempusculum descensus, & omnia rectangula HM.Hh, quæ in area CHMO continentur: seu hæc ipsa area, divisa per F, exponet tempus descensus superficiei KL ex BD in KL per spatium CH; eodemque argumento colligitur tempus descensus BD in XX per spatium CY exponi area CYZO, divisa per F; ergo tempus per CH : tCY = CHMO : CYZO. Quod est primum.

II°. Quia velocitas superficiei KL est ad velocitatem GH filamenti FT, ut Hh ad FT, hoc est, ob æqualitatem prismatis ex KL in Hh & prismatis ex F in FT, sicut F ad planum KL, quod (constr.) æquatur rectangulo V.HI, erit velocitas superficiei KL ad GH = F : V.HI, atque adeo cel. superficiei KL = F.GH : V.HI, id est, omissa ratione constanti F : V, quæ proportiones indeterminatarum magnitudinum non alterat, velocitas superficiei KL est ut GH : HI. Quod erat secundum.

COROLLARIUM I.

393. Si itaque area tota COMNNE dividatur in quadrilinea æqua-

æqualia CYZO, YHMZ, HMNNE, aut quamcunque aliam inter ſe rationem habentia, tempora deſcenſus ſuperficiei liquoris BD per ſpatia CY, YH, HE aut æqualia, vel aliam inter ſe datam rationem, quam habent homologæ areæ. Atque hinc liquet, quodlibet vas adhiberi poſſe loco clepſydræ, dummodo figura ECOMN figuræ vaſis conveniens in ſuas partes æquales diviſa fuerit per lineas ſuperficiei horizontali aquæ BD parallelas, atque diviſionum puncta in latere vaſis rite notata fuerint. Sed hiſce diutius non immorabor, quandoquidem Celeb. Varignon hoc argumentum pene exhauſiſſe videtur in Comment. Reg. Scient. Pariſ. Academ. 1699, 29 Apr.

Corollarium II.

394. Pariter datis curvis EGP, OMN dabitur tertia AID, atque adeo curva BKALD genitrix vaſis, idque ex ſectione KL = V. HI = GH. HM. Adeoque, ſi vas ſit ſolidum rotundum ex converſione figuræ BAD circa axem CA, vel etiam ſi ſingulæ vaſis ſectiones BD, KL, &c. figuræ ſimiles & ſimiliter poſitæ fuerint, ordinatæ HI erunt, ut quadrata ordinatarum homologarum KL.

Corollarium III.

395. Idcirco, ſi quæratur vas BAD tale, ut deſcenſus CY ſuperficiei liquoris BD ſint ut tempora deſcenſus, erit curva OMN hoc caſu linea recta axi AR parallela, unde cum planum KL, ſeu circulus ex diametro KL æquatur rec-lo GHM, erit quadratum ex KL ut rec-lum ex HG in datam HM, vel ſimpliciter ut GH, vel quadrato-quadratum rectæ KL ut quadratum HG, unde cum hoc quadratum ſit ut abſciſſa HE, erit quadrato-quadratum ut HE, atque adeo curva quæſita BAD erit parabola biquadratica. Ut ab aliis ſæpius jam demonſtratum eſt.

In hiſce areæ CYZO, CHMO tantum proportionem temporum indicant, quibus ſuperficies liquoris BD ſpatia CY, CH deſcendendo deſcribit. Sed ſi tempus abſolutum ſit definiendum, quo quilibet deſcenſus contingit, conſuli debet ſequens

PROPOSITIO XXXV. Theorema.

396. *Si parabolæ* EGS *parameter æqualis fuerit altitudini* RE, *quam grave, caſum à quiete in* R *incipiens, motu naturaliter accelerato perlabi*

potest uno minuto secundo temporis; positisque omnibus, quæ in Propositione præcedenti, numerus minutorum secundorum, quibus superficies BD *spatium* CH *cadendo conficit, æquabitur numero, qui oritur ex divisione areæ* CHMO *per duplum foraminis* F.

Si liquor constanter maneret in altitudine ER, ejus prima gutta, prope foramen F, ea celeritate erumperet, qua motum in altum convertens tempore eodem minuti secundi per altitudinem ER ascendere potest, quo cadendo eandem celeritatem acquirit, atque gutta erumpens motum suum uniformem prosequens hoc tempore describet spatium duplum ipsius ER, unde cum effluentis liquoris particulæ contiguæ sint, tempore unius minuti secundi effluet per foramen F filamentum 2F.RE, & si liquor maneret in altitudine HE per idem foramen effluet tempore, quod se habet ad unum minutum secundum in subduplicatâ ratione HE ad RE, id est, in ratione GH ad SR, filamentum 2F.HE; unde si massa liquoris 2F.HE effluit tempore (GH:SR) quanto tempore effluet massa KL.H*h* (constr.) = GH.HM.H*h*? Id per regulam auream invenietur fieri tempore GH^2.HM.H*h*:2F.HE.SR; jam quia RS vel RE est parameter parabolæ, atque adeò GH^2 æquale rec-lo HE.SR, erit tH*h* = HM.H*h*:2F. ergo tCH = areæ CHMO:2F, id est numerus secundorum temporis, quo liquoris quantitas BKLD per foramen F effluit, præscindendo à frictionibus aliisque motus impedimentis, reperietur, applicando aream homologam CHMO ad duplum foraminis F. Quod erat inveniendum & demonstrandum.

Aliter & brevius.

397. Supra (§. 392. n. 1.) incidimus in hanc analogiam HM.H*h*:F = FT:GH, unde duplicatis consequentibus provenit HM.H*h*:2F = FT:2GH. Atqui FT:2GH indicat particulam minuti secundi temporis, qua filamentum FT vel ei æqualis massa KL.H*h* vel K*kl*L effluit. Nam 2RE vel 2RS exponere debet velocitatem acquisitam tempore unius minuti secundi ex lapsu gravis per altitudinem RE, quia hæc altitudo duplicata 2RE divisa per celeritatem 2RE, dat I, seu unum minutum secundum, & quia velocitates & descensu per RE & HE acquisitæ & hisce æquales celeritates, quibus aqua per foramen F erumpit, existente ea in vase in altitudinibus RE & HE manentibus, sunt in subduplicata ratione RE ad

ad HE seu SR ad GH, id est, 2SR vel 2RE ad 2GH; hæ enim SR & ER æquales sunt, cum RE (secundùm hypothesin) parameter sit parabolæ, unde cum 2SR exponat celeritatem aquæ erumpentis sub altitudine RE, altera 2GH exponet celeritatem aquæ erumpentis sub altitudine HE, hinc filamentum FT æquabili motu effluens, applicatum ad suam celeritatem 2GH, exponit tempus effluxus hujus filamenti, seu tempus effluxus massæ liquidæ HklL, id est, $tHh = FT : 2GH$, & cum supra inventum sit $HM.Hh : 2F = FT : 2GH$, erit $tHh = HM.Hh : 2F$; atque adeò $tCH = CHMO : 2F$, ut supra. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

398. Ergo præsens propositio ex antecedenti facile elicitur parametro parabolæ EGS tantum eum valorem assignando, quem Propositio indicat, & semper continget, ut areæ CYZo, &c. applicatæ ad duplum foraminis præbituræ sint tempora minutis secundis expressa, quibus homologæ liquoris quantitates effluere debent.

PROPOSITIO XXXVI. Theorema.

399. *Si liquor ex vase amplo & constanter pleno* ADC *effluat per lumen* EGHF *plano* BDIC *horizonti utcunque obliquo insculptum, descripta circa axem* BD *parabola* BLO, *cujus parameter* P *sit ad lineam* A, *quam grave quoddam dato tempore* t *motu a quiete incipiente, sed naturaliter accelerato, perlabi potest, ut sinus anguli* ABD *inclinationis planorum* ABC, *&* BDI *ad sinum totum, hoc est, sicut* RG *ad* BG; *quantitas* Q *liquoris tempore quolibet dato* T *per lumen illud* EGHF *effluentis exponetur frusto* EIKMLGHFE *prismatis parabolici* BDOPMNV *ducto in duplum exponentis rationis temporum, hoc est in* $2T : t$. Fig. 94.

Quia manente vase liquoris pleno, per quodlibet punctum physicum G sectionis seu luminis EGHF filamentum liquoris 2RG effluere debet æquabili motu, tempore eo, quo grave quoddam altitudinem RG accelerató motu descendens conficere potest, & quia tempora descensus gravium sunt in subduplicata proportione spatiorum, juxta ea. quæ articulo 151. ostensa sunt, erit tempus descensus gravis in altitudine A, quod tempus nominatum est t, ad tempus per altitudinem RG; sicut $\sqrt{A}$ ad $\sqrt{RG}$; vel sicut A ad $\sqrt{(A.RG)}$

 $= \sqrt{(P.BG)}$

$=\sqrt{(P.BG)}$ quandoquidem $A:P=BG:RG$, vel ficut A ad GL ob parabolam BLO, in qua eft $GL=\sqrt{(P.BG)}$; adeoque tempus defcenfus per altitudinem RG alicujus gravis reperitur effe $GL.t:A$. Jam, quia hoc tempore punctum G effundit filamentum liquoris 2RG, idem punctum effundet tempore T, filamentum $2A.T.RG:GL.t=2T.GL^2:GL.t=2T.GL.t$. Similiter punctum phyficum F effundet, eodem tempore T, filamentum $2T.FK:t$, atque fic refpective reliqua luminis puncta. Igitur quantitas Q liquoris per univerfum lumen GEFH dato tempore T effluentis eft factum ex omnibus GI, FK, &c. quæ in folido EILMKFHGE continentur in $2T:t$; id eft, factum ex hoc folido in $2T:t$. Quod erat demonftrandum.

Corollarium I.

400. Si planum BDI lumine EGH pertufum, rectum fuerit horizonti, rectæ BG & RG, atque adeo P ac A æquales fient; adeo ut magnitudo ipfa, feu fpatium A, quod grave tempore t accelerato motu à quiete incepto percurrere poteft, parameter fit parabolæ BLO.

Corollarium II.

401. Dicantur porrò finus anguli RBG, i; finus totus r, parabolæ BLO parameter p, qui antea P nominabatur, fimiliterque longitudinem A litera a infigniat, fiantque infuper $GE=b$, $GH=c$, $BG=z$, $BE=x$, eruntque $EI=\sqrt{px}$ & $GL=\sqrt{pz}$, adeoque quadrilineum parabolicum EGLI, feu trilineum BLG — trilineum BIE $=\frac{2}{3}z\sqrt{pz}-\frac{2}{3}x\sqrt{px}$ (id eft, fi ad contrahendam formulam pro $\frac{2}{3}z\sqrt{z}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ ponatur u) $=u\sqrt{p}$, adeoque folidum $EKLGF=cu\sqrt{p}$, adeò ut fit $Q=2Tcu\sqrt{p}:t$.

Corollarium III.

402. Sed, fi ipfæ BG, BE datæ non fint, fed earum tantum proportio, quæ fit eadem cum m ad 1, folidum parabolicum præcedente paragrapho inventum habebitur in folis quantitatibus b, c, & m. Nam quia (fecundùm hypothefin) $z:x=m:1$ erit $z=mx$ & $z\sqrt{z}-x\sqrt{x}=mx\sqrt{mx}-x\sqrt{x}=(m\sqrt{m},-1)$ in $x\sqrt{x}$. Sed $z-x=mx-x=b$, feu $x=b:m-1$, & $x\sqrt{x}=b\sqrt{b}:m-1\sqrt{(m-1)}=b\sqrt{b}:n\sqrt{n}$ fi fci-

scilicet loco $m-1$ ponatur n. ergo $z\sqrt{z}-x\sqrt{x}=(m\sqrt{m},-1).b\sqrt{b}:m\sqrt{n}$. Hinc u seu $\frac{2}{3}z\sqrt{z}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}=(\frac{2}{3}m\sqrt{m}-\frac{2}{3}).b\sqrt{b}:n\sqrt{n}=(2m\sqrt{m},-2).b\sqrt{b}:3n\sqrt{n}$.

SCHOLION.

403. Sed, quia A vel a denotat altitudinem, quam grave quoddam accelerato motu à quiete incepto cadendo describere potest tempore dato t, & quia propter frictiones aliaque impedimenta fieri nequit, ut filamenta fluidi eodem tempore effluentia per puncta physica G, E, F, &c. præcise dupla sint altitudinum GR, EQ, EQ, &c. ideo propositio Mathematica est potius quam Physica. Etsi enim scitur quantam oporteat esse altitudinem A tempore unius minuti secundi, vel quolibet alio à gravi decidenti in vacuo describendam, non tamen in praxi talem altitudinem adhibere licet, quandoquidem ab omnis generis resistentiis abstrahere non semper convenit, sed dicta altitudo A ex phænomenis est elicienda sequenti modo:

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA.

404. *Iisdem positis, quæ in præcedenti Propositione, invenire magnitudinem* A, *atque adeò parametrum* P *parabolæ* BIO *ex observationibus seu phænomenis.* Fig. 94.

Quia (§.§. 384. & 386.) quantitates fluidi per puncta quælibet physica G, E, F, &c. fluentia sunt in subduplicata ratione homologarum GR, EQ, &c. seu ipsarum GB, EB, &c. quantitates illæ per ordinatas parabolæ GL, EI, &c. recte exponi possunt, adeo ut quantitas fluidi, per universum lumen EGHF effluentis, debeat exponi solido ELKFG. Atqui retentis symbolis superioribus, erit solidum istud $=cu\sqrt{p}$, ut supra inventum, ergo $Q=cu\sqrt{p}$, & $QQ=ccuup$, id est $p=QQ:ccuu$, atqui (§. 399.) est $p=ai:r$, ergo $a=rQQ:iccuu$. Jam, quia (secundùm hypothesin) Q ex observatione, & reliquæ r, i, c, u, etiam datæ sunt, ipsa altitudo quæsita a ex hisce datis ope repertæ æquationis facili negotio haberi potest. Quod erat inveniendum.

SCHO-

SCHOLION I.

405. Ad illuftrationem hujus canonis, & inventionem altitudinis a, nullam præftantiorem novi obfervationem, quam quæ relata eft circa finem Tractatus *De Menfura aquarum fluentium* Celeberrimi Gulielmini, qui merito fuo primum locum in Mifcellaneis Italicis Phyfico-Mathematicis à P. Gaudentio Roberti editis, occupat. Adhibuerat fagaciffimus Gulielminus vas cylindricum bipedalis diametri alicubi ad latus horizonti rectum lumine quadrato pertufum, cujus fingula latera erant 3 linearum pedis Bononienfis, & ejusdem luminis bafis horizonti parallela 3 pedibus cum 11 unciis (pollicibus) ab aquæ fuperficie diftabat in vafe. Experimento octies repetito fine ulla variatione invenerat Doctiffimus Vir, 32 libr. & 10 uncias per lumen illud tempore unius minuti horarii effluxiffe; & pollicem cubicum continere unciam unam aquæ cum granis 146, id eft, in univerfum grana 786. Divifit poftea 32 libr. 10 uncias, id eft, 252160 grana per 786 grana unius pollicis cubici, invenitque $320\frac{320}{393}$ pollices ejusdem generis prædicto illo tempore effluxiffe. Jam, fi formulam fuperiorem obfervationi ifti velimus applicare, fciendum i & r hoc cafu æquari, quia lumen plano aut fuperficiei cylindri horizonti rectæ infculptum eft; ac proinde erit hoc cafu $p = a$. Ut altitudinem quæfitam a in numeris inveniamus totam operationem logarithmis perficiemus, ponentes $Q = 320\frac{320}{393}$ poll. cub. $c = 3$ lin. $z = 3\frac{11}{12}$ ped. $= 564$ lineis & $x = 561$ lineis. Quibus pofitis, erunt

Log. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z})$	- - - -	3.9508274	Subtr.
Log. $(\frac{2}{3}x\sqrt{x})$	- - - -	3.9473531	

Log. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} : \frac{2}{3}x\sqrt{x})$ = log. numeri 1.008033 ... 0.0034743

Ergo $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}) = 1008033 : 1000000$, adeoque $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} - \frac{2}{3}x\sqrt{x})$ feu $u : \frac{2}{3}x\sqrt{x} = 8033 : 1000000$, & log. u = log. $(\frac{2}{3}x\sqrt{x})$ + log. 8033 − log. 1000000. Jam

Log. $(\frac{2}{3}x\sqrt{x})$	- - - -	3.9473531	Add.
Log. 8033	- - - - -	3.9048778	
		7.8522309	Subtr.
Log. 1000000	- - - - -	6.0000000	
Log. u	- - - - -	1.8522309	

Log. u

Log. u - - - - -	1.8522309	Add.
Log. $c = 3$ lin. - - - - -	0.4771212	
Log. cu - - - - - -	2.3293521	
Log. Q lineis cubicis expressæ - -	5.7437973	Subtr.
Log. cu, - - - - - - -	2.3293521	
Log. $(Q : cu)$ - - - - -	3.4144452	Dupl.
Log. $(QQ : ccuu)$ = log. a in lineis -	6.8288904	Subtr.
Log. 144, - - - - - -	2.1583625	
Log. a seu $(QQ : ccuu)$ in pedibus, -	4.6705279	

Hic inventus log-us ipsius a est fundamentalis numerus in calculo quantitatis aquæ per datum foramen effluentis deinceps adhibendus, loco Tabulæ, eundem in finem, à supra laudato Guilielmino improbo laboris tædio confectæ. Nos enim, qui logarithmis semper calculum absolvi posse jam ostendimus, & uno adhuc exemplo clarius id probabimus, Tabula Guilielminea plane non indigemus; nec eadem Clariss. ejusdem Autor opus habuisset, sibique ipsi multo tædio pepercisset, si animum advertisset, calculum eo modo eaque methodo subduci posse, quam hoc loco exposuimus.

Scholion II.

406. Videamus nunc præcedentium usum in aliquo exemplo. Ponamus igitur cum Guilielmino sectionem FG, seu luminis planum angulo 88 grad. inclinatum esse ad horizontale planum, atque luminis rectanguli basin GH esse 50 ped. altitudinem vero GE, 10 ped. ac denique proportio celeritatum in G & E sit eadem quæ 4 ad 1. Jam quia (§. 386.) velocitates in G & E sunt in subduplicata proportione ipsarum GR & EQ seu ipsarum GB & EB, hæ lineæ ipsæ erunt ut quadrata velocitatum in G & E, id est, GB : EB = 16 : 1, atqui supra (§. 402.) erat posita $z : x$ seu GB : EB $= m : r$, ergo $m = 16$, adeoque $n = m - 1 = 15$. Item $b = 10$ ped. & $c = 50$ ped. Ergo $u = (2m\sqrt{m}, -2) . b\sqrt{b} : 3n\sqrt{n} = 28\sqrt{10} : \sqrt{15}$ ergo $cu = 1400\sqrt{10} : \sqrt{15}$. Hisce positis Fig. 54.

Quia Log. a - - -	4.6705279	Add.
Log. i sin. 88 grad. -	9.9997354	
	14.67026	

$\text{Log.}(ai:r) = \log. p$ - - 4.6702633

$\text{Log.} \sqrt{p}$ - - - - 2.3351316 } Add.

$\text{Log.}(tu) = 1400\sqrt{10}:\sqrt{15}$ - 3.0580824 }

$\text{Log.}(tu\sqrt{p}) = Q$ - - - 5.3932140. Huic log-mo numerus 247285 quam proxime convenit. Gulielminus suo calculo invenit 247321, differentia 36 est insensibilis præ numero 247285, denotante quot pedes cubici tempore unius minuti horarii effluere debeant per lumen illud seu sectionem horizonti inclinatam. Atque sic in aliis procedendum.

CAPUT X.

De Cursu Fluminum.

DEFINITIONES.

I.

GEnerali *Fluminis* vocabulo indigitatur hoc loco aqua in superficie terræ itinere plerunque varie inflexo è locis altioribus intra alveum suum ad depressiora indesinenter fluens.

II.

Alveus fluminis est cavitas in superficie telluris, intra quam aquæ decurrunt.

III.

Sectio Fluminis est communis sectio alvei & plani secantis alvei fundo perpendicularis. Ejusmodi sectio ordinarie est figura aliqua irregularis ac propterea vocari solet *Sectio naturalis* ad distinguendam eam ab *artificiali*: nam

IV.

Sectio artificialis est semper parallelogrammum rectangulum, quia intelligitur esse sectio alvei artificialis, seu parallelepipedi formam habentis.

V.

Altitudo viva fluminis est distantia cujusque puncti in superficie fluminis à fundo ejusdem. Et *latitudo viva* est basis alicujus sectionis artificialis.

VI.

VI.

407. Flumen in eodem dicitur statu manere, vel in statu manenti esse, cum inter fluendum nusquam attollitur ejus superficies & intumescit, nec alibi deprimitur vel decrescit, sed eodem semper tenore, durante fluxu, se habet; abstrahendo tamen ab inæqualitatibus accidentalibus, scilicet à vorticibus &c. quæ à fundi & spondarum asperitatibus provenire solent.

PROPOSITIO XXXVIII. Theorema.

408. *Existente flumine in statu manenti, temporibus æqualibus æquales aquæ copiæ per omnes fluminis sectiones transfluent.* Fig. 95.

Si negas, transeat ergo plus aquæ per sectionem AB quam per vicinam sectionem CD, & intumescet aqua inter has sectiones in *bm*D exempl. gratia; sin verò plus aquæ transiret per sectionem CD quam per AB, aqua inter has sectiones decresceret in *bn*D; atque adeo flumen non maneret in eodem statu, contra hypothesin.

Corollarium.

409. Et conversim etiam, superficies fluminis manens erit, si per singulas fluminis sectiones AB, CD, EF, &c. eadem aquæ quantitas temporibus æqualibus perfluit.

PROPOSITIO XXXIX. Theorema.

410. *Si castellum aqua plenum* ABCD *communicet cum lacu ξ ua indefinite amplo per canalem inclinatum* IF *superne opertum superficie curva* IHFξ, *atque exitu aquæ ex castello per lumen* CI, *in canali aqua ita fluat, ut in punctis quibusvis* F, E *sectionis* EF *celeritates pendeant à pressionibus aquæ incumbentis juxta altitudines* SL, *r*O; *quibus puncta illa à suprema aquæ in castello superficie manente* AD *distant, faciantque pressiones illæ, ut per singulas canalis sectiones* GH, EF, &c. *eadem temporibus æqualibus aquæ copia fluat. Dico fore, ut eodem tenore aqua in canali inclinato fluat remoto operimento* IHFξ *curvilineo, quo faceret operta canalis aqua indicata ista superficie operiente, modo tantum aquæ castello influat, quantum per singulas canalis sectiones jugiter transit.* Fig. 96.

Si negas, attollatur ergo aqua, amoto operimento curvo IFξ, quam inter sectiones GH & EF, ergo minus aquæ fluit per sectionem EF quam per præcedentes versus CI vi pressionis naturalis aquæ incumbentis, contra hypothesin.

SCHOLION.

411. *Pressionum naturalium* nomine intelligimus eas, quarum ope velocitates aquæ, ut in E & F, sunt in subduplicata proportione altitudinum O*r*, L*s*, vel ipsarum OD, & LD. Nam quæcunque sit superficies IHFξ, eadem aquæ copia per singulas sectiones GH, EF, &c. fluet propter contiguitatem partium aquæ, quandiu canalis superficie illa curva opertus manet, nec tamen ideo celeritates aquæ reguntur à partibus incumbentibus, juxta tenorem & legem pressionum naturalium; hoc est, velocitates, ex. gr. in E & F, non sunt hoc casu generali ex necessitate in ratione subduplicata O*r*, ad L*s*. Ac propterea contingeret ut remoto operimento canalis superficies tamdiu mutetur, usque dum aqua defluens in canali eam nacta sit, quæ à pressionibus aquæ naturalibus unice dirigatur, ac manens fiat; & hæc proinde ea ipsa est, quam operimento IFξ attribuimus, adeò ut aqua continue in canali fluere queat, si ejus superficies figuram habeat istius operimenti, sive aqua tecta sit isto operimento sive non.

COROLLARIUM I.

412. In hac pressionum naturalium hypothesi innotescere potest, quantum aquæ per singulas sectiones canalis dato tempore fluere debeat. Nam producta prima sectione IC in D usque ad occursum cum superficie aquæ in castello AD, & indefinite deorsum in O, & juxta conditiones paragraphi 404, vertice D circa axem DO descripta
Fig. 96. parabola DTV, ordinatæ ejus LT & OV, quæ transeunt per puncta L & O, in quibus lineæ FL & EO superficiei aquæ in castello AD parallelæ, & per terminos cujuscunque sectionis FE ductæ, axi parabolæ DO occurrunt, exhibebunt quadrilineum paraboli cum LTVO, quod in latitudinem sectionis artificialis ductum manifestabit quantitatem aquæ per sectionem FE unius minuti horarii tempore fluentis, quia calculus propositionis 37. ad hoc tempus est aptatum. Ipsius regulæ ratio patet ex hac ipsa propositione recensitâ.

Co-

Corollarium II.

413. Et data prima canalis sectione IC dabitur quælibet alia EF. Etenim ductis per I, C ordinatis parabolæ IZ, CG, & per punctum E recta EO parallela AD, ac ordinatâ OV, fiat quadrilineum VOLT æquale quadrilineo IZGC, determinabitque OL, intercepta ab ordinatis OV, LT, altitudinem vivam sectionis EF. Nam, quia hæc nominata quadrilinea parabolica (constr.) æquantur, hæc quadrilinea ducta in canalis latitudinem producunt solida æqualia, quæ (§. 404.) quantitatem aquæ fluentis per quamlibet sectionem canalis IC vel EF, &c. exponunt; unde cum hac ratione per singulas sectiones eadem aquæ copia fluit, patet (§. 409.) superficiem aquæ manentem esse. Vicissim data qualibet sectione EF, semper invenire licet primam IC.

PROPOSITIO XL. Problema.

414. *Datis superficie aquæ in castello* AD, *& uno puncto* I *in superficie manente aquæ in canali defluentis* IHζ, *invenire quotlibet alia.* Fig. 96.

Hoc problema jam solutum est in corollario ultimo præcedentis propositionis; sed, quia constructio per quadrilinea parabolica procedens nonnihil incommoda est, ope parabolæ cubicæ secundæ res paulò elegantius confici potest.

Describatur itaque per puncta D & G parabola cubica DPG, in qua cubus abscissæ cujuscunque DL æquetur parallelepipedo ex quadrato ordinatæ respondentis LR in parametrum Q, ita ut sit ubique $DL^3 = Q.LR^2$: sitque P parameter parabolæ conicæ DZT, & $R = \frac{1}{3}DC$. Et hisce positis, data prima sectione IC, reliquæ omnes inveniri possunt ope parabolæ cubicæ, atque adeò curva IHF per puncta describi. Nam ductis ordinatis IP, CG parabolæ cubicæ per superioris IP terminum P, agatur PQ parallela DC, & si sectio canalis in E expetatur, acta EO parallela AD per punctum O, & ducta ordinata paraboloidis OS, in quâ, sumtâ SY æquali GQ, agatur per Y recta YR parallela DO, hæc YR exhibebit altitudinem vivam sectionis EF per punctum E transeuntis, ita ut EF sit = YR; ergo puncta omnia F geometrice inveniri possunt.

Demonstr. I. Parabola cubica, quam paraboloïdem dicam, præbet $DC^3 = Q.CG^2$, parabola verò conica $CG^2 = P.DC$, & $Q.CG^2 =$ P.Q.DC;

P. Q. DC; ergo $DC^3 = P.Q.DC$, vel etiam $P.Q = DC^2$. Est ergo DC media geometrica inter parametros parabolæ & paraboloidis.

II. In paraboloide est $Q.LR^2 = DL^3$, vel $P.Q.LR^2$, id est (num. 1. hujus) $DC^2.LR^2 = P.DL^3$, vel quia parabola efficit P. DL æquale LT^2, $= LT^2.DL^2$; hinc $DL^2 : LR^2 = DC^2 : LT^2$, atque adeò $DL : LR = DC : LT$, hinc $DL.LT = DC.LR$, & per consequens $\frac{2}{3}DL.LT$ seu parabola $DZTL = \frac{2}{3}DC.LR$ (secundùm hypothesin) $= R.LR$. Similiter reperietur parabola, seu area parabolica, $DGVO = R.OS$; ergo quadrilineum $LTVO = R.YS$. Sic etiam quadrilineum $IZGC = R.QG$; unde quia (constr.) $YS = QG$, adeoque quadrilineum LTVO æquale quadrilineo IZGC, (§. 413.) eadem aquæ copia per sectiones IC & EF fluet, atque adeo superficies aquæ IHFξ manens erit. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

415. Ope præsentis, ejusque quæ eam præcedit, ex datis inclinatione canalis seu angulo CAD, sectione qualibet EF ejusque distantia AE à superficie aquæ in castello AD, vel ab origine canalis, innotescent proportio velocitatum E & F, & reliquæ sectiones omnes. Nam ex dato angulo DAC & distantia AE, innotescet ipsa Or, & ex hac & angulo ABC, complemento anguli CAD, elicietur OD; unde, cum sectio EF eique æqualis OL data sit ex hypothesi, ea ex OD subtracta relinquet LD cognitam. Jam descripta circa axem DO & vertice D parabola DGV, ordinatæ LT & QV exponent proportionem celeritatum aquæ in E & F. Sed quia multi sunt casus, quibus distantia EA actuali dimensione haberi nequit, sæpissime hic modus determinandi præmemoratas celeritates in praxi minime succedit, & mechanice eas velocitates investigare convenit.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA.

Fig. 97. 416. *Invenire per observationes artificio mechanico proportionem velocitatum in* E *&* F *cujusque sectionis fluminis canalisve* EF.

Habeatur filum GP cum pondere P, aquâ aliquantum specifice graviore, altero ejus capiti annexo, demissoque pondere P usque ad fundum canalis C0, id pondus ab aqua per punctum E sectionis

FE fluente nonnihil abripietur, & aquæ impressiones in hoc pondus efficient ut filum GP à situ verticali GE angulo quodam EGP declinet. Dehinc extracto pondere ex fundo, & aquæ eum in modum immisso, ut prope superficiem ad punctum F ut in p consistat, declinatio fili gp à situ verticali ge, in quem pondus cum filo se alioqui composuisset, nisi aquæ prope F currentis impressionibus à situ perpendiculari abductum fuisset, sit angulus egp, quem simplici litera g indicabimus, & angulum priorem EGP litera simili G. Horum angulorum complementa ad rectum dicantur C & c, inclinatio canalis, seu angulus GEF, autem I; dehinc assumatur quædam N, quæ sit ad tangentem anguli G, ut sinus complementi C est ad sinum anguli C − I; item n ad tangentem anguli g in ratione sinus anguli c ad sinum anguli c − I, eritque velocitas aquæ in E ad velocitatem in F in subduplicata ratione magnitudinis N ad n.

Demonstr. I. In altera figura 98. repræsentent MN vel MP, aut Mp, longitudinem fili GP vel gp, & MN horizonti verticalis contineat cum recta NQ angulum MNQ æqualem angulo GEθ in fig. 97, sintque anguli NMQ, NMq æquales angulis EGP, egp, seu G & g respective, ductaque NR perpendiculari ad MN, erunt NR tangens anguli G, & Nr tangens anguli g: Et NRM erit C seu complementum anguli G, ac NrM complementum alterius g, id est c. Quin etiam angulus RNQ æquabitur angulo GEF, seu angulo I, nam si ex æqualibus GEθ & MNQ auferentur recti FEθ & MNR remanebunt æquales GEF, RNQ. Eritque adeo angulus RQN = C − I, & rqN = c − I. Fig. 98.

II. Quia gravia in situm horizonti rectum se componere affectant, atque in talem se reapse reducunt, quoties filo annexa à perpendiculari situ abducta, atque sui iterum juris facta [illegible]. Ideireo filum GP non potest in hoc situ consistere, nisi impressionibus aquæ fluentis per E juxta directionem sectioni EF normalem, vel fundo Eθ parallelam, in eo detineatur, necesse igitur est, ut præter gravitatis actionem in corpus P, quæ se in hoc exserit juxta directionem ipsi GE parallelam, alius cujusdam potentiæ actio accedat, quam hoc casu concipimus fieri, ut dictum, juxta directionem ipsi Cθ parallelam. Jam si in figura 98. MN exponit gravitatem ponderis P, quam in aqua habet, altera potentia, quæ fundo canalis parallela est, exponetur linea NQ, quandoquidem (secundum hypothesin) angulus MNQ æqualis est angulo GEθ, atque actione duarum potentiarum collateralium MN & NQ (§. 39, 40.) detinetur pondus P filo annexum

nexum in situ MP, cum MN angulum NMQ seu angulum G continente; similiter repræsentat Nq vim abducentem aquæ filumque angulo g seu egp à verticali ge declinare facientis: adeo ut vires abducentes sint ad se invicem ut NQ ad Nq. Atqui in triangulo NRQ, est NR ad NQ ut sinus anguli NQR seu C—I ad sinum anguli NRQ seu NRM, id est C, & ex hypothesi est tangens anguli G seu NR ad magnitudinem N, sicut sinus C—I ad sinum C, ergo N = NQ. Eodem probabitur argumento esse n = Nq. Itaque vis abducens filum GP à situ perpendiculari GE, est ad vim abducentem fili ge ut N ad n.

III. Sunt vero vires abducentes ut impressiones aquæ in globum P, exsertæ juxta directiones fundo CO parallelas: impressiones vero sunt in duplicata ratione velocitatum in E & in F, ut in sequentibus demonstrabitur, ergo quadratum velocitatis in E est ad quadratum velocitatis in F, ut N ad n, ac per consequens velocitas in E est ad velocitatem aquæ in F, in subduplicata ratione magnitudinis N ad magnitudinem n. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

417. Si angulus GEF, seu inclinatio canalis ad horizontem, nullus est, erit N ad n eo casu, ut tangens anguli G ad tangentem anguli g; atque adeo velocitates aquæ in summo & imo sectionis FE erunt in subduplicata ratione tangentium angulorum g & G.

SCHOLION.

Fig. 96. 418. Hæc omnia, quæ de canali IO ostensa sunt, fluminibus quoque applicari possent, si hæc per totam suam longitudinem eandem latitudinem sectionesque artificiales admitterent, & aquæ fluentes à spondis & fundi inæqualitatibus nullam resistentiam paterentur. Verum quia tales fluvii mathematici in rerum natura non existunt, dispiciendum est, num præcedentia nullum præbere queant adminiculum, quo fluminum aquæ fluentes ad mensuram revocari, eorumque affectiones generaliores explicari queant. Hac in re non inelegantem rationem pro fluviis mediocris altitudinis & latitudinis excogitavit Castellus quam Celeb. Gulielminus deinceps magis perfecit. Hæc methodus ita habet.

Fig. 99. 419. Intelligatur *Cataracta* seu *Regulator* ABDA constans duobus

tignis

tignis parallelis & verticalibus AB, AD horizontali BD conjunctis, & crenis suis instructis, adeò ut his crenis tabula EH inseri, quæ pro re nata attolli & demitti queat ope funis VS unco V alligati, atque adeo lumen FBDH modo arctari modo etiam ampliari queat. Hæc Cataracta seu Regulator in loco commodo fluvii mediocris transversim debet aptari, ita ut tignum BD ripis perpendiculare sit fundoque contiguum, ac denique tigna AB & AD fundo normalia; adeo ut totum planum ABDA fundo ripisque perpendiculare sit.

Si jam quæratur, quantum aquæ per sectionem BM fluminis PQ dato tempore fluere debeat? In hac sectione vel alio commodiore loco collocandus est Regulator eo modo, ut dictum, & tabula EF mobilis demittenda est, ut sectio MB reducatur ad minorem FB, quo fiet, ut minore aquæ copia fluente per lumen arctum FB quam antea per MB, aqua supra sectionem MB intumescat sensim, atque sensim attollatur, usque dum aqua superficiem manentem PN adepta sit, quo casu tantum aquæ fluet per lumen FB, quantum ante fluxerat per MB & quantum per quamlibet aliam sectionem PR fluit, alioqui superficies PN manens non esset. Sed eam ponimus esse manentem, ut sane ad talem statum de necessitate se aliquando componet; quo casu corpus aquæ PRNB tanquam amplo castello seu receptaculo inclusa considerari potest, cui tantum aquæ influit superne per PR, quantum effluit per lumen FB. Atque hisce jam positis calculus facili negotio absolvetur pro obtinenda quantitate aquæ effluentis, dato quodam tempore, per lumen FB. Nam si vertice N & circa axem NB parabola descripta intelligatur NSQ, cujus parameter p sit $= ai : r$ retentis symbolis, quæ supra (§. 401.) significante i sinum anguli observatione dati PNB, r sinum totum & a eam magnitudinem, cujus log-us jam antea (§. 405.) repertus est. Unde, quia etiam BN & FN seu z & x ex observatione datæ sunt, quantitas Q aquæ per lumen FB effluentis juxta normam paragraphi 406. facile calculo subducetur. Fig. 100.

In Propositionibus præcedentibus consideravimus ut plurimum motus aquarum tanquam liberrime factos absque ulla resistentia ex frictionibus. Verum, quia aquæ in fluviorum alveis decurrentes varias resistentias à fundo & spondis subeunt, ejusmodi resistentiarum omnino ratio habenda, atque in certis resistentiarum hypothesibus velocitates singulorum alicujus sectionis punctorum determinandæ sunt.

PROPOSITIO XLI. Problema.

Fig. 101. 420. *Resistentiis aquæ fluentis existentibus proportionalibus aquæ velocitatibus in singulis sectionis punctis, invenire ipsas velocitates.*

Sit flumen BHK, atque EG sectio ejus, AB superficies manens horizontalis, seu initium canalis aut fluminis. Producatur EG in Q usque ad occursum ejus cum plano AB itidem producto; & denique ex quibuslibet punctis E, F, G sectionis EG ad AQ demissæ sint perpendiculares EL, FM, & GN, &c. atque ordinatæ EH, FI, GK &c. alicujus curvæ KIH ipsi GE perpendiculares exponant velocitates aquæ per puncta E, F, G fluentis. Sint jam LE, a, QE, b; ordinata EH, quæ aquæ per punctum E fluentis quantitatem designat $= c$; resistentia fundi ex contactu $= m$, resistentia spondæ $= n$; QF, x & FI, y atque hæc ordinata pariter quantitatem aquæ per punctum F fluentis indicat, ejusque celeritas est $y : c$, ac motus $= yy : c$. Et, quia (secundùm hypothesin) resistentia in E, hoc est m, ad resistentiam in F se habet ut EH ad FI, erit resistentia in F, quatenus hæc participat resistentiam in fundo, $= my : c$, & resistentia in eodem loco proveniens à resistentia spondæ $= ny : c$. Detractis nunc resistentiis à quantitate pressionis aquæ puncto cuilibet F incumbentis, quæ quantitas per MF, seu $ax : b$ exponitur, & reliquum $(ax : b) - (my - ny) : c$, exponet vim extrudentem aquam per punctum physicum F, & cum hæc vis extrudens constanter proportionalis sit motui aquæ genito, erit $(ax : b) - (my - ny) : c = yy : c$, id est $acx - bmy - bny = byy$, quæ est æquatio ad parabolam, cujus axis principalis ab EQ distat, propius accedens ad B, intervallo $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n$, & vertex in hoc axe à fundo DH distat intervallo $b + \frac{bpp}{4ac}$, facta scilicet $p = m + n$; ac denique parabolæ hujus parameter erit $\frac{ac}{b}$. Quod erat inveniendum.

Fortasse aliæ possunt excogitari resistentiæ hypotheses, quæ præsente veriores sint, hanc enim à nobis assumptam non pro certissima vendito, sed duntaxat uno exemplo facili ostendere placuit, quo pacto velocitates aquarum fluentium assignari debeant, non neglectis resistentiis, quæ à frictionibus proveniunt.

SECTIO III.

De Effectis Fluidorum ex percussione.

Expendimus hactenus motus fluidorum, qui resultant ex pressione gravitatis; modo etiam excutiendi sunt effectus eorundem ex percussione, quoties ad alia fluida, aut ad dura corpora, alliduntur; vel etiam, quoties solida fluidis impinguntur. Ad hujus generis effectus referri debent motus imminutiones, quas corpora solida in fluidis protrusa tum ratione figuræ, tum etiam ratione motus ipsius subeunt, id est, resistentiæ corporum in fluidis delatorum. Quæ omnia, & nonnulla alia huc spectantia, sigillatim in hac tertia Sectione ad examen revocabuntur.

DEFINITIO.

421. Cum fluidum in aliud fluidum aut solidum corpus impingitur, fluidi actio in alterum corpus dicitur *Percussio*, & effectus, qui in corpore excipiente percussionem editur, dicitur *Impressio*.

In superioribus subinde impressionis vocabulum latiori paulò sensu sumsimus, etiam pro designando effectu, qui à *pressione* fluidorum provenit.

AXIOMA.

422. Eandem à fluido impressionem excipiet corpus quodcunque solidum, sive id data cum celeritate dataque in directione in fluido feratur, sive fluidum eadem celeritate & directione in idem corpus solidum, sed quiescens, impingat.

CAPUT XI.

De generalibus Affectionibus percussionis fluidorum.

PROPOSITIO XLII. Theorema.

423. *Fluidorum* ABb, CDd *plano* MN *æquabili motu ad angulos rectos occurrentium, ita tamen, ut partes eorum à plano repercussæ libere recedere queant, absque eo quod advenientes impediant, quantitates, æqualibus* Fig. 102.

libus temporibus ad planum MN *accedentes, erunt in composita ratione celeritatum* AB, CD, *latitudinum* Bb, Dd *& densitatum* M, N.

Sint AB*b*, & CD*d* quantitates fluidorum æqualibus temporibus ad planum MN æquabili motu accedentes, eruntque celeritates accessus ut AB ad CD. Quantitates verò fluidorum ad planum MN simul appellentium sint in composita ratione voluminum & densitatum, & volumina in composita ratione celeritatum AB, CD & latitudinum, ergo massa ABb est ad massam CDd, sicut AB. Bb. M ad CD. Dd. N. seu in composita ratione ex rationibus celeritatis AB ad celeritatem CD, latitudinis Bb ad latitudinem D*d*, & denique densitatis M ad densitatem N. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

424. Hinc impressiones, quas massæ fluidæ AB*b*, CD*d* in planum MN exerent, erunt in composita ratione ex duplicata velocitatum AB, CD, & ex simplici tum latitudinum B*b*, D*d*, tum densitatum M, N, id est, impressio massæ AB*b* erit ad impressionem alterius CD*d*, sicut AB^2. B*b*. M ad CD^2. D*d*. N, vel sumta ED tertia proportionali ad AB & CD, sicut AB. B*b*. M ad ED. D*d*. N. Nam impressiones sunt ut motus fluidorum & motus in composita ratione massarum & velocitatum.

COROLLARIUM II.

425. Hinc etiam, si fuerint tubi AB, DE liquoribus quibuslibet pleni, quorum liquorum densitates sint M & N, effluantque liquores per foramina æqualia B, E, impingantque in extremitates vectis EB circa O convertibilis, erit momentum liquoris CB ad momentum alterius FE, ut M. CB. BO ad N. FE. EO.

Fig. 103. Nam percussiones in B & E sunt ut motus fluidorum, adeoque (§. 424.) in composita ratione ex duplicata velocitatum & simpla densitatum, existentibus tuborum foraminibus æqualibus; velocitates vero fluidorum ex tubis erumpentium (§. 386.) sunt in subduplicata ratione altitudinum CB & FE, seu duplicata velocitatum eadem, quæ altitudinum CB & FE; ac propterea percussio in B erit ad percussionem in E sicut CB. M ad FE in N. Verum hæ percussiones, quatenus in vectem BE circa O convertibilem agunt, habent rationem potentiarum motricium vecti applicatarum, ergo cum po-

tentiæ vectis habeant momenta proportionalia factis ex potentiis ipsis in distantias earum ab hypomochlio O, habetur momentum percussionis in B ad momentum percussionis in E, sicut M. CB. BO ad N. FE. EO.

Corollarium III.

426. Propterea torrentes DG, HL, celeritatibus aA, bB ad planum EL accedentes, in æquilibrio consistent cum tertio ON celeritate Cc in idem planum EL impingente, si positis torrentum densitatibus R, S, T, & latitudinibus EG, KL, MN, fuerint $R. Aa^2. EG. AC = S. Bb^2. KL. BC$, & $R. Aa^2. EG + S. Bb^2. KL = T. Cc^2. MN$. Nam si planum EL consideretur instar vectis, erunt (§. 425.) $R. Aa^2. EG. AC$ & $S. Bb^2. KL. BC$ momenta percussionis æqualia, atque adeò in æquilibrio consistent cum tertio QMN quandoquidem (secundùm hypothesin) ejus media directio cC transit per C, & ejus percussio, seu $T. Cc^2. MN$, æquatur duabus oppositis potentiis simul sumtis, scilicet $R. Aa^2. EG + S. Bb^2. KL$. Fig. 104.

In hoc corollario præcipua continentur quæ circa collisiones & percussiones fluidorum inter se notatu digna occurrere possunt.

Corollarium IV.

427. Resistentiæ, quas corpora solida in fluidis delata patientur, erunt in composita ratione densitatum & duplicatæ velocitatum: adeoque hæ resistentiæ in uno eodemque fluido erunt in duplicata ratione celeritatum. Nam, quia (§. 422.) corpora in fluidis incedentia easdem à fluido impressiones subeunt, quas subirent, si fluidum ea celeritate, qua corpora in eo feruntur, in hæc corpora quiescentia impingeret, & quia hæ impressiones sunt ut percussiones fluidi, id est in composita ratione ex duplicata celeritatum & simplici densitatum, resistentiæ vero ut impressiones, quas corpora, quibus resistitur, in fluido subeunt; liquet omnino resistentias, quas corpora in medio fluido mota patientur, esse in composita ratione densitatum & duplicatâ velocitatum, aut si corpora in eodem medio ferantur, in duplicata ratione celeritatum.

PROPOSITIO XLIII. Theorema.

Fig. 105. 428. *Si fluidum, seu torrens* CABD, *data quadam celeritate impingat perpendiculariter in planum* AB, *deinde etiam eadem celeritate, sed sub angulis obliquis* KOF, KOE *alteri plano* EF *primo* AB *æquali, erit impressio, quam subibit planum* AB, *ad impressionem alterius plani* EF *juxta directiones* OP, OQ *planis normales, in duplicata proportione sinus totius ad sinum anguli incidentiæ* KOE; *vel, ductis per* E, O *&* F *perpendicularibus* HL, KOP, IMF *ad planum* AB, *&* MN *normali plano* EF, *sicut* OF *ad* ON.

Quod fluida CABD, HEFI impressiones in plana AB & EF exerant juxta directiones OP, OQ planis normales, constat ex §. 249. Ex puncto R agantur RS, RT perpendiculares & parallelæ plano EF. Jam, quia filamentum fluidi KO ad angulos rectos in planum LM incidit, sub obliquis verò KOE, KOF in planum EF; & si RO celeritatem filamenti exponat, per se claret fore, ut filamentum totam suam vim in planum obliquum EF exerere nequeat, quia directio RO plano isti directe opposita non est, sed resoluta celeritate RO in laterales æquipollentes RS & RT, duntaxat aget in planum EF celeritate RS plano isti directe opposita atque contraria, cum altera RT utpote cujus directio plano EF parallela est, nullam prorsus impressionem in idem planum exerere possit. Est igitur impressio filamenti KO in plano LM ad impressionem ejusdem in plano EF ut RO ad RS, seu ut OF ad OM; unde quia idem est filamentorum numerus binis planis LM & EF allabentium, erit impressio torrentis HLMI in plano LM ad impressionem ejusdem in plano EF, sicut OF ad OM; impressio vero torrentis CABD in plano AB est ad impressionem torrentis HLMI in plano LM, sicut AB ad LM, id est, sicut OF ad OM, aut OM ad ON; ergo ex æquo impressio torrentis CABD in plano AB est ad impressionem torrentis HEFI in plano EF, sicut OF ad ON, id est, in duplicata ratione sinus totius OF ad sinum anguli incidentiæ IFO vel KOE. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Fig. 106. 429. Hinc si fluidum MABN plano AB allabatur celeritate data V, erit impressio, quam planum istud à fluido in id impingente exci-

excipiet, factum ex quadrato velocitatis in rectam AD; ducta scilicet AC perpendiculari ipsis AM, BN & demissa ex C super AB perpendiculari CD. Nam (§. 424.) impressio, quam subiret planum AB à fluido perpendiculariter impingente, est ut V^2. AB, per propositionem verò præsentem est impressio perpendicularis fluidi in plano AB ad impressionem ejusdem, sed oblique impingentis plano AB, ut AB ad AD, seu V^2. AB ad V^2. AD; ergo V^2. AD exponit impressionem fluidi oblique incidentis MABN in planum AB celeritate V, hæcque impressio exseritur juxta directionem EF plano perpendicularem & per ejus centrum gravitatis transeuntem, per §. 249. & §. 54.

Scholion I.

430. Ex præsenti propositione facile deducitur vis clavi seu gubernaculi, cujus ope naves, in quem volueris situm, converti possunt; quod paucis est indicandum. Sint itaque AB navis, B puppis cujus cardini inseritur clavus BH convertibilis circa B, cui per centrum gravitatis X normalis ducta sit Xy. Ponamus jam navem progredi juxta BA ex B versus A quacunque data velocitate, clavumque BH firmatum esse, ut cum AB producta in T quemcunque angulum acutum HBT constituat. Progrediente igitur navi versus E, aqua ABHG, juxta directiones rectæ AB parallelas, ea ipsa celeritate in clavum BH impinget, qua navis contrario sensu versus E fertur; & quia (§. 422.) idem effectus resultat, si aqua ABHG data celeritate in clavum navis quiescentis impingat, quam si navi progrediente clavus eadem illa celeritate aquæ allidatur, & aquæ clavo impingentis impressio est BS, posita unitate pro velocitate, ductisque BR normali ipsi GH, & RS normali BH, quæ impressio exponenda per BS exeritur in clavum juxta directionem XY per centrum gravitatis clavi BH ductam. Idcirco progrediente navi juxta BA, aqua resistens eundem effectum præstabit, ac si clavus impelleretur juxta XY potentia quadam BS; atque adeò hinc liquet, hac potentia BS navim in seipsam conversum iri. Sed quia directio XY alteri HG, juxta quam navis progreditur, non conspirans nec directe contraria, nec etiam perpendicularis est, potentia BS quatenus directioni XY applicatur, non est absoluta potentia, quæ navis conversionem causetur; sed ductis BN perpendiculari BH, æqualique facta ipsi BS, & NO parallela BV, hæc NO exponet vim ple- Fig. 109.

nam

nam conversionis navis; quoniam ON normalis est directioni navis OA, & potentia $BN = BS$ resolvitur in æquipollentes BO & QN, quarum BO, in directum posita ipsi OA, nihil ad gyrationem navis conferre, sed tantummodo ejus motum progressivum aliquantum morari potest, adeo ut sola potentia ON restet, quæ conversionis effectum præstet. Similiter si clavus habeat situm BF, denotabit KI vim rotationis navis, si scilicet ductis QL & BI normalibus clavo BF, factaque $BI = BL$, etiam IK rectæ AT perpendicularis ducta fuerit.

431. Ex contemplatione figuræ statim apparet, ipsas KI & ON æquales esse posse, etsi anguli IBK & NBO diversi sint. Ex quo sequitur, duas diversas clavi positiones æqualiter aptas esse posse ad navis conversionem circa se ipsam. Agantur enim SP & LM parallelæ TB, quæ ipsis ON & KI respective æquales erunt, quandoquidem triangula PSB & ONB, nec non MLB & KIB similia & æqualia existunt. Jam $HR : PS (= HB : SB) = HB^2 : RB^2$, & $ML : QF = QB^2 : FB^2$; ergo si PS & ML vel KI & ON æquales sint, erit ex æquo $HR : FQ = QB^2 : RB^2$, atque adeò $HR . RB^2 = FQ . QB^2$. Hinc, si BH vel BF dicatur a; RH, t; QF, u, erunt $RB^2 = aa - tt$, & $QB^2 = aa - uu$, adeòque $HR . RB^2 = FQ . QB^2$ fiet $aat - t^3 = aau - u^3$; seu $u^3 - t^3 = aau - aat$, adeòque dividendo per $u - t$, erit $uu + ut + tt = aa$, quæ est æquatio indeterminata infinitas suppeditans diversas clavi positiones, quarum binæ & binæ æqualiter aptæ sunt ad navis conversionem.

432. Idcirco, si $u = t$, habebitur $3tt = aa$, atque adeò $t = \sqrt{\tfrac{1}{3}aa}$; & hic valor sinus anguli VBH dabit positionem gubernaculi BH, in qua vis rotationis navis *maxima* existet. Unde si angulus VBH fuerit graduum 35, 16′ circiter, vel angulus HBT graduum 54, min. 44, positio clavi BH ad conversionem navis aptissima erit.

Scholion II.

433. Quæ in præcedenti scholio ostensa sunt, etiam molis alatis facili negotio possunt applicari. Sit enim DE ala verticalis vento circumagenda, cum axicula molæ AB quemlibet angulum acutum ECB continens; ventusque celeritate ut 1, & in directione nN parallela CB, alæ DE allabatur, sintque Ee, Ff parallelæ AB, & $FC = CE$, ductisque EM, ML normalibus ad Ff & FE, & LV parallela rectæ Ff. Per alæ centrum N ducta intelligatur N1 æqualis

Fig. 108, 109.

LE

LE plano alæ DE perpendicularis, & exponet hæc N1 venti impressionem ejusque directionem, quam quælibet linea 2F2E alteri FE parallela subibit, adeò ut totalis impressio, quam ala à vento excipiet, juxta directionem alæ normalem, futura sit PC. N1. Porrò si per punctum 1 transeat recta 13 parallela Nn vel AB, & per punctum N recta N3 eidem Nn normalis, impressioni N1 æquipollebunt laterales 31 & N3, quarum prima 31, utpote AB seu axiculo parallela, ad alæ conversionem nihil confert; sed tantum N3 eidem axiculo molæ AB perpendicularis: adeoque vis rotationis alæ ex impressione juxta N1 derivata erit PC. N3. Verum, quia rectæ N1, 13 & N3 totidem aliis LM, LV & MV parallelæ sunt in plano EFM, & triangula LEV & MLV similia, erunt etiam MLV & 1N3 æquiangula & æqualia, quoniam insuper est LE = N1. Hinc etiam LV = N3 = vi rotationis alæ DE. Hinc itidem PC. N3 = PC. LV.

Igitur si dicantur FE, a; PC, b; FM, t; reperietur LV = $(aa - t^3):aa$, & PC. LV = $(aabt - bt^3):aa$. Intelligatur insuper alam DE aliam habere positionem ac modo habuit, cui respectiva FM sit u, reliquis iisdem manentibus, quæ antea, erit hoc casu homologa PC. LV = $(aabu - bu^3):aa$. Unde, si in binis hisce diversis positionibus ala debeat eadem vi circumagi, ponendum $(aabt - bt^3):aa = (aabu - bu^3):aa$. Hinc $u^3 - t^3 = aau - aat$, quæ divisa per $u - t$, præbet $uu + tu + tt = aa$, quæ est eadem æquatio ac antea (§. 431). Adeòque facta $t = u$, reperitur iterum $t = \sqrt{\tfrac{1}{3}aa}$, atque adeò angulus FEM graduum 35 min. 16; alaque DE in hac positione à vento efficacissime circumagetur. Unde, si alæ DE & GI verticales subcontrario situ eodem angulo seu æquali ECB & HCB scilicet 54$^{gr.}$ 44′ ad AB inclinentur, idemque de horizontalibus, in schemate non expressis, intelligatur; mola alata efficacissime versabitur & circumducetur à vento juxta directiones AB parallelas in alas impingente. Alas autem oppositas situm subcontrarium habere oportet, alioqui, si in eodem plano existerent, prorsus circumagi non possent, quandoquidem venti impressio in una ala destrueretur æquali impressione in ala opposita. Fig. 108.

CAPUT XII.

De Resistentiis figurarum in fluidis motarum.

DEFINITIO.

Fig. 110. 434. SI fuerit figura quæcunque CBABC, linea CBABC ex curvis vel rectis composita, & recta CC terminata, & hæc figura in directione axis MA in fluido feratur ex A versus S; à postica parte verò super basi CC apposita sit alia figura CYC, cujus area curva CYC & recta CC comprehensa, sit ad rec-lum ex basi eadem CC in CL vel MO, quæ quadratum celeritatis exponit, qua figura in fluido incedit, sicut resistentia quam patitur figura CAC in fluido, præeunte ejus vertice A in recta MA, ad resistentiam, quam eadem figura subiret præeunte ejus basi: vel, quod eodem recidit, sicut resistentia figuræ aut potius lineæ curvæ CBABC ad resistentiam rectæ FF basi CC parallelæ & æqualis fluidi impressiones ad angulos rectos excipientis. Linea CBABC dicetur *patiens*, lineaque CIYIC *scala resistentiæ figuræ patientis*.

PROPOSITIO XLIV. Theorema.

Fig. 110. 435. *Si, ductâ per terminum* R *recta*, AR *axi* AM *curvæ patientis* CBABC *perpendicularis lineâ* RS, *parallelâ tangenti* Bu *curvæ patientis in* B, *deinde ex* A *normali* AT *super* RS, *& per* T *recta* TV *æquedistanti axi* AM, *in* BH *eidem axi parallela, sumatur ubique* HI *æqualis respectivæ* RV, *puncta* I *erunt in scala* CIYIC *resistentiarum figuræ patientis* CBABC, *erit resistentia curvæ* CBABC *in directione* MA *versus* S *promotæ, ad resistentiam lineæ rectæ* FF *axi normalis, sicut bilineum* CIYIC *ad rectangulum* CCLL. *Et resistentia superficiei rotundæ ex conversione curvæ* CBA *circa* AM *ad resistentiam circuli ex conversione rectæ* AT *circa eandem* AM, *ut solidum ex revolutione figuræ* CIYM *circa* MY *ad cylindrum ex conversione rec-li* CMOL *circa eandem* MY *seu* MO.

I. Curva ABC in sua elementa divisa intelligatur, quorum B*b* unum, per cujus terminos agantur ZK, *zk* axi AM æquidistantes, rectæ AF in punctis *G*, *g*; ipsi *zb* ordinata BN occurrat in puncto *n*, ex quo ad elementum curvæ B*b* perpendicularis *ne* demissa sit.

Po-

Ponantur insuper BD curvæ normalis, & ED axi AM parallela, & ductis per puncta R & S lineis QR, QS parallelis AS & AR, & ex Q cadat Qθ perpendicularis super RS, & θω perpendicularis super AS. Adeo ut, si insuper lineola *ef* ordinatæ BN parallela ducta fuerit; figuræ *bβBfe* & RQSωθ similes futuræ sint, quandoquidem singula latera unius singulis alterius parallela sunt & similiter posita.

II. Adeoque in figuris similibus *bβBfe* & RQSωθ erit RA : θω = Bβ : *fe*, atque RA. *fe* = θω. Bβ. Verum, quia triangula QSθ & RAT similia & QS ac RA æquales sunt, erit etiam Sθ = RT, & per consequens θω = RV, ergo etiam θω. Bβ = RV. Bβ, id est, per constructionem = HI. H*h*; ac proinde RA. *fe* = rec-lo IH*h* areæ CIYIC inscripto.

III. Igitur, quia filamentum fluidi ZB*bz* in curvæ elementum B*b* impingentis impressio in hoc elementum juxta directionem BD est (§. 429.) AR. B*e*, quia AR exponit (secundùm hypothesin) quadratum celeritatis fluidi curvæ allabentis. Impressio verò, juxta BD, virtualiter continet impressiones ipsi æquipollentes laterales, juxta BE & ED directiones axi AM perpendicularem & parallelam, quarum perpendiculares axi BE, utpote quæ contrariæ & directe oppositæ sunt, quatenus ex duobus elementis circa axem AM similiter, sed ad oppositas partes sitis Bb, Bb derivantur, se mutuo elidunt, ut adeò nulla earum ratio habenda sit, sed solæ impressiones, juxta directiones ED axi parallelas, considerandæ veniant. Est verò (§. 39.) impressio juxta BD ad impressionem juxta ED ut BD ad ED, seu, propter triangula similia, EBD & *f*B*e*, sicut B*e* ad *ef*, id est, ut RA. B*e* ad RA. *fe* seu (num. 11 hujus) rec-lum IH*h*. Atqui, ut initio hujus numeri dictum, impressio fluidi, juxta BD est RA. B*e*; ergo impressio fluidi in elementum B*b*, juxta directionem axi AM parallelam, est rec-lum IH*h*. Atque adeò impressio, quam omnia B*b*, seu tota curva CBABC à fluido subibit, id est, resistentia hujus curvæ exponetur omnibus rectangulis IH*h*, quæ in bilineo CIYIC continentur, & in bilineum istud evanescunt; hoc est, resistentia curvæ CBABC, juxta directionem MA, motæ in fluido exponenda est bilineo CIYIC. Impressio vero, quam linea FF à fluido ad angulos rectos excipit, exponitur rectangulo ex FF in RA, seu (quia constr. CL = RA) rec-lo CLLC. Ergo resistentia, quam curva CBABC in fluido patietur, erit ad resistentiam lineæ FF, ut area CIYIC ad rectangulum CLLC. Quod erat primùm.

Quoad secundam partem Propositionis, cum impressio, quam elementum curvæ Bb à fluido subit juxta directionem ED axi parallelam, (num. 111 hujus) exponatur rec-lo IHh, atque revolutione plani CACY circa axem AY, elementum curvæ Bb describat zonulam conicam, quæ pariter elementum existet superficiei ex conversione curvæ CBA circa AM ortæ, rec-lum vero IHb eadem conversione describat tubum cylindricum solido ex figura CIYM circa MY conversa inscriptum; liquet omninò impressionem fluidi, quam zona conica ex Bb circa AM subibit, in directione axi AM parallela, exponi debere tubo ex rec-lo IHh circa MY. Ergo resistentia, quam universa superficies ex curva CBA circa AM excipiet, juxta AM à fluido impingente, exponitur omnibus tubis cylindricis ex rec-lis IHh circa MY, id est, solido ex figura CIYM circa MY revolvente, in quod omnes evanescunt. Impressio verò quam circulus ex conversione lineæ AF circa AM ortus subibit, exponetur cylindro, cujus basis sit ipse circulus, impressionem fluidi ad angulos rectos excipiens, altitudo verò AR vel CL, seu MO, quæ quadratum celeritatis fluidi allabentis exponunt; vel etiam cylindro ex conversione rectanguli CMO circa MO. Adeoque est resistentia solidi rotundi in fluido CBABC ad resistentiam circuli FF, ut solidum rotundum CIYIC ad cylindrum CLLC. Quod erat secundum.

Corollarium.

436. Cum (constr.) sint $RA = HK$ & $RV = HI$, & $AR : RV = RS : RT = RS^2 : RA^2$, erit etiam $HK : HI = RS^2 : RA^2$, & dividendo $IK : HI = AS^2 : AR^2$; propterea erit $RA : AS = \sqrt{HI} : \sqrt{KI}$. Adeoque, data alterutra ex duabus curvis patiente, vel scala resistentiarum ejus, innotescet semper altera, si non algebraice saltem transcendenter; & quidem scala resistentiarum semper algebraica erit, si patiens curva fuerit.

Scholion.

437. Ergo, si vocentur AN, x; BN seu HM, y; HI, t; HK vel RM, a; AS, m analogia præcedentis corollarii $RA : AS = \sqrt{HI} : \sqrt{KI}$, præbebit $a : m = \sqrt{t} : \sqrt{a-t}$ & $t = a^3 : aa + mm$. I°. Tum etiam $m = a\sqrt{(a-t : t)}$.. II°. Et quia triangula $b\beta$B & ASR similia sunt, erit etiam $dx = dy\sqrt{(a-t : t)}$.. III°. Ac denique etiam $dy = dx\sqrt{(t : a-t)}$.. IV°.

IV°. Hæ postremæ nullo negotio ex secunda eliciuntur, substituendo duntaxat loco a & m elementa proportionalia dy & dx. Jam ope harum quatuor æquationum generalium varia problemata solvi possunt, quorum nonnulla proponere libet.

PROPOSITIO XLV. Problema.

438. *Assignare proportionem inter resistentias, quas triangulum isosceles* BER *in fluido patietur, si, ut in præcedente, modo basi* BR, *modo vertice* E *directione* AE *in id feratur.* Fig. 11B

Exstructo super dimidia basi AB quadrato, AM demittatur ex A perpendicularis AF ad latus trianguli EB, & per punctum F agatur FG parallela axi EA, & facta AI vel BH æquali BG, erit recta HI scala resistentiarum lineæ EB, eritque adeo resistentia lineæ EB ad resistentiam lineæ BA ut rec-lum BI ad rec-lum BP, seu ut AI ad AP; atque adeò in duplicata ratione lineæ EB ad BA, vel aggregati laterum BE & ER ad basin BR trianguli isoscelis BER; atqui, ut resistentia lineæ EB ad resistentiam lineæ BA, ita resistentia linearum BE, RE simul, seu totius trianguli, præcedente ejus vertice E, ad resistentiam basis BR, ergo harum resistentiarum ratio æquivalet duplicatæ rationi laterum BE, RE ad basin BR. Nam, si BA repræsentet quadratum celeritatis trianguli, BG vel AI (§. 435.) exponet ordinatam constantem scalæ resistentiarum HI trianguli, vel potius lineæ rectæ patientis BE. Quod erat inveniendum & demonstrandum.

Corollarium I.

439. Adeoque resistentia quadrati, juxta directionem lateris in fluido delati, erit ad resistentiam ejusdem, sed in directione diagonalis pari celeritate incedentis, ut diameter quadrati est ad latus ejusdem. Nam si triangulum isosceles BER cogitetur rectangulum esse in E, erit (§. 438.) resistentia laterum BE, ER juxta AE ad resistentiam basis BR, quæ diameter est quadrati cujus triangulum BER est semissis, ut AI ad AP, seu BF ad BE; resistentia verò diametri quadrati BR perpendiculariter incedentis super AE, est ad resistentiam lateris quadrati BE itidem normaliter super AE delati, sicut BR ad BE seu 2BA ad BE, seu 2BE ad BR, id est BE ad BA; ergo ex æquo resistentia laterum BER, seu quadrati, juxta directionem dia-

diagonalis AE promoti in fluido, præcedente quadrati vertice E, ad resistentiam lateris BE fluidi, impressionem ad angulos rectos excipientis, est ut BF ad BA, seu ut latus BE ad diagonalem BR, adeoque invertendo, resistentia lateris BE super AE perpendiculariter in fluido delati, ad resistentiam quadrati juxta diagonalem incedentis, est ut diameter ad latus.

Corollarium II.

440. Resistentia coni recti BER juxta directionem axis AE in fluido delati, præcedente tamen ejus vertice E, erit ad resistentiam ejusdem, præeunte ejus basi BR, iterum ut AI ad AP, seu ut BF ad BE. Nam (§. 435.) resistentia primi casus est ad alteram, ut cylindrus ex rectangulo AH circa AP ad cylindrum ex quadrato AM circa eandem AP, sed prior cylindrus est ad alterum ut AI ad AP, cum utriusque cylindri basis sit eadem. Ergo &c.

PROPOSITIO XLVI. Problema.

Fig. 110. 441. *Assignare resistentias Sectionum Conicarum juxta directionem axis in fluido motarum.*

Si ABC sit *ellipsis* vel *hyperbola*, cujus centrum sit in M; dicanturque semilatus transversum AM, b; parameter c; abscissæ AN, x; semiordinatæ NB, y; æquatio ellipseos & hyperbolæ erit $byy = 2bcx \mp cxx$, in differentiata æquatione $bydy = bcdx \mp cxdx$, loco differentialium dy, dx earum proportionales a & m substituantur, quæ sunt nomina linearum RA & AS, fietque $aby = bcm \mp cmx$, atque adeò $m = aby : bc \mp cx$, & $mm = aabbyy : bbcc \mp 2bccx + ccxx$ (vel substituto ex æquatione curvæ valore ipsius $\mp 2bccx + ccxx$, in y) $= aabbyy : bbcc \mp bcyy$; hinc $aa + mm = (aabyy + aabcc \mp aacyy) : bcc \mp cyy$; hinc, quia (§. 437.) $t = a^3 : aa + mm$, erit $t = abcc \mp acyy : bcc + byy \mp cyy$ (seu ponendo e pro $b \mp c$) $= abcc \mp acyy : bcc + eyy$, & hæc foret æquatio scalæ resistentiarum CIY; ponatur insuper $bcc = eff$, & æquatio curvæ CIY erit $t = aeff \mp acyy : eff + eyy = \mp ac : e ; \pm acff + aeff : eff + eyy$ (& substituendo in numeratore postremæ fractionis, loco $\pm c + e$ suum valorem b) $= \mp ac : e ; + abff : eff + eyy$.

Igitur elementum areæ MHIY, seu rec-lum $IHh = \mp acdy : e ; + abffdy : eff + eyy = \mp acdy : e ; + abdu : e$; nominando arcum circularem u, cujus tangens est y & radius f; quandoquidem (§. 166.) hujus arcus

cus elementum, ſeu da, eſt $= ffdy : ff + yy$. Ergo area ipſa erit MHIY $=$ $(abu \mp acy) : e$. Adeoque, ſi baſis CM dicatur g, & arcus radio f deſcriptus, cujus tangens eſt g, nominetur A, erit. univerſa area MCIY $= (ab\text{A} \mp acg : e$. Rectangulum verò CO $= ag$. Ergo reſiſtentia, quam curva CBABC in fluido patietur, erit ad reſiſtentiam lineæ FF, ſicut quantitas $ab\text{A} : e ; \mp acg : e$ ad ag; id eſt, ſicut $b\text{A} \mp cg$ ad eg. Quod erat inveniendum.

Hæc ipſiſſima eſt reſiſtentiarum ratio, quam Celeb. Jac. Bernoullius pluribus verbis, aſt ſine demonſtratione & analyſi, declarat Act. Erudit. Lipſ. 1693. pag. 253, art. 5. Hæc proportio tantum obtinet, cum ſectio conica juxta directionem axis majoris movetur, ſignumque ſuperius ellipſin, hyperbolam verò inferius reſpicit.

Corollarium I.

442. Si b ſit infinita præ parametro c, fiet $e = b \mp c = b$, atque adeò ratio $b\text{A} \mp cg$ ad eg, erit eadem, quæ $b\text{A}$ ad bg vel A ad g. Unde cùm ellipſis cujus latus transverſum eſt infinitum, abeat in *parabolam*, manifeſtum eſt, parabolæ in fluido latæ juxta directionem axis, præeunte modo vertice mox baſi, reſiſti in ratione arcus circuli radio ſemiparametro parabolæ deſcripti, cujus arcus tangens æquetur dimidiæ baſi parabolæ, ad dimidiam hanc baſin.

Corollarium II.

443. Sin vero ABC fuerit *circulus*, ratio $b\text{A} \mp cg$ ad eg abit in rationem cujus termini algebraice dati ſunt, quod omnino meretur, ut hoc loco oſtendatur. Quia circulus eſt ellipſis, cujus latus rectum æquatur parametro, fit hoc caſu $b = c$, atque adeò $b - c = e = 0$; & hoc caſu adhibenda eſt ratio $b\text{A} - cg$ ad eg, ſeu $\frac{b\text{A}}{e} - \frac{cg}{e}$ ad g, verùm $-\frac{cg}{e} = -cg : b - c = g - \frac{bg}{b-c} = g - \frac{bg}{e}$, ratio $\frac{b\text{A}}{e} - \frac{cg}{e}$ ad g æquabitur rationi $\frac{b\text{A}}{e} + g - \frac{bg}{e}$ ad g. Atqui, juxta paragraphum 166, eſt $\text{A} = g - \frac{g^3}{3ff} + \frac{g^5}{5f^4} - \&c.$; ergo $\frac{b\text{A}}{e} + g - \frac{bg}{e} = g - \frac{bg^3}{3eff} + \frac{bg^5}{5f^4e}$ vel (quia $bcc = eff$) fiet etiam $= g - \frac{bg^3}{3bcc} + \frac{bg^5}{5bccff} - \&c. = g - \frac{g^3}{3cc} + \frac{g^5}{5ccff} - \&c.$ ſeu, (quia ff reſpectu cc aut gg infinita, atque adeò fractio $g^5 : 5ccff$ inde-

definite parva seu evanescens est) $= g - \frac{g^3}{3cc}$. Erit ergo resistentia segmenti circularis CBABC ad resistentiam ejus basis, seu ei æqualis rectæ FF, sicut $g; -g^3:3cc$, ad g, id est, ut $cc - \frac{1}{3}gg$ ad cc, vel $bb - \frac{1}{3}gg$ ad bb, aut, quod eodem recidit, velut quadratum diametri, demta una triente quadrati baseos segmenti, ad quadratum diametri; prorsus ut invenit Cl. Bernoullius in loco supra (§. 141.) citato.

SCHOLION.

444. Solidum rotundum CIYIC est ad cylindrum CLLC sicut omnia MH. HI. H*h* ad $\frac{1}{2}MC^2.CL$, vel sicut $\int tydy$ ad $\frac{1}{2}ayy$. Atqui cum t sit (§. 441.) $= \mp ac:e; + abff:eff+eyy = a - \frac{ab}{e} + abff:eff+eyy$, erit $tydy = aydy; -abydy:e; +abffydy:eff+eyy$; ergo $\int tydy = \frac{1}{2}ayy; -abyy:2e; + \frac{abff}{e}.\ \log.\surd(ff+yy:ff)$. Nam integrale ipsius $ydy:ff+yy$ est $\log.\surd(ff+yy:ff)$. Ergò solidum rotundum, ex MHIY circa MY, ad cylindrum HKKH, vel ratio resistentiæ solidi BAB ad resistentiam baseos BB, præeunte modo vertice A, modo basi BB in directione MA, est sicut $\frac{1}{2}ayy; -\frac{1}{2}abyy:e; + \frac{abff}{e}.\ \log.\surd(ff+yy:ff)$ ad $\frac{1}{2}ayy$, vel sicut $yy; -byy:e; + \frac{2bff}{e}.\ \log.\surd(ff+yy:ff)$ ad yy; aut denique etiam, ut $\frac{2bff}{e}.\ \log.\surd(ff+yy:ff) \mp \frac{cyy}{e}$ ad yy. Ubi iterum signum superius respicit ellipsin, hyperbolam verò inferius.

Idcirco conöidi parabolico in directione axis suæ lato resistitur, præeunte modo vertice modo basi, in ratione $2ff.\ \log.\surd(ff+yy:ff)$ ad yy, vel $2cc.\ \log.\surd(cc+yy:cc)$ ad yy.

445. Sphæræ segmento resistitur, in iisdem ac in præcedentibus circumstantiis, in ratione $cc - \frac{1}{3}yy$ ad cc; atque adeò resistentia hemisphærii, juxta directionem axis MA lati, erit tantum semissis resistentiæ lineæ FF.

Nam in sphæra fit $b=c$ & $e=0$, at $\log.\surd(ff+yy:ff) = \frac{yy}{2ff} - \frac{y^4}{4f^4} +$ &c. hinc ratio $yy; -byy:e; + \frac{2bff}{e}.\ \log.\surd(ff+yy:ff)$ ad yy abibit in rationem

tionem $yy - \frac{by^4}{2eff}$ ad yy; vel $2eff - byy$ ad $2eff$ (aut quia $eff = bcc$), in $2bcc - byy$ ad $2bcc = 2cc - yy$ ad $2cc = cc - \frac{1}{2}yy$ ad cc.

PROPOSITIO XLVII. PROBLEMA.

446. *Invenire curvam patientem* ABC, *quæ sui ipsius sit scala resistentiarum.* Fig. 110.

Oportet ergo curvas CAC & CYC similes & æquales esse, adeò ut BH = HI, & AM = MY, ut & AN = PY. Positaque, ut in præcedentibus, RS parallela elemento curvæ quæsito Bb, erit RV = HI = BH, & Ru = hi = bh, adeoque βb = Vu, ductisque per u recta $u\sigma$ ipsi RS occurrente in puncto σ, & per hoc rectula $\sigma\pi$ parallela RA; & super diametro RA descriptus circulus transibit per punctum T, cum angulus RTA (constr.) rectus sit; quibus positis, & cum jam dictum sit Vu = $\sigma\pi$ æquari $b\beta$, erit Tπ = Bβ = Hb; atqui producta $u\sigma$ usque ad occursum cum semicirculo Φ ex hoc puncto agatur $\Phi\rho$ parallela RA; Tπ = Tρ + $\rho\pi$ = Tρ + $\Phi\sigma$, seu, ut alibi (§. 463, num. III.) ostendetur = Tρ + TΦ, unde omnes Tπ seu Bβ id est ordinata BN = omn. Tρ, seu ordinatæ TV + omnibus arculis TΦ, seu arcui AT, est ergo ordinata curvæ quæsitæ BN aggregatum arcus AT ejusque sinus; atque adeò curva ABC est cyclois ordinaria. Quod erat inveniendum.

Hinc resistentia cycloidis CBABC erit ad resistentiam basis ejusdem, ut area cycloidis ad rec-lum circumscriptum, atque adeò ut 3. ad 4.

PROPOSITIO XLVIII. PROBLEMA.

447. *Ex omnibus frustis conicis* BCSR *super eadem data basi* BR *ejusdemque altitudinis* AD *invenire verticem* E *illius, cui minime resistatur, si in directione axis* AD *in fluido incedat data quadam celeritate.* Fig. 111.

Super AB, facto quadrato AM ex A super EB, demittatur perpendicularis AF, & ducatur FG parallela axi coni EA, factaque BH = BG agatur HI parallela BA, & (§. 435.) HI erit scala resistentiarum trianguli BER, cylindrusque ex conversione rec-li AH circa AI exponit resistentiam coni BER in fluido, & cylindrus ex AL resistentiam coni CES, atque adeo annulus ex conversione rectanguli KH circa AP exponet resistentiam curticoni BCSR, ex-

cepta

cepta resistentia, quam circulus CS subibit in fluido, cujus impressiones ad angulos rectos excipit, quæ circuli CS resistentia exponitur cylindro ex AN circa AP. Ergo resistentia universi frusti conici BCSR exponi debet duobus solidis, scilicet annulo ex KH circa AP, & cylindro ex AN circa eandem, & (secundùm hypothesin) hæc duo solida *minimum* quoddam efficere debent. Sit V punctum medium ipsius BK, eritque VA distantia centri gravitatis rectanguli BL ab axe AP, adeoque p. AV exprimet circumferentiam, quam centrum gravitatis una rec-li conversione describet circa DA, ubi p significat exponentem rationis peripheriæ circuli ad radium. Unde cum solida rotunda (§. 47.) inveniantur ex ductu figuræ rotantis circa aliquem axem in viam centri ejus gravitatis, factum ex rec-lo BL in p. AV, id est p. AV. CK. BH æquabitur annulo ex rec-lo BL circa AP, peripheria vero, quam centrum gravitatis rectanguli AN describit, erit $\frac{1}{2}p$. AK, adeoque $\frac{1}{2}p$. AK^2. KN erit valor cylindri ex AN circa AP. Atque adeò p. AV. BK. BH + $\frac{1}{2}p$. AK^2. NK exponit resistentiam quam curticonus BCSR in fluido subibit, ac propterea efficere debet aliquod *minimum*. Aut etiam annulus ex rectangulo LM circa AP rotato debet esse in suo genere *maximus*, quandoquidem prædictorum solidorum ex KH & AN complementum est ad datum cylindrum ex quadrato AM circa AP rotato. Adeoque p. QI. HL. HM quod solidum annulum illum ex LM exprimit, debet esse *maximum*. Jam, si dicantur AB, a; AD, $2b$, seu AO & OD, unaquæque seorsim b; AE, x; facili calculo reperietur solidum p. QI. HL. HM $=(x-b).\,2a^3bp : aa+xx$, unde omissâ quantitate constante in numeratore, quacum indeterminata $x-b$ multiplicata est, $(x-b):aa+xx=$ maximo. Hinc log. $(x-b)-$log. $(aa+xx)=$ constructio, atque adeò $dx : x-b = 2xdx : aa+xx$, hinc $aa+xx = 2xx-2bx$, id est, $xx-2bx=aa$, vel $xx-2bx+bb=aa+bb$, vel extrahendo radicem $x-b=\sqrt{(aa+bb)}$, seu $x=b+\sqrt{(aa+bb)}$. Quæ æquatio ipsissimam constructionem suppeditat, quam Celeb. Newtonus sine analysi & demonstratione tradidit in Schol. post Prop. 35. Lib. Sec. *Princ. Phil. Nat. Math.* quæ ita habet: ex puncto medio O altitudinis AD frusti conici ducatur OB, cui æqualis fiat OE, eritque E vertex coni quæsiti BER.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA.

Fig. 112. 448. *Datis positione recta* CI *duobusque punctis* A & B, *invenire in*

in hac recta positione data tertium punctum C, *ut lineæ ex eo ad data puncta ductæ* AC, CB *cum rectis* AD, BF *rectæ* CI *ejusque parallelæ* DF *normalibus, figuram rectilineam* DACBF *forment, quæ circa axem* DF *in gyrum acta producat solidum, cujus superficies exclusis circulis à lineis* AD, BF *descriptis*, minimam *in fluido resistentiam patiatur, incedente solido juxta directionem axis* FD.

Analys. Puncta data A, B à rectâ CI æqualiter distare ponantur, ut sint æquales CG & BI. Ex puncto T medio datæ lineæ LM (quadratum celeritatis exponentis, quâ fluidum solido patienti allíditur) tanquam centro descriptus sit semicirculus LPM, quem linea MO alteri DF in directum posita contingat in M, eritque adeò LM parallela ipsis AD & BF. Per L agantur LO, LN parallelæ lineis AC, BC, secantes semicirculum in P & Q, per quæ puncta transeant PR, QS parallelæ MN; rectæ MP & MQ ipsis PL & QL perpendiculares erunt. Puncto C, aliud c indefinite vicinum intelligatur, tum etiam rectæ cA, cB ductæ sint, & hisce parallelæ Lo, Ln semicirculum secantes in punctis q & p, per quæ pariter transeant ordinatæ qs & pr, ductisque Pπ & Qρ parallelis diameter LM, $p\pi$ & $q\rho$ erunt elementa ordinatarum PR & QS. Sit iterum p exponens rationis circumferentiæ circuli ad radium, bisectisque CG in α, & BI in β, denotabunt p. Eα circumferentiam radii Eα, & p. Fβ circumferentiam radii Fβ, adeoque annuli à lineis CG, Bi circa DF revolventibus geniti, erunt p. Eα. CG, & p. Fβ. BI.

II. Jam per ea, quæ in præcedentibus (§. 435.) sunt ostensa, resistentia, quam in fluido subibit annulus conicus à recta AC circa DF in orbem acta descriptus, exponitur per p. Eα. CG. LS & resistentia annuli ex BC circa DF. per p. Fβ. BI. LR, adeoque resistent. annuli AC + resistent. annuli BC = p. Eα. CG. LS + p. Fβ. BI. LR. Similiter resistent. annuli ex Ac + resistent. annuli Bc = p. Eα. CG. LS + p. Fβ. BI. Lr. Jam, quia ex natura *minimi* resistentia annuli AC + resistent. annuli BC = resistent. annuli Ac + resistent. annuli Bc, erit etiam p. Eα. CG. LS + p. Fβ. BI. LR = p. Eα. CG. LS + p. Fβ. BI. LS, vel quia (secundùm hypothesin) CG & BI æquales sunt, dividendo per p. CG aut p. BI; erit Eα. LS + Fβ. LR = Eα. Ls + Fβ. Lr atque adeò Eα. Ss = Fβ. Rr, vel Ss : Rr = Fβ : Eα.

III. Ob parallelas LO, AC, & Lo, Ac; erit Oo : LM = cC : CG, vel Oo : Cc = LM : CG & Nn : Cc = LM : BI vel CG, ergo Oo = Nn. Atqui Nn : Pp ut triangulum NLn ad 2. triangula PTp, quorum scilicet basis Pp, altitudo verò pT; nam trianguli hujus PTp duplum

eſt triangulum, cujus baſis etiam Pp, ſed altitudo dupla ipſius pT, ſeu diametro LM æqualis; atque adeò ejusdem altitudinis cum triangulo LNn: & angulus NLn = angulo (modo nominati trianguli) ad verticem in circumferentia alterius ſemicirculi in figura non expreſſi; ergo $Nn : Pp = NL^2 : LM^2 = NL : PL = LM : LR$. Eodem argumento eſt $Oo : Qq = LM : LS$, ſeu invertendo $Qq : Oo$ vel $Nn = LS : LM$; ergo ex æquo $Qq : Pp = LS : LR$. Sed propter triangula ſimilia $Qq\rho$ & TQS, eſt Ss vel $Q\rho : Qq = QS : QT$, ergo ex æquo $Ss : Pp = LS.QS : LR.QT$. Item propter triangula ſimilia $Pp\pi$, TPR eſt $Pp : P\pi$ vel $Rr = PT$ vel $QT : PR = LR.QT : LR.PR$, ergo denuo ex æquo fit, $Ss : Rr = LS.QS : LR.PR$; atqui ſupra (num. 11. in fine) invenimus $Ss : Rr = F\beta : E\alpha$, ergo $F\beta : E\alpha = LS.QS : LR.PR$, & $E\alpha.LS.QS = F\beta.LR.PR$.

IV. Igitur, ſi dicantur LM, a; $E\alpha$, e; $F\beta$, f & MO, m; quarta proportionalis MZ ad datas BH, HA & LM dicatur g, & hæc g vel MZ deprehendetur eſſe media arithmetica inter incognitas MO & MN, unde, cum MO ſit m, altera MN invenietur $= 2g - m$. Et ſubſtitutis his valoribus in canone paulo ante reperto $E\alpha.LS.QS = F\beta.LR.PR$, pervenietur ad æquationem quinque dimenſionum, quæ, ſalvo calculo, erit ut ſequitur:

$$\begin{array}{llllll} +e\,m^5 & -8eg.m^4 & +24egg.m^3 & -8aage.mm & +a^4e.m & -2a^4fg = 0. \\ +f & -2fg & +2aaf & -4aafg & +a^4f & \\ & & +2aae & -32g^3e & +16g^4e & \\ & & & & -8aaegg & \end{array}$$

Cujus radices determinant valores quæſitæ MO; qua inventa ductaque OL, ſi per datum punctum A ducetur AC parallela ipſi OL, quæ AC occurrat rectæ CI, ei occurret in optato puncto C. Quod erat inveniendum.

Exiiſſet pariter æquatio 5. dimenſionum, ſi vel maxime lineas CG & BI inæquales aſſumpſiſſemus.

Corollarium I.

449. In canone ſupra invento $L\alpha.LS.QS = F\beta.LR.PR$ jam continetur ſolutio problematis de *ſolido minimæ reſiſtentiæ*. Hoc enim caſu CG & BI perinde ac AG & CI ſupponendæ ſunt indefinite parvæ, quo fiet, ut αE & AD, item βF & CE inſtar æqualium tractari debeant; & cum omnia ſolida $L\alpha.LS.QS$; $F\beta.LR.PR$, &c. ſingula ſcilicet

cur-

curvæ elementa AC, CB, &c. reſpicientia, æqualia ſint, ponatur unumquodque eorum dato cubo LM^3 æquale, eritque adeò $La.LS.QS = LM^3$, aut vocando Ea vel DA, y; CG, dy; AG, dx; & ut prius LM, a, & denique MO, m; $a^3my:(aa+mm)^2=a^3$, hinc $y=(aa+mm)^2:aam=aa:m;+2m;+m^3:aa$, & $dy=-aadm:mm;+2dm;+3mmdm:aa$, & quia propter ſimilitudinem triangulorum CGA & LMO, eſt $mdy=adx$, ideo invenietur quoque $dx=-adm:m;+2mdm:a;+3m^3dm:a^3$; ergo $x=mm:a;+3m^4:4a^3-lm$, ubi lm ſignificat log-um indeterminatæ m in log-mica, cujus ſubtangens eſt a. Et hæc ſolutio ad amuſſim convenit cum ea, quam Celeb. Joh. Bernoullius in Act. Erud. Lipſ. 1699. p. 515. exhibuit, & in Actis anni ſequentis uberius explicuit.

Corollarium II.

450. In æquatione $y=(aa+mm)^2:aam$, vel $y:a=(aa+mm)^2:a^3m$, ſi loco $aa+mm$, a, & m ſubſtituantur differentialia ds^2, dy, & dx, quæ illis proportionalia ſunt, proveniet $y:a=ds^4:dxdy^3$; adeòque $ads^4=ydxdy^3$, quæ eſt æquatio differentialis curvæ quæſitæ in quam laudatiſſimus Bernoullius citato loco incidit, & ex ea poſtea expreſſiones coordinatarum in præcedenti corollario repertas elicuit. Hisce omnibus Illuſtris Marchionis Hoſpitalii ſolutio etiam conſona eſt, quam in Actis Lipſ. & in Commentariis Acad. Reg. Scient. anni 1699. publicari voluit.

Solas hactenus reſiſtentias illas contemplati ſumus, quas corpora in fluidis delata ſubeunt, cum juxta directionem axis moventur. Sed ſi in aliis directionibus incedant, res evadet paullò altioris indaginis, ut ex ſequenti problemate eleganti abunde patebit.

Propositio L. Problema.

451. *Si datum trilineum quodcunque* ABH, *curva* AVB *ejus axe* AH *& ordinata* BH *terminatum, quomodocunque in fluido feratur juxta directionem* SM *ex* S *verſus* M, *invenire mediam directionem* Xu *fluidi curvæ* AVB *allabentis, & impreſſionem, quam fluidum juxta inventam mediam directionem in trilineum exſeret.* Fig. 113.

Analyſis Geometrica. I. Per quodlibet curvæ AVB elementum Bb agantur BB, bb rectæ ipſi SM parallelæ, ductisque BC & Ce rectæ bb & elemento curvæ Bb normalibus, exponatque MO perpendi-

cularis ad axem curvæ AH quadratum celeritatis, quâ trilineum in fluido incedit, vel quod idem est, quadratum velocitatis, quâ filamentum *b*BB*b* elemento curvæ B*b* allabitur, exponetque (§. 429.) MO. B*e* impressionem, quam filamentum *bb*BB, juxta directionem BF in elementum B*b* exseret, sed impressioni isti æquipollent laterales juxta BG & GF, quarum hæc axi AH parallela, illa verò perpendicularis est; & quia impressiones juxta BF, BG & GF sunt ut hæ lineæ respective, vel propter triangulorum BFG & B*ef* similitudinem, sicut B*e*, B*f* & *ef*, atque impressio juxta BF = MO. B*e*, erit impressio juxta GF = MO. *ef*, & impressio juxta BG, = MO. B*f*. Et sic respective in quolibet alio curvæ elemento.

II. Agantur porrò per M recta MN parallela elemento curvæ B*b*, vel tangenti curvæ in B, ex N perpendicularis NP ad lineam SM, quantum opus est productam, PQ normalis MN, & denique QR parallela MO; eritque figura NPMO similis figuræ BC*b*E, cum singula latera unius figuræ parallela sint singulis alterius. Propterea latera in hisce duabus figuris similiter posita proportionalia erunt; hoc est, *b*E : *ef* = MO : QR, atque adeò MO. *ef* = QR. *b*E. Vel etiam, ducta per B recta indefinita BL parallela axi AH, atque in ea sumta KL ubique æquali respectivæ QR, ita ut inde nova curva δ*u*L resultet, erit MO. *ef* (= QR. *b*E) = KL. K*k* seu rec-lo figuræ AδLK inscripto.

Item EB : *f*B (= ON : RN) = MO : QR, ac consequenter MO. Bf = QR. EB, vel etiam = rec-lo IH*h* areæ A*a*IH inscripto, si, etiam in singulis ordinatis BH ultra axem AH productis, sumta fuerint segmenta HI æqualia homologis QR seu KL.

III. Quoniam igitur singulæ fluidi impressiones in curva AVB juxta directiones curvæ perpendiculares æquipollent lateralibus axi curvæ parallelis exponendis (num. I. hujus) rec-lis MO. *ef*, vel (num. II.) rec-lis LK*k*, & perpendicularibus axi exponendis (num. I.) per rec-la MO. B*f*, seu (num. II.) per rec-la IH*h*, impressio, quam universa curva AVB à fluido subibit, æquipollebit omnibus LK*k* & omnibus IH*h*; atqui omnium potentiarum *k*KL axi AH parallelarum media directio Z*u*, axi itidem parallela, (§. 56.) transit per centrum gravitatis areæ AδLK, quæ omnia LK*k* continet; & omnium potentiarum IH*h* axi AH perpendicularium media directio VY, axi AH normalis, seu ordinatis HI curvæ *a*YI æquidistans, transit per centrum gravitatis figuræ A*a*IH, quæ omnia IH*h* continet. Ergo impressio, quam fluidum in curvam AVB exerit

rit, eundem effectum præstat, quem præstaret potentia, quam exponit rec-lum MO. XZ, æquale areæ AδLK, agens in curvam juxta directionem XZ, simul cum potentia MO. XY, æquali areæ AαIH, agente in curvam AVB juxta directionem XY; quandoquidem hæ potentiæ MO. XZ & MO. XY æquivalent omnibus LKk & omnibus IHh, & in harum omnium mediis directionibus XZ & XY curvæ AVB applicatæ intelliguntur. Sed (§. 49.) media directio potentiarum MO. XZ & MO. XY est Xω, transiens per centrum gravitatis ω punctorum Z & Y, quibus rectæ XZ & XY terminantur, & quorum punctorum gravitas exponitur per datam MO, & impressio, quam proinde fluidum juxta hanc mediam directionem Xω in curvam AVB exeret, exponetur rec-lo 2MO. Xω.

IV. Sin verò curva A2V2B sit subter axem AH constituta, quæ juxta directionem eidem ac in præcedenti casu SM, parallelam feratur, transferenda erit OS ad oppositam partem O2S, & ducenda M2S, tum ex puncto N demitti debet super M2S perpendicularis N2P, & 2P2Q super MN, ac denique 2Q2R parallela MO; posita scilicet MN parallela tangenti curvæ A2V2B ad alteram axis AH partem translatæ in puncto 2B, erit 2Q2R communis ordinata curvarum δuL & αYI, sed ad curvam inferiorem A2V2B pertinentium, quas deinceps, confusionis vitandæ gratia, per 2α2u2L & 2A2α2Y2I insigniemus, quanquam in schemate expressæ non sunt, quia mente facile supplentur. Erit ergo impressio fluidi in curva inferiore A2V2B, juxta mediam directionem ejus 2X2ω, exponenda per 2.MO. 2X2ω, eandem prorsus ob rationem, propter quam impressio in curva AVB juxta mediam directionem Xω ostensa est exponi rec-lo 2.MO in Xω. Quod verò loco ipsius SM in curva AVB nunc sumenda sit 2SM inde est, quia revolutione figuræ A2V2B cum lineis 2B2B ipsis BB (secundùm hypothesin) parallelis circa axem AH, adeo ut si curva A2V2B alteri AVB similis & æqualis fuerit, cum ea congruat, lineæ 2B2B veniunt in situm B2B subter rectam BL, eosdem vel æquales angulos constituentes cum angulis BBL, quos lineæ BB supra BL extantes cum hac BL continent, adeò ut anguli quilibet homologi BBL & LB2B vel anguli MSO & M2SO æquales futuri sint.

V. Si jam bilineum BVA2V2B juxta directionem ipsis BB, 2B2B vel AT parallelas in fluido incedat, & quæratur media directio Cσ impressionum fluidi in curva BA2B, sic res expediri potest beneficio numerorum quarti & tertii hujus propositionis. Per numerum Fig. 114.

rum

rum tertium etiam habentur media directio $X\beta$ & impressio fluidi in curva AVB, quæ illic exponebatur per 2.MO.$X\omega$. Sit igitur $X\beta = 2M\omega$ in fig. 113. eritque MO. $X\beta$ impressio fluidi, juxta mediam directionem in curva AVB, designante MO ubique velocitatis quadratum, qua celeritate videlicet fluidum curvæ prædictæ allidituг. Similiter, juxta numerum quartum hujus, invenientur media directio $2X2\beta$ & impressio fluidi, juxta hanc mediam directionem 2 in $2X2\omega$.MO, vel (si $2X2\beta$ sit dupla ipsius $2X2\omega$) MO.$2X2\beta$. A puncto intersectionis C duarum $X\beta$ & $2X2\beta$ sumantur in hisce æquales $C\theta$ & $C2\theta$, scilicet $C\theta = X\beta$ & $C2\theta = 2X2\beta$, jungaturque $\theta2\theta$, adeoque per §. 49. media directio potentiarum MO.$C\theta$ & MO.$C2\theta$, quæ æquipollent fluidi impressionibus, quas ambæ curvæ AVB & A2V2B subeunt, transit per centrum gravitatis punctorum θ & 2θ, id est, per punctum medium σ rectæ $\theta2\theta$, & per punctum C, atque adeo hæc media directio est $C\sigma$, potentiaque seu impressio fluidi in universa curva BVA2V2B erit 2.MO.$C\sigma$. Quæ omnia erant invenienda.

Aliter & brevius.

Numerus tertius hujus propositionis, ac consequenter quæ post eum sequuntur, omnia velut corollarium duntaxat deduci possunt ex Propositione VIII. Libri Primi §. 59. Nam figuræ similes NPMO & BC*b*E præbent *b*B : *e*B (= MN : QN) = MO : QR atque adeò MO.B*e* = B*b*. QR. Atqui MO. B*e* (num. 1. hujus) exponit impressionem filamenti fluidi *bb*BB in curvæ elemento B*b*, ergo hæc impressio etiam exponi potest per B*b*. QR, atque adeo fluidum eandem vim in elementum B*b* exserit, quam si singula elementi puncta juxta directiones eidem perpendiculares urgerentur potentia QR, adeo ut tota res reducatur ad Coroll. 1. prædictæ Prop. 8. Lib. I. Idcirco duntaxat propositionis ejusque corollarii constructiones forent relegendæ, atque loco curvarum ABB, XF & XD in figura 15. substituendæ AVB, αYI & δuL figuræ 113. ac denique, loco potentiarum BG in illa, subrogandæ potentiæ QR in hac figura, incideremusque in easdem penitus conclusiones, quas in præcedentibus numeris præsentis propositionis elicuimus.

Co-

COROLLARIUM I.

452. Idcirco, ducta per punctum C recta Co parallela axi AH, invenietur sinus totus ad tangentem anguli $oC\sigma$, quem media directio $C\sigma$ bilinei BA2B cum axe AH, seu linea huic axi parallela Co continet, ut aggregatum arearum $A\delta LK$ & $2A2\delta 2L2K$ ad differentiam arearum $A\alpha IH$ & $2A2\alpha 2I2H$. Nam demissis ex punctis θ, σ, 2θ perpendicularibus θo, $\sigma\xi$, $2\theta 2o$ ad Co, & quia σ est punctum medium rectæ $\theta 2\theta$, seu centrum gravitatis punctorum θ, 2θ, erunt (§.46.) $2.C\xi = Co + C2o$, & $2.\xi\sigma = \theta o - 2\theta 2o$; adeoque $C\xi : \xi\sigma$, vel sinus totus ad tangentem anguli $\xi C\sigma = Co + C2o : \theta o - 2\theta 2o = MO.\,Co + MO.\,C2o : MO.\,\theta o - MO.\,2\theta 2o = A\delta LK + 2A2\delta 2L2K$ ad $A\alpha IH - 2A2\alpha 2I2H$. Nam (constr.) $MO.\,Co$; $MO.\,C2o$; $MO.\,\theta o$ & $MO.\,2\theta 2o$ æquantur areis $A\delta LK$, $2A2\delta 2L2K$; $A\alpha IH$ & $2A2\alpha 2I2H$.

COROLLARIUM II.

453. Sin verò bilineum fuerit ABE2BA, cujus partes, superior ACB & inferior A2B, inæquales sint, punctumque altissimum C arcus curvæ superioris ACB non existat in arcus termino B, sinus totus erit ad tangentem anguli, quem media directio impressionis fluidi in bilineo B2B cum axe AE continet, ut $A\delta LK + A2\delta 2L2K - FKL$ ad $A\alpha YI - A2\alpha 2Y2I$. Ubi δL est scala impressionum fluidi axi bilinei AE parallelarum, quæ ex perpendicularibus curvæ arcui AC derivantur, & FL est scala impressionum axi etiam parallelarum, sed derivatarum ex perpendicularibus arcui curvæ BC; & quia impressiones illæ axi parallelæ, quibus arcus BC afficitur, directe contrariæ sunt parallelis axi AE, quibus AC urgetur, ideo differentia arearum $A\delta LK$ & FLK sumenda est ad habendam expressionem impressionum axi AE parallelarum, quibus tota curva ACB supra axem extans afficitur. Curvæ verò αYI, $2\alpha 2Y2I$ ad axem IA exstructæ sunt scalæ impressionum axi AE normalium ex perpendicularibus curvarum ACB & A2B impressionibus derivatarum, ac denique $2\delta 2L2K$ est scala impressionum axi parallelarum pertinentium ad curvam A2B. Curvarum αYI & $2\alpha 2Y2I$ ordinatæ in punctis axis I & 2I nullæ sunt, quia lineæ BB & 2B2B, quæ fluidi bilineo allidentis directionem denotant, bilineum in punctis B & 2B contingunt. Propter eandem rationem etiam curvæ FL ordinata Fig. 115.

in puncto F, in quo scilicet recta BF axi parallela alteri AK occurrit, nulla est.

COROLLARIUM III.

Fig. 113. 454. Si jam dicantur MO, a; OS, b; MS, c; coordinatæ AH, x; BH, y, & ON, m; ac MN, n: erunt SN $= b + m$, vel N2S respectu curvæ inferioris $= b - m$. Hinc similitudo triangulorum SMO, SNP præbebit PN vel N2P $= (ab \pm am) : c$, ubi signum superius respicit curvam superiorem AVB, inferius verò inferiorem. Porrò habetur MO : QR $(=$ MN : QN$) =$ MN^2 : PN^2; atque adeò QR $=$ MO. PN^2 : MN^2 $= (b \pm m)^2 . a^3 : aacc + ccmm$, vel assumendo magnitudinem e, atque ponendo ecc æquale a^3; $= (b \pm m)^2 . e : aa + mm$ $= (bbe \pm 2bem + emm) : aa + mm = e, \pm 2bem : nn; + (bb - aa) . e : nn$, vel ponendo denique $bb - aa = ff$, invenietur tandem scalarum resistentiæ seu fluidi impressionum communis ordinata QR $=$ KL $=$ HI $= e; \pm 2bem : nn; + eff : nn$.

Fig. 116. Jam data æquatione curvæ patientis AVB vel A2V2B, eaque differentiata, si loco elementorum dy & dx ordinatæ & abscissæ substituentur eorum proportionales a & m, seu MO & ON, habebitur æquatio expressa indeterminatis x, y & m, & quantitatibus datis seu constantibus, ex qua elicietur valor ipsius m in x & y ac constantibus, in quo ope æquationis curvæ patientis AVB vel A2V2B alterutra ex indeterminatis x vel y semper eliminari potest. Invento verò valore ipsius QR in y & constantibus, areæ AδLK, 2A2δ2L2K; & AαIH, 2A2α2I2H inveniri poterunt, si non algebraice saltem transcendenter per series, aut etiam approximationibus. Sed horum omnium usus uno atque altero exemplo illustrari debet.

455. EXEMPLUM I. Esto rectangulum BA2B incedens juxta directionem AT in fluido resistente; quæritur media directio SA impressionum hujus fluidi rectangulo allabentis. Angulus BA2B recta AH bisectus sit, & hæc linea AH versus W producta consideretur instar axis linearum AB & A2B, quarum hæc repræsentat curvam patientem inferiorem, illa vero superiorem; atque demissis ex B, 2B & ex puncto T in recta AT, pro libitu accepto, perpendicularibus BH, 2B2H ac TW secante AN in puncto S, erunt AH $=$ BH & A2H $=$ 2B2H, propter angulos semirectos BAH & 2B2A2H. Sint insuper AH $=$ BH $=$ X & A2H $=$ 2B2H $= x$, & BH $=$ Y, 2B2H $= y$, unde X $=$ Y & $x = y$; hinc dX $= d$Y, & $dx = dy$; unde utroque casu erit $a = m$, atque

atque adeò $mm (= aa + mm) = 2aa$. Ergo substitutis hisce valoribus in formula ipsius QR valores determinante, invenietur pro linea AB ejus valor huic casui applicatus QR $(= e, + 2bem : nn ; + eff : mm) = e ; + be : a ; + eff : 2aa$, (seu restituendo $a^3 : cc$, & $bb - aa$ valores quantitatum e & ff) $= (a^3 + 2aab + abb) : 2cc$. Adeoque elementum areæ AδLK seu rec-lum $Lk = (aa + 2ab + bb). ad\mathrm{Y} : 2cc$, & area ipsa $= (aa + 2ab + bb.)\, a. \mathrm{AH} : 2cc$. Similiter area 2A2δ2L2K erit $= (aa - 2ab + bb).\, a. \mathrm{A}\alpha\mathrm{H} : 2cc$. Area AαIH pro linea AH $= (aa + 2ab + bb).\, a. \mathrm{AH} : 2cc$; & area 2A2α2I2H $= (aa - 2ab + bb).\, a. \mathrm{A2H} : 2cc$. Hinc (§. 452.) AW : SW seu sinus totus ad tangentem anguli SAW $=$ AδLK + 2A2δ2L2K : AαIH − 2A2α2I2H, atque adeo analytice erit $\mathrm{AW : SW} = (aa + 2ab + bb).\, a. \mathrm{AH}, + (aa - 2ab + bb.)\, a. \mathrm{A2H}$ ad $(aa + 2ab + bb).\, a. \mathrm{AH}, - (aa - 2ab + bb).\, a. \mathrm{A2H} = (2ab + cc). \mathrm{AH}, + (cc + 2ab). \mathrm{A2H}$ ad $(cc + 2ab). \mathrm{AH}, - (cc - 2ab). \mathrm{A2H}$. Ducatur TV parallela AL, eritque ob angulos semirectos MTW & WTV, MW = TW = WV, atque adeò cum AW (§. 454.) dicatur b & TW, a; erunt $a + b = \mathrm{AV}$, seu $aa + 2ab + bb = \mathrm{AV}^2 = cc + 2ab$, & $aa - 2ab + bb = cc - 2ab = \mathrm{AM}^2$; hinc $\mathrm{AW : SW = AV^2. AH + AM^2. A2H : AV^2. AH - AM^2. A2H = TL^2. AH + ML^2. A2H : TL^2. AH - ML^2. A2H = R.T^2 + R^2.t : R.T^2 - R^2.t = T^2 + Rt : T^2 - Rt}$. Positis AL : TL = R : T & AH : A2H = R : t; ita ut T & t tangentes sint angulorum datorum TAL & AB2B, ducta scilicet rectanguli diametro B2B, existente sinu toto seu radio R. Ducatur adhuc NX parallela TV vel AL, eruntque etiam MQ, NQ, & QX æquales; jam quia AW : SW = AQ : NQ vel QX, erit etiam = AX + AM : MX = LN + LM : LN − LM, atque adeò AW + SW : AW − SW = 2LN : 2LM = LN : AL vel LM. Verum, quia paulò ante reperiebatur $\mathrm{AW : SW = T^2 + Rt : T^2 - Rt}$, erit etiam $\mathrm{AW + SW : AW - SW = T^2 : Rt}$; ergo etiam $\mathrm{LN : AL = T^2 : Rt}$: sed est AL : LT = R : T = Rt : Tt; ergo ex æquo $\mathrm{LN : LT = T^2 : T}t = \mathrm{T} : t$. Ducatur diagonalis rectanguli 2AA, eaque producatur in Z, & existente AL radio, seu sinu toto, erunt TL & ZL tangentes angulorum TAL & ZAL vel A2A2B, quæ tangentes dicebantur T, & t; atque adeò LN : LT = LT : LZ; sunt ergo NL, TL & ZL in continua ratione, ac per consequens NL ad TL in subduplicata ratione NL ad ZL, sed hæc ratio NL ad ZL componitur rationibus NL ad AL, & AL ad ZL, id est, 2A2B ad A2B; ergo ratio NL ad TL est subduplicata ejus, quæ componitur ex NL ad AL & longitudinis rectanguli AB ad latitudinem A2B,

 atque

atque hæc est analogia, quam Celeb. Jac. Bernoullius in Actis Lipsf. 1696. pag. 336. sine ulla analysi & demonstratione exhibuit, & in quam haud dubie via multo breviore incidit. Nam licet hunc casum particularem non parum brevius, quam hoc loco à nobis factum sit, solvi posse non ignoro, non abs re tamen fore arbitratus sum, si methodum nostram generalem talia tractandi etiam in aliquo casu fusius illustrarem, de cujus veritate aliunde constare possit.

456. Præsens exemplum particulare sic brevius etiam expedietur: per angulos rectanguli B & 2B agantur BC, 2B2C æquidistantes ipsi AT, & per punctum A eidem perpendicularis C2C, ac denique ex punctis C, 2C demittantur ad latera rectanguli perpendiculares CD 2C2D, ac assumta unitate pro designanda celeritate, qua rectangulum in fluido incedit, vel quod idem est, pro velocitate, qua fluidum lateribus rectanguli AB, A2B allabitur, & (§. 429.) A2D exponet impressionem fluidi, quam latus A2B in directione ipsi normali excipiet, & AD exponet impressionem, quam latus AB excipiet juxta directionem lateri A2B parallelam, seu AB perpendicularem. Unde cum media directio AN impressionum fluidi in lateribus AB & A2B nascatur à potentiis lateralibus AL & LN, necesse est ut habeatur, $AL:LN = A2D:AD$; atqui $A2D: A2B = (A2B)^2:(A2C)^2 = AL^2:AT^2$, & $A2B:2A2B$ vel $AB = ZL: AL = AL.ZL:AL^2$, ergo ex æquo $A2D:AB = AL.ZL:AT^2$; estque porrò $AB:AD = AB^2:AC^2 = AT^2:TL^2$, adeoque iterum ex æquo $A2D:AD = AL.ZL:TL^2$. Atqui (secundùm hypothesin) $AL:LN = A2D:AD$, ergo $AL:LN = AL.ZL:TL^2$, & quia $TL: AL = TL^2:AL.TL$, erit denique ex æquo $TL:NL = AL.ZL: AL.TL = ZL:TL$, atque adeo TL est media proportionalis inter tangentes angulorum datorum ZAL vel A2A2B & NAL, ut supra invenimus. Quod erat demonstrandum.

Fig. 113. & 114. 457. EXEMPL. II. Resumatur bilineum BA2B, quod ponatur esse parabolicum, cujus æquatio $2ax = yy$; existentibus coordinatis ad axem AH, x & HB vel 2H2B, y ac parametro $2a$. Æquatio bilinei differentiata præbet $adx = ydy$, vel substitutis loco elementorum dx & dy lineis proportionalibus m & a; $am = ay$ atque adeò $m = y$; hinc $nn = aa + yy$. Idcirco $QR = KL = HI (= e; \pm 2bem:nn; + eff:nn) = e; \pm 2bey:aa+yy; + eff:aa+yy$. Hinc (§. 454.) reolum $Lk = edy; \pm 2beydy:aa+yy; + effdy:aa+yy$.

Atqui omnia edy seu summa $edy = ey$; ac omnia $ydy:aa+yy$ æquantur log-mo rationis $aa+yy$ ad aa qui log-us dicatur $z:a$; respicitque lo-

logarithmicam, cujus subtangens est unitas. Et denique omnia $dy : aa + yy$ æquantur arcui circulari ω applicato ad aa quadratum radii, cujus arcus tangens sit y; nam ejusmodi arcus elementum seu $d\omega = aady : aa + yy$. Propterea invenietur area AδLK (2A2δ2L2K) $= ey; \pm 2bez : a; + eff\omega : aa$; adeoque addendo A$\delta$LK + 2A2$\delta$2L2K $; = 2ey; \mp 2eff\omega : aa$ (vel loco ff restituendo suum valorem $bb - aa$) $= 2ey; + 2bbe\omega : aa; - 2e\omega = 2eg; + 2bbe\omega : aa$; positâ ad abbreviandum $g = y - \omega$.

Arearum AαIH (2A2α2I2H) elementum est $= edx; \pm 2beydx : aa + yy; effdx : aa + yy = eydy : a; \pm 2bey^2dy : a^3 + ayy; + effydy : a^3 + ayy$; quia $ydy = adx$. Atqui $yydy : aa + yy = dy, - aady : aa + yy = dy - d\omega$, & ut antea, $ydy : aa + yy = dz : a$, ac propterea,

AαIH (2A2α2I2H) $= eyy : 2a; \pm (2bey - 2be\omega) : a; + effz : aa$; adeoque A$\alpha$IH $-$ 2A2α2I2H $= (4bey - 4be\omega) : a = 4beg : a$, posita scilicet $y - \omega = g$.

Ducantur per A rectæ AT parallela BB, & AS æquidistans Cσ, eritque AW : WS $=$ Cξ : $\xi\sigma$ $=$ AδLK + 2A2δ2L2K : AαIH $-$ 2A2α2I2H $= (2eg; + 2bbe\omega : aa) : (4beg : a) = aag + bb\omega : 2abg$; & TW : AW $= a : b = 2abg : 2bbg$; ergo ex æquo fiet TW : WS $= aag + bb\omega : 2bbg$. Dicantur insuper TW, θ & SW, t; radiusque AW, r; eritque $\theta : t = aag + bb\omega : 2bbg$, & quia $r : \theta = b : a$, substitutis loco b & a proportionalibus r & θ, proveniet $\theta : t = \theta\theta g + rr\omega : 2rrg$; ex quâ elicietur $\theta\theta = \frac{2rr\theta}{t} - \frac{rr\omega}{g}$; adeoque ipsæ æquationis radices erunt $\theta = \frac{rr}{t} \pm V\left(\frac{r^4}{tt} - \frac{rr\omega}{g}\right)$. Jam quia singulæ r, g, ω & t datæ sunt, etiam θ data erit, quæ est tangens anguli TAW, quem directio figuræ BA2B in fluido incedentis cum axe AH continet, cum figura itinere permanente fertur absque conversionibus circa seipsam; qui angulus TAW angulus declinationis figuræ audit, ejusque tangens, TW declinatio ipsa; linea vero σC est directio, juxta quam figura in fluido ideo impelli debet, ut in directione ipsis BB, AT, &c. parallela itinere seu via manenti ea in fluido ferri queat; quæ omnia suo loco uberius explicabuntur. Fig. 114.

Cæterum exempla eorum casuum, in quibus curvæ, superior AB & inferior 2A2B, sunt similes & æquales, adeò ut hæ curvæ fluidi impressionibus expositæ communem abscissam AH, ordinatasque æquales BH & 2B2H habeant. Sed ea, ratione calculi, intricatiora evadunt, si curvæ AB & A2B, ut fig. 115. inæquales & tamen similes seu totæ ACE, A2BE æquales sunt, tunc enim

punctorum B & 2B positio, atque adeò abscissarum AH, A2H, & ordinatarum BH & 2B2H magnitudo pendet à positione rectæ AT, seu ab angulo quæsito TAW. Quomodo vero pro casibus hisce calculus debeat subduci, ex sequenti elucescet corollario.

COROLLARIUM IV.

Fig. 115. 458. Sint $\int mdy : nn = A1 : a$; vel $A2 : a$; vel $A3 : a$ pro curvis AC, A2B & CB, item $\int dy : nn = B1 : aa$ vel $B2 : aa$; aut $B3 : aa$, respectu earundem curvarum AC, A2B, & CB. $\int mdx : nn = C1 : a$, vel $C2 : a$, vel $C3 : a$; respectu earundem curvarum, & denique $\int dx : nn = D1 : aa$, vel $D2 : aa$ vel $D3 : aa$. Ubi numeri, literis A, B, C, D postpositi non sunt potestatum indices, sed tantum indicant quamnam ex curvis AC, A2B & BC hoc ordine, quo recensentur, respiciant in figura 115. Unde, quia in fig. 113, QR vel KL aut $HI = e; \pm 2bem : nn; + eff : nn = e; \pm 2bem : nn; + (bb - aa).e : nn$; quia $ff = bb - aa$ ut supra (§. 454.) invenimus. Hinc area $A\delta LK = e.CD; + 2be.A1 : a; + (bb - aa).eB1 : aa$, respectu curvæ AC fig. 115. Area $2A2\delta 2L2K = e.2B2H; - 2be.A2 : a; + (bb - aa).eB2 : aa$, respectu curvæ A2B. Area $FKL = e.KF; - 2be.A3 : a; + (bb - aa).eB3 : aa$, respectu curvæ CB. Area $A\alpha Yd = e.AD; + 2be.C1 : a; + (bb - aa).eD1 : aa$, respectu curvæ AC. Area $2A2\alpha 2Y2I = e.A2H; - 2be.C2 : a; + (bb - aa).eD2 : aa$; respectu curvæ A2B, & Area $dYI = e.DH; - 2be.C3 : a; + (bb - aa).eD3 : aa$; respectu curvæ BC. Ergo $A\delta LK + 2A2\delta 2L2K - FLK = e.F2K; + 2be.(A1 - A2 + A3) : a; + \overline{bb - aa}.(B1 + B2 - B3)e : aa$, & $A\alpha Yd + YdI - 2A2\alpha 2Y2I = e.H2H; + 2be.(C1 + C2 - C3) : a; + bb - aa.(D1 - D2 - D3)e : aa$. Atqui (§. 453) est $AW : WS = A\delta LK + 2A2\delta 2L2K - FLK : A\alpha Yd + YdI - 2A2\alpha 2Y2I$, ergo etiam $AW : WS = e.F2K; + 2be(A1 - A2 + A3) : a; + \overline{bb - aa}.(B1 + B2 - B3)e : aa$, ad $e.H2H; + 2be.(C1 + C2 - C3) : a; + bb - aa.(D1 - D2 + D3)e : aa$. Unde, cum TW sit ad $AW = a : b$; habebitur ex æquo analogia, quæ suppeditabit æquationem quæsitam anguli TAW tangentem manifestaturam; sed quia ipsæ A2H, 2H2B, EH, HB ac per consequens ipsæ quoque HD & 2HD pendent à quantitatibus a & b, quarum hæc adhuc incognita est, ideo etiam ipsæ A2, A3, B2, B3, C2, C3 & D2 & D3 ab iisdem pendent; quod calculum perplexum reddit; præsertim si curvæ ACE & A2BE fuerint dissimiles seu diversæ.

459. Po-

459. Ponamus verò nominatas curvas ACE & A2BE similes & æquales esse, quo fiet ut arcus EB & A2B æquales sint; cum lineæ BB & 2B2B, ipsi AT (secundùm hypothesin) parallelæ, arcus in B & 2B contingant, propterea erunt EH = A2H, item BH = 2B2H, atque adeò HD = D2H, nec non producta 2B2H usque ad occursum ejus curvæ ECA in 3B, fiet 2H3B = 2B2H = BH, ac per consequens linea BF, ipsi EA parallela, secabit curvam ECA in puncto 3B, adeo ut arcus BC & C3B similes & æquales futuri sint. Hisce positis reperietur A1 = A2 + A3; B1 = B2 + B3; C1 = C2 + C3 & D1 = D2 + D3; ac proinde hoc casu habebimus

A1 − A2 + A3 = 2.A3 seu dupla A3.

B1 + B2 − B3 = 2.B2.

C1 + C2 − C3 = 2.C2.

D1 − D2 + D3 = 2.D3. Adeoque hi valores, in analogia præcedentis paragraphi subrogati, præbebunt AW : WS = e. F2K + $4be$. A3 : a; + ($2bbe - 2aae$). B2 : a^2, ad e. H2H; + $4be$. C2 : a; + ($2bbe - 2aae$). D3 : aa, vel dividendo terminos per $2e$, sicut FA; + $2b$A3 : a; + ($bb - aa$). B2 : aa; ad DH; + $2b$C2 : a, + ($bb - aa$). D3 : aa; & WT : AW = $a : b$; ergo ex æquo erit WT : WS = a. FA + $2b$. A3; + ($bb - aa$). B2 : a, ad b.DH; + $2bb$. C2 : a; + ($b^3 - aab$). D3 : aa; vel vocando tangentem anguli dati SAW, t; & tangentem quæsiti TAW, θ; habebimus $\theta : t = a^2$. FA + $2aab$. A3; + ($abb - a^3$). B2 : aab. DH, + $2abb$. C2, + ($b^3 - aab$) D3; adeoque, multiplicando extrema & media, habebimus æquationem sequentem generalem a^2t. FA + $2aabt$. A3 + ($abbt - a^3t$). B2 = $aab\theta$. DH, + $2abb\theta$. C2, + ($b^3\theta - aab\theta$). D3. In quâ æquatione loco magnitudinum FA, DH, A3, B2, C2 & D3 subrogandi sunt earum valores, quos præbebit natura curvæ A3BC expressi quantitatibus a, b, aliisque constantibus; positisque loco b, radii seu sinus totius nomine r, & loco ipsius a nomine tangentis quæsitæ θ, habebitur æquatio in sola θ & quantitatibus constantibus seu cognitis data, cujus æquationis radices manifestabunt valorem tangentis anguli quæsiti TAW.

460. Exempl. Sint curvæ ACE & A2BE arcus æquales alicujus circuli, cujus radius = e, ac sinus complementi arcus AC, qui est semissis totius ACE vel A2BE, dicatur h, sintque $b^3 : 3ee = k$, & $k - h = l$, invenienturque A3 = $a^3e : 3c^3$, B2 = l; + $be : c$; − $b^3e : 3c^3$; C2 = $b^3e : 3c^3$; − k, ac denique D3 = $a^3e : 3c^3$. Erunt porrò AF vel BH = $be : c$; − h, & DH vel D2H = $ae : c$; qui valores in æquatione generali substituti, fractionum reductionibus ad nomen $3c^3$ rite per-

peractis, præbebunt $bblt - aalt - aaht; + 2.(aa+bb)^2.bet : 3c^3 = -2bbk\theta; + 2.(aa+bb)^2.be\theta : 3c^3$. Atqui (secundùm hypothesin) est $l + h = k$, & (§. 454.) $cc = aa + bb$, ergo hi valores, in postrema æquatione suffecti, præbebunt $bblt - aakt + \frac{2}{3}bcet = -2bbk\theta + \frac{2}{3}bce\theta$. Hinc etiam $3bblt + 6bbk\theta - 3aakt = 2bce\theta - 2bcet$, & quadrando $9b^4lltt + 36b^4lkt\theta - 18aabblktt + 36b^4kk\theta\theta - 36aabbkktt + 9a^4kktt = (4bbee\theta\theta - 8bbeet\theta + 4bbeett)$ in cc. Unde substituendo $aa + bb$ loco cc, fiet $4aabbee\theta\theta - 8aabbeet\theta + 4aabbeett + 4b^4ee\theta\theta - 8b^4eet\theta + 4b^4eett = 9b^4lltt + 36b^4lkt\theta - 18aabblktt + 36b^4kk\theta\theta - 36aabbkktt + 9a^4kktt$. Vel positis loco b & a proportionalibus r & θ, in hac postrema æquatione, proveniet $4rree\theta^4 - 8rreet\theta^3 + 4rreett\theta\theta + 4r^4ee\theta\theta - 8r^4eet\theta + 4r^4eett = 9r^4lltt + 36r^4kt\theta - 18r^4lktt\theta\theta + 36r^4kk\theta\theta - 36rrkktt\theta\theta + 9kktt\theta^4$. Ex qua liquet problema esse solidum, nam radices hujus æquationis biquadraticæ exhibent valorem tangentis quæsitæ θ, seu tangentis anguli TAW, seu anguli declinationis bilinei 2BAC.

COROLLARIUM V.

461. Si curvæ AB & A2B sunt æquales, adeò ut communem abscissam AH habeant & ordinatas æquales BH & 2B2H, ut in figura 113. erunt A1 = A2 & A3 = 0; B1 = B2, & C1 = C2; D1 = D2, singulæ verò B3, C3 & D3 perinde ac A3 æquales 0; evanescet pariter linea, quæ in figura 115. repræsentatur per DH vel D2H, alteraque, quæ erat in hac eadem figura FA, in priore scilicet fig. 113. erit BH. Hoc ergo casu formula generalis paragraphi 459. mutabitur in $aat.\mathrm{BH} + (bbt - aat).\mathrm{B2} = 2bb\theta.\mathrm{C2}$. In exemplo proinde superiore (§. 457.) curvæ parabolicæ, retentis symbolis illic positis, erunt $\mathrm{BH} = y$; $\mathrm{B2} = \omega$ & $\mathrm{C2} = y - \omega = g$, atque adeò æquatio $aat.\mathrm{BH} + (bbt - aat).\mathrm{B2} = 2bb\theta.\mathrm{C2}$, abibit in $aaty + bbt\omega - aat\omega = 2bb\theta g$, vel $aatg + bbt\omega = 2bb\theta g$; atque adeò subrogatis loco a & b proportionalibus θ & r, erit $tg\theta\theta + rrt\omega = 2rrg\theta$, ac proinde

$$\theta\theta = \frac{2rr\theta}{t} - \frac{rr\omega}{g};$$ quæ est eadem æquatio, quam citato loco reperimus.

At sciendum hanc solutionem imperfectam esse, quoniam æquatio amplius non inservit, si ratio tangentis y ad arcum ω minor fuerit duplicata ratione secantis anguli SAW ad radium in fig. 114. Sed eo in casu ipsa θ, ne quidem supposita arcuum circularium rectificatione, nulla æquatione algebraïca exhiberi potest.

SCHO-

SCHOLION.

462. Ex allatis exemplis satis constare potest, quam late pateat solutio problematis in præsenti propositione exhibita. An verò & quousque ea cum solutione ejusdem problematis conveniat, quam summus geometra Joh. Bernoullius in tractatu, Gallico idiomate sub titulo *Essay d'une nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux*, nuperrime edito dedit, utriusque collatio ostendet.

Si angulus TAW datus sit, & alter angulus SAW quæratur, problema facile est; tunc enim in superioribus θ & r cum reliquis scilicet a, b, c, sunt magnitudines cognitæ, & quæsita est t.

CAPUT XIII.

De Figuris, quas superficies flexiles induere debent, cum Venti allapsus directe excipiunt, seu de curva VELARIA.

QUamnam curvam induere debeat *velum* vento tumidum ante Celeberrimos Bernoullios nemo assignavit; sed eximii hi geometræ invenerunt velum ab allabente vento in eam ipsam curvam flecti debere, quam Joh. Bernoullius & Leibnitius atque Hugenius funi laxo atque flexili, vel catenulæ ab ambobus sui terminis pendenti convenire docuerunt, etsi eorum analysis velariæ nusquam publici facta sit juris. Sed quanquam *catenaria* atque *velaria* una eademque sint curva, non tamen ideo putandum, unius investigationem simul alterius quoque inventionem includere, adeò ut, qui catenariam geometrice invenerit, etiam velariæ problema solutum dedisse censendus sit, quod tamen Clariss. Vir David Gregorius insinuare videtur, in sua Catenaria Coroll. 7. post Prop. 2. sic scribens: *Quod si loco gravitatis alia quælibet vis similiter agens in lineam flexilem vires suas exerat, eadem producetur linea v. g. Si ventus æquabilis supponatur, & secundum rectas datæ positione rectæ parallelas spirans, linea vento inflata eadem erit cum catenaria.* Fateor quidem in thesi, ut ajunt, veram esse Egregii Viri assertionem, ecquis enim ambiget, quin alia quæcunque vis, loco gravitatis substituta, similiter applicata, ac eodem prorsus ac gravitas modo agens, eundem

 effe-

effectum, eandemque adeo curvam ac gravitas, productura sit? Sed theseos applicatio in negotio velariæ claudicat, cum notabilis disparitas intercedat inter actionem gravitatis in catenaria, & venti actionem in velaria. Nam æquales catenariæ particulæ æqualibus nisibus descendere conantur juxta directiones horizonti perpendiculares, secus quam in velaria, cujus particulæ etiamsi æquales à filamentis aëreis eadem etiam velocitate in eas impingentibus inæquales tamen impressiones subeunt, & quidem juxta directiones non horizonti, sed curvæ elementis perpendiculares. Cum igitur circumstantiæ, quibus gravitas in catenariam ventusque in velariam agunt, toto cœlo differant, nemo non videt, quod ea, quæ de catenaria demonstrata sunt, non magis velariæ quadrare queant, quam analysis curvæ lintei convenire possit indagini curvæ elasticæ, etsi notante Clar. Jac. Bernoullio elastica etiam eadem sit cum curva lintei. Quoniam igitur problematis catenariæ solutio non involvit solutionem velariæ, & quoniam hujus problematis solutio, vel rectius dicendo analysis, nusquam adhuc publice, quod sciam, exhibita est præterquam §. 103. ubi ad illustrationem generalissimi nostri theorematis problematis de velaria solutionem obiter elicuimus, partem physicam problematis alibi excutiendam illic relinquentes; nunc vero ex professo problema tractabimus, analysin ejus geometricam tradituri intelligentibus, ut opinor, non displicituram, præmissis tamen prius duobus lemmatis in aliis etiam usui futuris.

PROPOSITIO LI. Lemma.

Fig. 117. 463. *Centro* O *& semilatere transverso* OA *descripti sint quadrans circuli* AGK, *& hyperbola æquilatera* ABM, *tum etiam logarithmica* AC *circa asymptotam* LK, *cujus subtangens sit* OL *æqualis radio quadrantis* OA, *quæ log-mica per punctum* A *transeat, ductisque ex quolibet hyperbolæ puncto* B *ad centrum* O *recta* BO, *tangente hyperbolam in vertice* AP, *secante in puncto* F, *& per hoc punctum* F *recta* FH *parallela radio* AO, *quadrantem secante in* G, *&* OK *in* H. *Si* KG *recta jungens puncta* K *&* G *producatur usque dum cum radio* OA *itidem protenso concurrat in puncto* D, *atque per hoc punctum ducta fuerit recta* DC *ipsi* LK *æquidistans. Rectangulum sub hac* DC *& radio* OA *æquabit ubique duplum respondentis sectoris hyperbolici* ABO.

Sumto alio in hyperbola puncto *b*, alteri B indefinite vicino, ducantur *b*O secans AP in *f*, item *fh*, parallela FH, circulum in *g*, re-

rectam KG in $\varkappa$, & OK in puncto h interfecans; jungaturque Kg & producatur in d, per quod punctum alia de ducta sit priori DC æquidistans: agantur pariter dL & OG, item C$\varkappa$ parallela Od, & γg parallela OK, hyperbolæ ordinata EB continuetur usque in β, & CD usque in δ; quibus factis per quadrantis puncta G & K ductæ sint tangentes GI & KI, quæ æquales erunt; quibus præparatis

I. Liquet fore dL parallelam tangenti log-micæ in puncto C, quandoquidem hujus log-micæ subtangens (secundùm hypothesin) æqualis est OL; atque adeò $d\delta$ parallela & æqualis erit particulæ log-micæ Cc, ac etiam $c\varkappa$ = Dδ.

II. Triangula similia OEB, OAF præbent $OE^2 : EB^2 = OA^2 : AF^2$. Vel, quia in hyperbola quadratum OE æquatur binis quadratis OA & EB collective sumtis, erit etiam $OA^2 + EB^2 : EB^2 = OG^2 : OH^2$; & dividendo $OA^2 : EB^2 = GH^2 : OH^2$ vel AF^2, vel invertendo ac permutando $EB^2 : AF^2 = OG^2 : GH^2$. Atqui $EB^2 . AF^2 = OB^2 : OF^2$ = 2. triang. BOβ ad 2. triang. FOf, id est, ad rec-lum FH. Hh, ergo 2. triangulum BOβ : FH. Hh = $OG^2 : GH^2$.

III. Triangula similia Gga & GIK exhibent Gg : ga = GI : IK, unde, quia tangentes IK & GI æquantur, etiam Gg & ga æquales erunt.

IV. Propter parallelas Od & hg, erit Od : Dd = hg vel HG : ag vel (num. III.) Gg, & invertendo ac permutando Dd : Gg = Od : GH, at Dδ : Dd = OL vel OG : Od, ergo ex æquo Dδ : Gg = OG : GH, & propter triangula similia OGH & G$g\gamma$, fit Gg : γg vel Ff = OG : GH ergo ex æquo & per rationum compositionem, Dδ : Ff = OA. Dδ : FH. Ff = $OG^2 : GH^2$ (num. II.) = 2. triangulum BOβ : FH. Ff vel FH. Hh. Adeoque 2. triang. AOβ = OA. Dδ (num. I.) = OA. $c\varkappa$. ergo omnia 2. BOβ id est duplus sector BAO = omnibus $c\varkappa$ in AO, id est rec-lo DC in AO. Quod erat demonstrandum.

Aliter.

464. Per hyperbolæ punctum B ducta sit tangens BT, ac per punctum T recta TV parallela OK rectæ OB occurrens in puncto V, ac denique agatur Bθ parallela AD.

I. Ostendam, quod TV producta transibit per punctum G, adeo ut TO = GH. Nam in hyperbola lineæ GH, OA & OE sunt in continua ratione, atqui propter tangentem BT, etiam OT, OA & OE sunt in continua ratione, ergo OT = GH.

II. Elementum quadrantis Gg æquabitur lineolæ $B\beta$. Nam $Gg : \gamma g$ vel $Ff = OG : GH = AO : TO = EO : AO$, atqui etiam $B\beta : Ff = EO : AO$, ergo $Gg : Ff = B\beta : Ff$, atque adeò $Gg = B\beta$.

III. Figuræ similes $b\theta B\beta$ & $BETV$, utpote quæ circa eandem rectam bT constitutæ, & è triangulis similibus $b\theta B$, BET, & $bB\beta$, BTV compositæ sunt, præbent analogiam $b\theta : B\beta$ vel (num. II. hujus) Gg aut (num. III. §. 463.) $ga = EB : TV = EO : TO$, atqui $ga : Dd = GH$. (num. I. hujus) $OT : Od$, & $Dd : D\delta = Od : OL$ vel OA, ergo ex æquo habetur $b\theta : D\delta = EO : AO = AO : TO$; atque adeò $b\theta . TO = AO . D\delta = AO . c\kappa$.

IV. Est verò duplum trianguli $bTO = be : TO$, duplumque trianguli $BTO = BE . TO$, ergo duplum trianguli $BOb = b\theta . TO$ (num. III. hujus) $= AO . c\kappa$, & per consequens etiam areæ BAO duplum æquabit rectangulum sub $AO . DC$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

465. Ductis ex logarithmicæ puncto C ad puncta A & O rectis CA & CO, triangulum rectilineum CAO æquabitur ubique homologo sectori hyperbolico BAO.

COROLLARIUM II.

466. Jungatur OI, eaque producatur in P, eruntque $AP = OD$, & $OP = KD$. Nam, quia OS ipsi KD normalis est, erunt anguli SOK ejusve alternus APO & ODK æquales, atque adeò triangula rectangula AOP & OKD similia, ob latera verò AO & OK æqualia erunt etiam hæc triangula æqualia; ac proinde $AP = OD$ & $OP = KD$. AP autem est tangens arcus AR compositi ex arcu AG, cujus sinus OH æquatur tangenti AF anguli sectoris AOB, & ex semissi GR complementi ejusdem. Et DC est log-us rationis DO ad AO, id est, log-us rationis tangentis AP prædicti arcus seu anguli compositi AOR ex angulis AOG & GOR ad radium seu sinum totum AO. Atqui ratio AP ad AO = rationi OK ad IK, id est, rationi, quam habet radius OK ad tangentem IK semissis complementi anguli AOG, cujus sinus æquatur tangenti anguli sectoris AOB.

SCHO-

SCHOLION.

467. Hæc propositio plurimum conducit reductioni elementorum sectorum hyperbolicorum ad simpliciora elementa logarithmica. Nam si $AO = a$; $OD = m$; $OE = x$; $EB = y$; $AF = z$, & $AE = u$. Atque his positis, erit

I. $y = \sqrt{(xx - aa)}$; $AF = a\sqrt{(xx - aa : xx)}$; adeòque $Ff = a^3 dx : xx\sqrt{(xx - aa)}$; & $FH . Hh = a^4 dx : xx\sqrt{(xx - aa)}$. Unde quia triang. $BO\beta$: triang. $FOf = OE^2 : OA^2$, reperietur duplum trianguli $BO\beta = aadx : \sqrt{(xx - aa)}$. Hoc idem brevius inventum fuisset ope num. IV. §. 466. uti ostendimus $2.BOb = OT . b\theta$; nam $b\theta = xdx : \sqrt{(xx - aa)}$ & $OT = aa : x$, ergo $OT . b\theta = aaxdx : x\sqrt{(xx - aa)} = aadx : \sqrt{(xx - aa)}$. Jam $KH = (ax - a\sqrt{(xx - aa)}) : x$, & GH vel $OT = aa : x$; atque triangula KHG & KOD similia sunt, ergo $m = aa : x - \sqrt{(xx - aa)}$ & $x = (aa + mm) : 2m$, qui valor substitutus in præcedenti expressione elementi $BO\beta$, producet $2BOb = aadm : m$.

II. Quia $x = a + u$ & $dx = du$, erit $2BOb = aadx : \sqrt{(xx - aa)} = aadu : \sqrt{(2au + uu)}$, & $u + a = (aa + mm) : 2m$, vel $u = (m - a)^2 : 2m$, qui valor in formula $aadu : \sqrt{(2au + uu)}$ suffectus, dabit iterum $2BOb = aadm : m$.

III. Propter triangula similia OAF & OEB invenietur $ay = xz$, hyperbola verò præbet $y = \sqrt{(xx - aa)}$; unde $x = \sqrt{(aa - zz)}$, ex triangulis verò similibus KHG & KOD elicitur $am - mz = a\sqrt{(aa - zz)}$ & $z = amm - a^3 : mm + aa$, qui valor ipsius z ejusque elementi $a^3 dz : aa - zz = 2BOb$ substitutus, dabit etiamnum $2BOb = aadm : m$.

Similes regulas reducendorum sectorum hyperbolicorum ad logarithmos ex sua methodo generali reducendi quadraturas curvarum, quarum ordinatæ fractionibus rationalibus per abscissam varie affectam & datas, exhibitis exprimuntur, ad logarithmos, jam pridem elicuit Vir Celeb. Joh. Bernoulli in Comm. Acad. Reg. Scient. Paris. 1702. d. 13 Decemb. & in Act. Lipf. 1703. pag. 30. & 31. Cæterum, etsi præcedens theorema nostrum de hyperbola tantum æquilatera agit, paucis tamen mutatis ad quascunque hyperbolas potest extendi.

PROPOSITIO LII. LEMMA.

468. *Si rectæ* AM *positione datæ alia* AB *magnitudine data perpendiculariter insistat, per cujus terminum* B *rectæ quæcunque* BM, Bm *ad alteram* AM *ducantur, & per puncta* M, m, &c. *in quibus huic occurrunt, perpendiculares* MN, mn, &c. *ipsis* BM, Bm, &c. *respective æquales, omnia puncta* N, n, &c. *in curva* LNn *hyperbolæ æquilateræ sita erunt, cujus centrum* A, *& semilatus transversum* AL.

Fig. 118. *Positisque punctis* M, m *indefinite vicinis, ac descripto centro* B *intervallo* BM *arculo* $M\mu$, *junctisque* AN, An, *rectangulum sub radio* BA *& arculo* $M\mu$ *duplum erit trilinei* ANn *seu elementi sectoris hyperbolici* ANL.

I. Ducatur NX parallela AM, & quia (secundùm hypothesin) $MN = BM$, & $AB = AL$, erit $AX^2 = XN^2 + AL^2$, vel $XN^2 = AX^2 - AN^2 =$ rec-lo BXL, ergo punctum N est in hyperbola æquilatera LN, cujus latus transversum est BL & centrum A. Curva LN etiam hyperbola erit, si MN ad BM fuerit in quacunque data ratione.

II. Per punctum N ducta sit tangens hyperbolæ N*q*, eruntque tres MN vel BM, AL vel BA & A*q* in continua ratione, atque adeò $BM : BA = BA : Aq$, atqui propter triangula similia ABM & μMm, est etiam $BM : BA = Mm$ vel $No : M\mu$; ergo $No : M\mu = BA : Aq$, atque adeo $BA \cdot M\mu = No \cdot Aq$ (num. IV. §. 464.) $= 2 \cdot ANn$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

469. Adeoque, si tota AM infinitis composita sit particulis infinitesimis qualis M*m*, & per singularum terminos rectæ BM ductæ intelligantur, erit factum ex omnibus arculis $M\mu$, quos vicinæ quæque BM intercipiunt, & radio BA æquale duplo omnium triangulorum AN*n*, quæ in sectore hyperbolico ANL continentur, id est, duplo ipsius sectoris.

COROLLARIUM II.

470. Ducendo igitur per punctum intersectionis *t* rectæ AN & tangentis hyperbolæ A*t* in vertice, lineam *tsr* parallelam AL, &

*us*L,

*u*L, quæ ipsam AL productam secet in puncto P; ac denique per punctum L logarithmicam LO, quæ subtangentem habeat æqualem radio AL, & per P agatur PO parallela AM log-micæ occurrens in puncto O; erunt omnes arculi $M\mu$ collective sumpti, æquales rectæ PO. Nam quia (§. 469.) omnes $M\mu$ in AB $= 2$. areæ ANL & (§. 463.) 2 sect. ANL $=$ AB vel AL in PO, erunt omnes $M\mu$. AB $=$ AB. PO, atque adeo omnes $M\mu = $ PO.

PROPOSITIO LIII. Problema.

471. *Si filum perfecte flexile* HA2H *ambobus suis terminis* H, 2H *fixum, spiranti vento juxta directiones* cc, CC, GG *datæ positione rectæ* AW *parallelas expositum sit, assignare curvam, quam filum induere debet.* Fig. 118.

Analysis Geometrica. I. Quia ventus impressiones in velariam exserit (§. 249.) juxta directiones C*l* curvæ quæsitæ ACH normales, atque adeò (§. 96.) constat tenacitatem veli in singulis ejus punctis eandem esse oportere; talis tenacitas constans per datam rectam AB axi AW normalem exponi potest, si venti velocitas sit 1, sin verò velocitas exponatur linea recta V, (§. 100.) tenacitatem per hoc factum V^2. AB repræsentare oportebit, ut mox videbimus. Nam sumtis æqualibus & contiguis curvæ elementis C*c*, & CG, per eorum terminos ordinatæ ad axem curvæ AW ductæ intelligantur *c*W, CI & GK, quæ rectas CG & GG secabunt in *f* & F; & demissa ex puncto *f* perpendiculari ad elementum curvæ *c*C, quæ sit *fd*, per punctum *d* agatur *de* æquidistans axi AW, & denique esto C*h* $=$ GF, adeò ut *fh* differentia sit inter *f*C & F*g*; & his positis impressio, quam filamentum aëris *cc*CC celeritate V lati & in curvam impingentis in elementum C*c* exseret (§. 429.) exponitur per factum $V^2.cd$; ejusque directio C*l*, ut jam dictum, est ubique curvæ perpendicularis; propterea, & juxta ea quæ alibi (§. 100.) dicta sunt, tenacitas fili exponi debet magnitudine V^2. AB ejusdem generis cum $V^2.cd$, seu impressione quam elementum C*c* excipit juxta C*l*, vel quodlibet aliud juxta directionem ipsi normalem. Exponat jam C*l* magnitudinem $V^2.cd$ vel potentiam curvæ in puncto C normaliter applicatam, ductisque C*k* & *lk* axi AW parallela & normali, & potentia C*k* erit $V^2.ce$; nam in triangulis similibus C*lk* & *cde*, lineola *ce* alteri C*k* homologa est, cum sit C*l* : C*k* $= cd : ce$; atqui C*l* $= V^2.cd$, ergo etiam C*k* $= V^2.ce$. Jam, cùm alibi (§. 95.)

osten-

ostensum sit, Ck esse ad fh ut tenacitas fili in elemento Cc, ad hoc elementum Cc, vel permutando Ck ad dictam tenacitatem ut fh ad Cc; erit $V^2.ce : V^2.AB = ce : AB = fh : Cc$, & permutando $ce : fh = AB : Cc$.

II. Per terminum B datæ BA ducantur BM, Bm parallelæ elementis curvæ CG, Cc, centroque B intervallo $BQ = CG = Cc$ descripto arculo QR, agantur QS, $R\sigma$ parallelæ AM, item Rx æquidistans BA; ST perpendicularis ipsi BQ, & denique TV parallela SQ, quibus positis, ultrò liquet, triangulum BQS triangulo cCf, & $BR\sigma$ triangulo CGF similia, æqualia, & similiter posita esse; adeò ut sint $xQ = fh$, $BV = ce$, & $Cc = BQ$ vel BR; adeòque analogia præcedentis numeri $ce : fh = AB : Cc$, eadem est cum $BV : xQ = AB : BQ$; in triangulis verò rectangulis similibus yQR & BTS, bases yQ & BS à perpendiculis Rx & TV proportionaliter dividentur, adeò ut sit $xQ : yQ = BV : BS$, & permutando ac invertendo $BV : xQ = BS : yQ = BA : Mm$; antea verò habuimus $BV : xQ = AB : BQ$; ergo etiam $AB : Mm = AB : BQ$, atque adeò $Mm = BQ = Cc$; quod cum de singulis Mm, quæ in tota Am & de singulis Cc, quæ in tota curva cGA continentur, respective valeat, liquet omnes Mm, seu totam Am vel AM omnibus Cc, seu toti cGA vel CGA æquari. Unde, quia BM tangenti velariæ in puncto C (secundùm hypothesin) parallela est, erit data BA ad AM seu ipsi æqualem curvam AGC, sicut ordinata CI ad subtangentem velariæ respicientem ejus punctum C. Hæc proprietas etiam catenariæ convenit, ut alibi velariæ atque catenariæ identitas jam (§. 106.) ostensa est.

III. Constructio autem curvæ hactenus ex ostensis facile elicietur: nam cum Mm sit $= Cc$, & Bm (secundùm hypothesin) parallela Cc, descripto centro B arculo $M\mu$, triangulum $Mm\mu$ triangulo cCf simile & æquale erit, ac proinde $Cf = m\mu$, & omnes Cf, id est, $WA =$ omnibus $m\mu$ seu mi, descripto scilicet centro B radioque BA circulo $A\omega$. Sic etiam abscissa AI æqualis existet $M\omega$ posita, ut antea, BM parallela tangenti curvæ in C.

Elementum verò ordinatæ $cf = M\mu$ & omn. cf, seu cW aut $CI =$ omnibus $M\mu$ (§. 470.) $=$ PO posita constructione in citato hoc paragrapho 470. Est ergo quælibet ordinata CI æqualis homologæ PO. Quæ omnia erant invenienda.

Co-

COROLLARIUM I.

472. Quia in hyperbola æquilatera LN tres AX, AL & Aq ſunt continue proportionales propter tangentem hyperbolæ Aq, & ex natura hyperbolæ etiam tres AX, AL & rs, adeò ut Nq & rs æquentur, erunt, ducta As, triangula ABM & Asr ſimilia; nam $AX = MN$ (conſtr.) $= BM$ eſt ad AL vel AB, ſicut AL vel As ad Aq vel rs, atque adeò triangula ABM & rsA ſimilia ſunt, ac per conſequens As ipſi BM ſeu etiam tangenti velariæ in C parallela eſt, angulusque uAs æquabitur illi, quem tangens velariæ modo nominata, & quantum opus eſt producta, cum axe AW conſtituit, cujus ſemiſſis eſt angulus rsu; unde cum PO ſit log-us rationis PA ad LA, ſeu PA ad Au, hoc eſt, rationis rs ad ru; ſequitur PO eſſe log-mum rationis, quam radius habet ad tangentem anguli rsu vel dimidii anguli uAs, in logarithmica, cujus ſubtangens par eſt radio AL; & in omni alia logarithmica, ſi ſumatur quarta proportionalis ad log-micæ ſubtangentem AL, & ad log-um prædictæ rationis radii ad tangentem ſemiſſis anguli uAs, manifeſtabit ea ordinatam velariæ CI in puncto C, ſi ſcilicet angulus uAs æqualis fuerit angulo, quem tangens velariæ in C producta cum axe AW continet.

COROLLARIUM II.

473. Circulus centro B radioque BA deſcriptus rectam BM productam ſecet in Ω, eritque propter tangentem circuli AM & ſecantem $M\Omega$, $M\Omega : MA = MA : M\omega$, ſeu $2AB + M\omega : AM = AM : M\omega$, adeoque $2AB + M\omega : M\omega = AM^2 : M\omega^2$, & dividendo $2AB : M\omega = 2.AB.M\omega : M\omega^2 = AM^2 - M\omega^2 : M\omega^2$, atque adeò $2AB.M\omega = AM^2 - M\omega^2$. Innoteſcit ergo ex datis AM vel AC & $M\omega$ vel AI parameter velariæ AB ſeu Au.

Porro quia (§. 472.) $Ar : rs = AM : AB = 2AM.M\omega : 2AB.M\omega = 2AM.M\omega : AM^2 - M\omega^2$, erit As vel $Au : Ar = AM^2 + M\omega^2 : 2AM.M\omega$, & dividendo $Au - Ar$ vel ru ad $Ar = (AM - M\omega)^2 : 2AM.M\omega$, & $Ar : rs = 2AM.M\omega : AM^2 - M\omega^2$, ergo ex æquo $ru : rs = (AM - M\omega)^2 : AM^2 - M\omega^2 = AM - M\omega : AM + M\omega =$ curva AC abſciſſa ejus AI, ad AC + AI. Unde, cum ſit $PA : LA = rs : ru = AC + AI : AC - AI$, & PO log-us rationis PA ad LA; erit etiam PO log-us rationis AC + AI ad AC − AI, cujus rationis termini, ſcilicet ag-

 gre-

gregatum & differentia curvæ AC & ejus abscissæ vel sagittæ AI, dati sint. Idcirco, si fiat ut 2Mω seu 2AI ad AC + AI ita AC − AI ad quartam magnitudinem Q, deinde ut subtangens log-micæ cujuscunque ad log-mum rationis AC + AI ad AC − AI in hac logarithmica, ita magnitudo vel linea Q ad aliam R, hæc linea, juxta præcedens corollarium, dabit ordinatam CI nostræ velariæ AC.

COROLLARIUM III.

474. Juxta §. 110. erit media directio impressionis venti filum CAC inflantis in axe AW, nam hæc media directio angulum à tangentibus velariæ ductis per puncta C, C ad utramque axis partem similiter sita contentum, bifariam dividit, quod etiam axis AW præstat; estque adeò (§. 110.) impressio venti in velaria, juxta ejus mediam directionem WA, ad tenacitatem velariæ in omnibus ejus punctis eandem, sicut dupla Ar ad As, id est, ut supra (§. 473.) habuimus, sicut 4AM. Mω ad $AM^2 + M\omega^2$, id est, sicut 4AC. AI ad $AC^2 + AI^2$. Unde, quia tenacitas velariæ (num. 1. §. 471.) est $V^2. AB = (AC^2 - AI^2 : 2AI). V^2$, erit impressio venti in velariam juxta ejus mediam directionem $WA = V^2. 2AC. (AC^2 - AI^2): AC^2 + AI^2$.

COROLLARIUM IV.

475. Velariæ verò æquatio differentialis ex allata constructione facillime elicietur; nam si dicantur BA, a; AI, x; CI, y; Cf, dx; cf, dy; Cc = CG = ds; fh = ddx, erit ce = $dy^2 : ds^2$, & analogia, in quam supra (num. 1. §. 471.) incidimus ce vel $dy^2 : ds$ ad fh seu ddx, ut AB vel a, ad Cc seu ds; quæ, multiplicatis extremis & mediis, dabit æquationem velariæ differentio-differentialem $dy^2 = adsddx$, in quam Celeberrimi Bernoullii etiam inciderunt, ut videre licet in Act. Erudit. Lips. 1695. pag. 546.

Æquatio differentialis velariæ elicitur ex similitudine triangulorum ABM & M$m\mu$; est enim $m\mu : M\mu = AM : AB$; unde quoniam $AB = a$, $M\omega = AI = x$, atque adeò $AM = \surd(2ax + xx)$, $m\mu = dx$ & $M\mu = CF = dy$; erit $dy = adx : \surd(2ax + xx)$ prima æquatio differentialis primi gradus, naturam velariæ explicans.

Sin verò BM vel uI fuerit $= x$, tunc erit $AM = \surd(xx - aa)$, & $dy = adx : \surd(xx - aa)$, quæ est altera velariæ æquatio differentialis.

Et

Et hæ ſunt æquationes, in quas laudati Bernoullii jam pridem inciderunt, quisque eorum ſua methodo propria uſus.

Scholion.

476. Ex noſtra conſtructione atque analyſi jam ſponte naſcuntur præcipuæ proprietates velariæ, & maxime notabiles. Nam

1°. Curva AC æqualis eſt ubique reſpectivæ ordinatæ XN hyperbolæ æquilateræ LN, cum hæc ordinata ſit æqualis MA, cui curva AC æqualis oſtenſa.

2°. Facta ubique $AM =$ curvæ AC, ſi per velariæ punctum C parallela ducatur rectæ BM, ea velariam in puncto C contingeret.

3°. Area $uAC2f$ æquatur ubique rec-lo BAM ſeu rec-lo ſub curva AC & recta AB, quæ inſtar parametri eſt; atque adeò areæ $uAC2f$ ſuis homologis curvis AC proportionantur. Nam elementum areæ prædictæ eſt $f2f.fc = Bm.M\mu = 2$.trianguli BMm; ſunt enim $f2f$ vel $uW = Bm$, & $cf = M\mu$, ergo omnia $f2f{:}cf$ ſeu area $uAC2f =$ omnibus $2.MBm$, hoc eſt, duplo trianguli BAm, id eſt, rec-lo AB in Am, vel $AB.AM$ ſeu $AB.AC$.

4°. Si in MI ſumatur $u\xi$ ejus magnitudinis, ut rec-lum $u\xi.AM$ æquet aream hyperbolicam $ALNM$, punctum ξ erit centrum gravitatis curvæ CAC. Sit enim centrum hujus curvæ in aliqua recta $\xi\gamma$ parallela ipſi AB, ponaturque curvam AC libratam pendere ad axem librationis $u2c$; erit (§. 44.) $AC.u\xi =$ omnibus $uI.Cc =$ omn. $BM.Mm =$ omn. $MN.Mm =$ areæ $ALNM$, atque $AC = AM$; ergo $AM.u\xi = ALNM$, unde cum centrum gravitatis curvæ CAC ſit etiam in axe AW, erit omnino in puncto ξ.

5°. Sin verò centrum gravitatis curvæ AC fuerit in recta $\delta\gamma$, erit (§. 44.) $A\delta.AC =$ omn. $CI.Cc$. Atqui omn. $CI.Cc = AC.CI -$ omn. $AC.cf = AC.CI -$ omn. $AM.M\mu$, & triangula ſimilia ABM & $Mm\mu$ præbent $AM.M\mu = AB.m\mu$, atque adeo omn. $AM.M\mu = AB.aM = AB.AI$; ergo omn. $CI.Cc = AC.CI - AB.AI = AM.CI - AB.AI$; atque adeò $A\delta$ vel $\xi\gamma$ in $AC = AC.CI - AB.AI = AC.CI - AC.A\lambda$, ducta ſcilicet tangente $\omega\lambda$; adeòque $\xi\gamma = CI - A\lambda$; adeòque centr. grav. curvæ AC diſtat à recta $c2c$ intervallo $A\lambda$ vel $\omega\lambda$.

6°. Adeòque ſuperficies genita ex converſione curvæ AC circa axem AI æquatur circulo, cujus radius poteſt duplum rec-li $\xi\gamma.AC$ ſeu $2AC.CI - 2AB.AI$. Nam ſupra (§. 47.) demonſtratum eſt, magnitudinem *genitam* ex rotatione alicujus *genitricis* circa axem

 poſi-

positione datum, æquari facto ex magnitudine genitrice in viam centri ejus gravitatis; & viæ centri gravitatis sunt circumferentiæ circulares à centro descriptæ, atque adeo radiis suis proportionales. Propterea magnitudines genitæ sunt in composita ratione magnitudinum genitricium & distantiarum centri earum gravitatis ab axe rotationis. Idcirco erit superficies ex conversione curvæ AC circa AI ad circulum quemcunque, cujus radius est R, in composita ratione magnitudinis AC superficiei genitricis ad magnitudinem R circuli genitricem, & distantiæ centri gravitatis γ illius magnitudinis ab axe AI seu $\gamma\xi$ ad distantiam centri gravitatis hujus, seu $\frac{1}{2}$R, hoc est, sicut AC. $\xi\gamma$ ad R. $\frac{1}{2}$R, id est, sicut 2AC. $\xi\gamma$ vel 2AC. CI — 2AB. AI ad R^2; adeoque si $R^2 =$ 2AC. CI — 2AB. AI, erit superficies genita circulo æqualis.

7°. Eodem argumento circulus, cujus radius R potest duplum areæ hyperbolicæ, AMNL, æquatur superficiei ex conversione AC circa axem $u2c$ genitæ. Nam dicta superficies erit ad circulum, ut AC. $u\xi$ ad $\frac{1}{2}R^2$, vel ut 2AC. $u\xi$ ad R^2; atqui (num. 4.) AC. $u\xi =$ AMNL, ergo superficies ex curva AC circa $u2c$ est ad circulum radii R $= \sqrt{2AMNL}$, ut 2AMNL ad 2AMNL, id est in ratione æqualitatis.

8°. Sin verò ρ centrum fuerit gravitatis areæ uAC$2f$, ducatur $\rho\theta$ parallela AB, eritque (§. 44.) $u\theta$ in aream uAC$2f =$ omnibus momentis rec-lorum $f2c$ ad axem $u2c$ appensorum; hoc est $u\theta$. AM. AB $=$ omnibus $\frac{1}{2}.c2c.c2c.cf$; nam (num. 3,) est area uAC$2f =$ AM. AB. Atqui $\frac{1}{2}c2c.c2c.cf = \frac{1}{2}$BM. BM. M$\mu = \frac{1}{2}$AB. BM. M$m = \frac{1}{2}$AB. MN. M$m$, ergo omn. $\frac{1}{2}.c2c.c2c.cf = \frac{1}{2}$AB in aream ALNM; atque adeò $u\theta$. AM. AB $= \frac{1}{2}$AB. ALNM, vel $2u\theta$. AM $=$ ALNM. Sed (num. 4.) habuimus etiam $u\xi$. AM $=$ ALNM, ergo $u\xi$. AM $= 2u\theta$. AM, vel $u\xi = 2.u\theta$, adeoque centrum gravitatis curvæ AC duplo longius distat à linea $u2c$, quam centrum gravitatis areæ uAC$2f$.

9°. Hinc solidum ex rotatione figuræ uAC$2f$ circa axem $u2f$, semissis est cylindri, cujus altitudo AB, & baseos radius potest duplum areæ hyperbolicæ ALNM. Nam hoc solidum (§. 47.) æquatur facto ex area uAC$2f$ in circumferentiam radii $u\theta$, cum ρ sit centrum gravitatis areæ, hoc est $=$ AB. AM in circumf. radii $u\theta$ (num. 8.) $= \frac{1}{2}$AB. AM in circumf. $u\xi$. Atqui AC vel AM in circumf. $u\xi$ est superf. ex AC circa $u2c$ (num. 7.) $=$ circulo cujus radius $= \sqrt{2ALMN}$; ergo solidum areæ uAC$2f$ circa $u2f$ rotatæ $=$ cylindro, cujus radius potest 2ALMN, & altitudo est $\frac{1}{2}$AB; adeoque prædictum solidum dimidium est cylindri, cujus altitudo AB baseosque radius potest 2ALNM.

10°.

10°. Hinc ultrò sequitur, solida à figuris $uAC2f$, $uAc2c$ circa $u2c$ rotatis genita proportionari superficiebus ex curvis homologis AC, Ac circa eundem axem $u2c$, sicut areæ $uAC2f$, $uAc2c$ curvis AC, Ac proportionales sunt; quæ proprietas, & ea qua centrum gravitatis curvæ AC duplo magis à recta $u2c$ distat quàm centrum gravitatis ρ areæ $uAC2f$, & ambo hæc centra γ & ρ ab axe AI æqualiter distant, Illustri Leibnitio, qui primus eam advertit, meritò memorabilis visa est.

11°. Centra gravitatis ρ & γ areæ $uAC2f$ & curvæ AC æqualiter distant ab axe velariæ. Nam (§. 44.) $\theta\rho$ in $uAC2f = \theta\rho . AB . AM = $ omnibus $CI . f2f . cf = $ omn. $CI . BM . M\mu = $ omn. $CI . AB . Mm = AB . CI . AM -$ omn. $AB . AM . cf = AB . CI . AM -$ omn. $AB . AM . M\mu = AB . CI . AM -$ omn. $AB^2 . m\mu = AB . CI . AM - AB^2 . M\omega$, ergo etiam $\theta\rho . AM = AM . CI - AB . M\omega$. Sed (num. 5.) etiam habuimus $AM . \xi\gamma = AM . CI - AB$ in $M\omega$ vel AI, ergo $\theta\rho . AM = AM . \xi\gamma$, vel $\theta\rho = \xi\gamma$.

12°. Adeoque solidum ex conversione figuræ $uAC2f$ circa uI æquatur cylindro, cujus radius potest duplum spatium $2CI . AC - 2AB . AI$ & altitudo est AB. Hinc iterùm, solida ex figuris $uAC2f$, $uAc2c$ circa axem AI rotatis proportionalia sunt superficiebus ex curvis AC, Ac circa eundem axem in gyrum actis.

13°. Radius circuli osculatoris $C\beta$ in curvæ puncto C, est tertius proportionalis ad uA & uI. Nam, quia Bm & BM parallelæ sunt particulis curvæ Cc, & CG, sectores evanescentes $MB\mu$ & $C\beta c$ similes erunt, unde $M\mu : BM = Cc : C\beta$ vel permutando $M\mu : Mm$ vel $Cc = BM : C\beta$; atqui $M\mu : Mm = AB : BM$, ergo $AB : BM = BM : C\beta$, seu, quia $BM = uI$, erit $uA : uI = uI : C\beta$. Hinc curvæ $\alpha\beta$, ex cujus evolutione velaria describitur, initium α à vertice velariæ A æque distat ac punctum u in circuli quadrante uSL.

SECTIO IV.

De Motibus corporum in mediis resistentibus.

Quoties Galilæus, Torricellius aliique illius ævi Celeberrimi geometræ de motu egerunt, corpora in vacuo, id est, in medio, quod nec motum accelerare nec retardare queat, ferri supposuerunt; non quod nescirent ejusmodi medium resistendi facultate

carens apud tellurem nostram non dari, sed quod non satis viderent, quo pacto resistentiæ geometriæ legibus possent subjici. Ab his ergo resistentiis medii tanto libentius animum abstraxerunt, quod existimarent non nisi per exiguos eas errores vixque sensibus perceptibiles determinationibus suis, ex suppositione vacui, inducere posse. Inter recentiores verò summi quique geometræ præclara Galilæi reperta circa motus doctrinam perfecisse & mirum quantum amplificasse non contenti, difficilem de motibus in mediis resistentibus materiam ad geometriæ, sed reconditioris, normam exigere fortunato successu aggressi & in regiones non antea cognitas delati sunt. Extant enim eximia hac de re Virorum Celeberrimorum *Newtoni*, *Leibnitii*, *Hugenii* & *Wallisii* meditata ante complures annos partim sine demonstrationibus edita, & breviter tantum indicata, partim etiam demonstrationibus munita, sed perbrevibus, nec ideò tyronum captui satis accommodatis, nisi Wallisium excipias, qui in suo schediasmate super hac re omnia minutim exponit, sed tantum in hypothesi particulari substitit resistentiarum in ratione celeritatum corporibus remoram afferentium. Post laudatos viros Cl. *Varignon* idem argumentum fuse, docte, atque perspicue pertractat in Actis Academ. Reg. Parif. Scient. annorum 1707, 1708, 1709 & 1710. adeò ut secuturis Mathematicis otium hac in re fecisse videatur; verùm, quia hæc materia tam directe ad institutum nostrum pertinet, ut si de ea agere omitterem, ex præcipuis aliquid opusculo meo deesse putarem, ideò non detrectabo post tot præclaros Autores etiam hanc doctrinam, quantum potero breviter simul & perspicue, proponere. Illorum inventis nonnulla propria addam, atque simplici principio insistam, cui ferme omnia, quæ ad motum actualem corporum attinent, superstruxi, scilicet *momentum cujuslibet solicitationis indesinenter agentis æquivalere momento celeritatis*. Quo principio nemo ex laudatissimis viris usus est in doctrina motuum corporum in mediis resistentibus latorum, saltem quatenus ex publicis eorum scriptis judicare licet, etsi hoc principio multa brevius & naturalius, quam ab aliis fundamentis, obtineantur.

CAPUT XIV.

Complectens generalia, quæ ad theoriam motus corporum in mediis resistentibus pertinent, & nonnulla Lemmata Geometrica in hac theoria necessaria.

DEFINITIONES.

Duæ sunt resistentiæ species, una *absoluta* altera *respectiva*.

I.

477. *Resistentia absoluta* est, quæ tantundem virium mobili detrahit, sive magna sive parva velocitate idem mobile feratur. Hujusmodi resistentiæ absolutæ exempla præbent media glutinosa & superficies asperæ: nam in fluido glutinoso eadem vi opus est ad separandas ejus partes, quâcumque demum celeritate mobile partes eas separare conetur. Sic etiam in frictionibus corporis in plano aspero incedentis eadem obstacula sunt superanda, sive magna sive parva velocitate mobile in plano aspero moveatur, & quocunque modo ipsa motus impedimenta se habeant, sive instar pilorum elasticorum deprimendorum, & postea sponte suâ sese iterum erigentium; sive filorum perrumpendorum ad instar, vel quoquo alio modo hisce æquivalente, ad hæc omnia definita quadam & determinata vi opus est, nec refert quæ sit agentis velocitas.

II.

478. *Resistentia* verò *respectiva* est, quæ provenit ab allisione medii fluidi partibus anterioribus mobilis. Hæc resistentia pendet à densitate medii & celeritate mobilis; partes enim fluidi (§. 422.) ea ipsa celeritate corpori in eo fluido delato allabi censendæ sunt, quâ corpus hisce particulis impingit, & quantitates fluidi corporibus allabentis (§. 423.) sunt in composita ratione densitatum & celeritatum.

III.

479. Medium fluidum atque resistens *aëris* nomine simpliciter insignietur, cum aër tantæ subtilitatis intelligi possit, ut eundem effectum præstare valeat, quem medium resistens.

IV.

IV.

480. *Motus primitivi* ſunt illi, qui in vacuo fierent. Sic motus primitive uniformis eſt motus æquabilis, quo corpus vi quacunque impulſum in vacuo incederet. Et motus primitive accelerati vel retardati à gravitate uniformi, ſunt motus illi, quos gravi in vacuo cadenti vel aſcendenti convenire Galilæus demonſtravit, cujusmodi motus Lib. I. Sect. II. Cap. I. §. 150, 151. conſideravimus.

V.

481. *Solicitatio acceleratrix* gravi in aëre deſcendenti applicata, eſt exceſſus, quo gravitas medii reſiſtentiam ſuperat, & *reſiſtentia totalis* ſeu *abſoluta* corpori in aëre aſcendenti oppoſita, eſt aggregatum ſolicitationis gravitatis & reſiſtentiæ aëris. Nam hæc duo corpori in aëre aſcendenti conjunctim renituntur. Grave verò cadens non alia vi deorſum ruit, quam eâ, quâ gravitas reſiſtentiam aëris, in quo corpus movetur, ſuperat: propterea hic *exceſſus* ſolicitatio acceleratrix gravis in aëre decidentis audit.

VI.

482. Et, quia hæ ſolicitationes acceleratrices in aëre continue decreſcunt ob creſcentem cum velocitate mobilis reſiſtentiam aëris, absque tamen eo, ut unquam penitus extinguatur, ut in ſequentibus fuſius demonſtrabitur, ideò etiam celeritas continue quidem creſcet, non tamen certum quendam velocitatis gradum unquam attinget, nedum prætergredietur. Talis velocitas quam gravia nunquam cadendo aſſequi poſſunt, etſi ei ſemper magis magisque accedunt, Hugenio *velocitas terminalis* audit, Leibnitius verò *celeritatem maximam* excluſivè eandem appellat.

Scalæ ſolicitationum acceleratricium, reſiſtentiarum totalium, & celeritatum acquiſitarum vel reſiduarum, eodem ſenſu ſumuntur, quo in Sectione ſecunda Libri primi; adeò ut nulla ambiguitas vocabulorum in hac materia irrepere queat. Idem pariter intelligendum de momentis harum ſolicitationum aut reſiſtentiarum totalium, & celeritatum creſcentium aut decreſcentium.

VII.

483. Si lineæ rectæ indefinitæ longitudinis æquabili motu ferri ſubinde dicentur, atque in hisce lineis corpora libere etiam ultro citro-

traque incedere ponentur, ipsæ lineæ mobiles *lineæ deferentes*, earum motus, *motus communis*, scilicet lineæ mobilis & corporis secum abrepti, & denique corporis in deferenti linea motus, ejus *motus proprius* deinceps dicentur, corporisque ejusdem *motus absolutus* est is, qui resultat ex motu communi & proprio, estque horum aggregatum, si linea deferens & in ea corpus proprio motu ad easdem partes feruntur, differentia verò si in partes oppositas. Idcircò, ex motu proprio & communi corporis ejus motus absolutus semper innotescet.

PROPOSITIO LIV. Lemma.

484. *Momentum cujuslibet solicitationis acceleratricis corporis in aëre cadentis, aut resistentiæ totalis ejusdem corporis in aëre quomodocunque ascendentis, æquatur momento celeritatis acquisitæ crescentis, vel momento celeritatis residuæ & decrescentis.*

Hæc propositio eadem est cum prop. XVII. Lib. I. §. 132. ut adeo nova demonstratione non indigeat, nam solicitationum nomine quæcunque vires mortuæ, sed continue applicatæ, intelligi queunt. Propterea, si facilitatis gratia corpus in linea verticali moveri ponatur, spatiaque transmissa dicantur x, gravitas g, resistentia aëris r, velocitas acquisita corpori decidenti vel residua ascendentis u; solicitatio acceleratrix gravis cadentis (§. 481.) erit $g-r$, & momentum hujus solicitationis $gdx-rdx$ æquatur momento velocitatis crescentis udu. Hinc $gdx-rdx=udu$.

Resistentia verò totalis corporis ascendentis (§. 481.) est $g+r$, momentumque hujus resistentiæ $gdx+rdx$ æquale est momento celeritatis decrescentis $-udu$, adeò ut habeatur $gdx+rdx=-udu$. Vel etiam sumendo spatia non actu percursa, sed deinceps percurrenda, usque ad totalem motus ascensionalis extinctionem, erit $-gdx-rdx=-udu$, seu $gdx+rdx=udu$, hoc enim pacto spatia absolvenda, post jam percursa, decrescent cum celeritatibus.

Idcirco utrumque casum descensus ascensusque verticalis corporum in aëre uni generali formulæ includendo, invenietur $gdx\mp rdx=udu$. Ubi signum superius $-$ descensum, alterum verò $+$ ascensum corporum in aëre resistente respicit; ubi meminisse oportet spatia x non esse spatia actu transmissa à corpore ascendente, sed eorum complementa ad totam seu maximam altitudinem, quam ascendens mobile percurrere potest.

Corollarium.

485. Si jam elementum temporis, quo ſpatiolum dx transmittitur, dicatur dt, erit $dt = du : g \mp r$. Nam, quia (§. 128.) $dt = dx : u$, & (§. 484.) $gdx \mp rdx = udu$, erit dt $(= dx : u) = du : g \mp r$. Adeoque $t = \int du : g \mp r$, ubi t ſignificat tempus, quo grave motu à quiete incepto ſpatium x perlabitur, vel tempus quo grave aſcendens complementum ſpatii actu jam transmiſſi aſcendendo conficere poſſet; unde, ſi tempus, quo maxima altitudo A, quam grave data celeritate in altum projecti emetiri poteſt, dicatur T, quantitas $T - t$ exponet tempus, quo mobile ſpatium aſcendendo actu abſolvit.

Scholion.

486. Cum nulla adhuc attentio habita ſit ad originem reſiſtentiæ medii, an pendeat à celeritatibus mobilis actualibus, an verò aliunde, ſatis manifeſtum eſt, in præcedentibus canonibus generalibus contineri leges motuum variatorum pro quacunque reſiſtentiæ medii abſolutæ vel reſpectivæ hypotheſi.

PROPOSITIO LV. Lemma.

487. *Motus variati corporis in aëre quacunque lege reſiſtente ex motu primitive uniformi ſunt iidem, qui reſultarent ex motu communi ac uniformi lineæ mobile ſecum deferentis, & ex motu proprio mobilis in linea deferente, orto ab alliſione aëris corpori in linea deferente delato.*

Mobile M incipiat moveri ex N verſus O velocitate data AN, ita quidem, ut ſi in vacuo incederet, motus perfecte æquabilis eſſet; ſed, quia in medio reſiſtente fertur, mobilis noſtri motus in recta NO continue variatus exiſtet, ita ut ſemper magis magisque langueſcat. Probari debet hunc motum variatum eundem fore cum eo, qui reſultaret ex motu communi lineæ NO celeritate AN ex N verſus O æquabili motu latæ, atque mobile M ſecum abripientis, & ex motu proprio mobilis M in deferenti linea NO, ſed contrario motui æquabili lineæ deferentis, tendente ſcilicet ex N verſus O, utpote orto ex continuo allapſu aëris mobili M, quod (ſecundùm hypotheſin) ultro citroque in linea deferente liberrime moveri poſſe ſupponitur, absque ullo impedimento ratione motus communis ſeu motus lineæ deferentis.

De-

Demonstratio. Quatenus linea deferens NO æquabili motu versus Q fertur, eatenus ea mobile M ipsi inhærens secum abripit, sed quia aër mobili isti continue alliditur, & corpus ipsum (secundùm hypothesin) libere in deferenti linea NO moveri potest, aërque eandem in mobile impressionem exserit, (§. 422.) ac si in ipsum quiescens ea ipsa celeritate impingeret, quâ mobile in aëre motu absoluto fertur; ideo per se liquet corpus M ab aëre continue versus O impulsum omnino motum iri ex N versus O, motu proprio in linea deferente, sed contrario motui hujus lineæ deferentis; ac constat insuper motus proprios mobilis M ab impulsu aëris ortos, esse decrementa motus absoluti corporis in aëre, atque adeò effecta resistentiæ aëris, ut adeò hinc manifestum sit motum absolutum corporis M in aëre haberi, si à motu lineæ deferentis NO subducatur motus proprius corporis M in hac deferente, adeò quidem, ut si, exacto quodam tempore atque motu proprio, mobile spatium NE in linea deferente transmiserit, & in ejus termino E gradum velocitatis DE acquisiverit, velocitas absoluta mobilis in aëre (§. 483.) futura sit BD, excessus scilicet celeritatis BE vel AN, qua linea deferens movetur, supra celeritatem DE in linea deferente mobili acquisita ab aëris resistentis impressionibus. Propterea motus absolutus & variatus mobilis M in aëre idem erit cum eo, qui resultaret ex motu communi lineæ deferentis NO, & ex proprio mobilis in hac linea deferente. Quod erat demonstrandum. Fig. 119.

COROLLARIUM I.

488. Sit jam curva NDO scala celeritatum mobilis M in linea deferente NO acquisitarum, & curva PFO scala impressionum aëris in mobile M exertarum; & velocitas initialis mobilis M, quæ erat AN, reducta erit ad celeritatem BD eo tempore, quo mobile in linea deferente spatium NE transmittit. Adeoque per præcedentem habetur generaliter $EF.Ee = DE.ad$. Id est *momentum solicitationis acceleratricis* EF *in linea deferente æquivalet momento celeritatis* ED *in eadem linea deferente acquisitæ*.

Tempus vero per NE seu (§. 128.) $\int Ee : DE = \int ad : EF$.

COROLLARIUM II.

489. Hinc spatium absolutum, quod mobile M hoc tempore $\int ad$:

 EF

EF in aëre absolvit, reperietur generaliter $AN.\int da : EF - NE$. Nam linea deferens NO absolvit motu suo æquabili & velocitate AN spatium $AN.\int da : EF$ tempore $\int da : EF$, & mobile M in linea deferente spatium NE.

SCHOLION.

490. Si resistentia medii absoluta in omnibus spatii percurrendi punctis eadem assumatur, linea PFO erit recta ipsi NO vel AO parallela; & scala celeritatum NDO parabola erit. Nam momentum vis acceleratricis EF sit hoc casu $NP.Ee = DE.ad$, & omnia $NP.Ee$ hoc est $NP.NE$ æqualia omnibus $DE.da$ seu $\frac{1}{2}DE^2$, hinc $2NP.NE = DE^2$, ergo NDO est parabola, cujus parameter est 2NP.

Hinc, quia $tNE = \int ad : EF = \int ad : NP$, erit $tNE = DE : NP = DE^2 : DE.NP = 2NP.NE : DE.NP = 2NE : DE$. Hinc $NA.\int ad : EF$ seu $NA.tNE = 2AN.NE : DE$, & spatium absolutum, quod mobile in medio hoc absolute resistente, tempore $2NE : DE$ transmittit, erit $NA.tNE - NE = 2AN.NE : DE - NE = (2AN - DE).NE : DE = (2NA.DE - DE^2) : 2NP$.

Celeritas verò mobilis, elapso tempore $DE : NP$ vel $2NE : DE$, residua erit BD, ut jam supra (§. 488.) dictum. Propterea in ista hypothesi mobile M celeritate AN impulsum tempore $AN : NP$ ad quietem redigetur. Hæc probe consentiunt cum iis, quæ Cl. Varignon Probl. III. Coroll. I. Act. Acad. Reg. Scient. 1707. d. 13. Aug. diversa tamen methodo, tradidit.

Ubi verò resistentia medii respectiva obtinet, atque adeò resistentiæ aëris ab ejus densitate & velocitatibus mobilis pendent, ipsæ EF semper aliquam relationem habebunt cum lineis BD velocitatum mobilis in aëre repræsentatricibus, ut ex sequentibus dilucide patebit.

PROPOSITIO LVI. LEMMA.

Fig. 119. 491. *Exhibens nonnullas logarithmicæ proprietates deinceps adhibendas.*

I. Elementum cujusque ordinatæ logarithmicæ est ad ipsam ordinatam ut elementum axis ad subtangentem log-micæ.

Sit enim HI ordinata quæcunque log-micæ NHT, cujus subtangens

gens sit IR, positoque H*m* elemento ordinatæ HI, agatur *hi* parallela HI, & *mh* parallela axi AR, quibus positis, triangula similia H*mh* & HIR præbent H*m* : HI = I*i* : IR. Quod erat demonstrandum.

II. Rectangulum HI*i*, sub ordinata HI & elemento axis I*i* ordinatæ HI adjacenti, æquatur ubique rectangulo sub subtangente IR & elemento H*m* ordinatæ HI. Nam analogia præcedentis numeri H*m* : HI = I*i* : IR, præbet HI. I*i* = IR. H*m*.

III. Tertia proportionalis ad subtangentem & quamlibet ordinatam log-micæ cum adjacente axis elemento efficit rectangulum æquale rectangulo sub ordinata ejusque elemento. Esto VI tertia proportionalis ad IR & IH, ac resumatur analogia numeri primi H*m* : HI = I*i* : IR, vel permutando H*m* : I*i* = HI : IR (secundùm hypothesin) = IV : HI. Ergo VI. I*i* = HI. H*m*.

IV. Si in duabus logarithmicis NHT & 2N2H2T ordinata NA fuerit ad HI, sicut 2N2A ad 2H2I, erit AI ad 2A2I sicut subtangens IR ad subtangentem 2I2R. Sint enim I*i* & 2I2*i* elementa similia totarum AI & 2A2I, eritque HI : *hi* = 2H2I : 2*h*2*i*; quoniam hæ rationes sunt submultiplices æqualium rationum secundum eundem multiplicitatis numerum; idcirco erit H*m* : HI = 2H2*m* : 2H2I, atqui (num. 1. hujus) H*m* : HI = I*i* : IR, & 2H2*m* : 2H2I = 2I2*i* : 2I2R, ergo I*i* : IR = 2I2*i* : 2I2R, & permutando I*i* : 2I2*i* = IR : 2I2R; verum, quia I*i* & 2I2*i* sunt particulæ similes totarum AI, 2A2I, erit I*i* : 2I2*i* = AI : 2A2I, ergo etiam AI : 2A2I = IR : 2I2R. Quod erat demonstrandum. Fig. 119. & 120.

Corollarium.

492. Hinc log-us rationis duarum magnitudinum divisus per subtangentem logarithmicæ, ex qua log-us dictæ rationis desumtus est, est idem cum log-mo ejusdem rationis desumto ex qualibet alia logarithmica, sed diviso per subtangentem hujus alterius logarithmicæ. Atque hinc liquet, quâ ratione logarithmi desumti ex data quadam log-mica transferri queant in log-micam, quæ vulgares tabularum logarithmos continet; & vicissim.

Propositio LVII. Lemma.

493. *Si ex eodem centro* M, *& semilatere transverso* MI *descriptus sit* Fig. 121.

sit quadrans circuli ILA *& hyperbola æquilatera* IL, *quorum ordinatæ* LS *referantur ad axem* MS, *erit in circulo & in hyperbola rec-lum* MS. Ss, *sub abscissa ejusque elemento, æquale homologo rec-lo* LS. Lm *vel* lm *sub ordinata ejusque elemento.*

In circulo. Juncta ML, triangula similia MLS & L*lm* præbent MS : LS = L*m* : *lm* vel S*s*; adeoque MS. S*s* = LS. L*m*.

In hyperbola. Jungantur IS & I*s*, & centro I intervalloque IS descriptus intelligatur arculus S*u*. Jam ex natura hyperbolæ est LS = IS, & *ls* = I*s*; ergo *us* = *lm*. Atqui triangula similia ISM & S*su* suppeditant analogiam S*s* : *su* vel *lm* = IS vel LS : MS. Ergo MS. S*s* = LS. *lm*. Quod erat demonstrandum.

Scholion Generale.

494. Traditis jam generalibus principiis, ex quibus quicquid ad motus corporum in mediis resistentibus pertinet, deduci potest, & nonnullis lemmatis geometricis in applicatione principiorum necessariis; ad hanc applicationem jam veniendum restat. Et primùm quidem, quod motus ex resistentia absoluta concernit, id cum in paragrapho superiore 490, tum etiam in secunda sectione Libri primi quadantenus jam præstitum est, etenim in citato paragrapho definitus est motus variatus resultans ex primitive uniformi in hypothesi resistentiæ absolutæ; in Capite verò primo Sect. Sec. Libr. I. §.§. 150, 151. determinati sunt motus gravium in hypothesi gravitatis uniformis, ad quem casum etiam revocari potest resistentia absoluta, qua in singulis percurrendi spatii punctis eadem quantitate corporibus resistitur; unde si constans ubique resistentia à constanti gravitate subducetur, residua solicitatio acceleratrix etiam constans erit, unde quæ citato loco respectu gravitatis uniformis demonstrata sunt, ea solicitationi ejusmodi acceleratrici etiam applicari possunt & debent. Idcirco non est quod resistentiæ absolutæ seu motibus inde orituris diutius immoremur. Resistentia medii respectiva pendet à velocitate, qua mobile in ejusmodi medio incedit. Tres sunt præcipuæ hujus resistentiæ hypotheses, quas in sequentibus capitibus primùm sigillatim percurremus, deinde analysin trademus, qua motus in ejusmodi mediis variati generaliter determinabuntur.

CAPUT XV.

De motibus Corporum, quibus aër resistit in ratione celeritatum mobilis.

PROPOSITIO LVIII. Theorema.

495. *Spatium, quod mobile quoddam in aëre, juxta proportionem celeritatum ejus actualium, variato motu ex primitive uniformi certo quodam tempore transmittit, exponitur eadem linea, quâ velocitatis mobilis initialis pars hoc tempore amissa repræsentatur. Et tempus absolutum, quo dictum spatium absolvitur, exponi debet per logarithmum rationis, quam habet velocitas initialis mobilis ad velocitatem absolutam ejusdem elapso hoc tempore, applicatum ad subtangentem illius logarithmicæ, ex qua prædictus logarithmus desumtus est.* Fig. 119.

Sit M mobile in plano quodam horizontali celeritate AN impulsum, juxta rectam NQ, in qua deinceps æquabiliter incederet celeritate eadem AN, si in vacuo ferretur, sed quia in aëre juxta proportionem celeritatum suarum resistente movetur, singulis momentis aliquid de suâ velocitate actuali decedet. Ipsi verò motus ope propositionis 55. hujus secundi libri facile determinantur; quandoquidem, juxta hanc propositionem, iidem sunt motus variati ex primitive uniformi in aëre resistente, qui resultarent ex motu communi alicujus lineæ deferentis, & ex motu proprio mobilis in hac deferenti linea orto ab appulsu aëris corpori in linea deferente delato.

Sit ergo NO hæc linea deferens celeritate mobilis initiali AN, æquabili motu tendens versus Q, & post aliquod tempus mobile M in hac linea deferente spatium NE percurrisse intelligatur, atque in ea celeritatem DE exacto dicto tempore acquisivisse, quo fiet, ut velocitas ejus initialis AN reducta sit ad velocitatem actualem (qua scilicet in aëre movetur) BD; hac ergo velocitate aër mobili allabitur & resistentia est ut hæc celeritas, ergo impressio seu solicitatio acceleratrix mobilis in linea deferenti, quæ generaliter est EF, jam erit BD. Propterea curva PFO erit similis & æqualis curvæ NDO, adeò ut tantùm (§. 488.). determinandum restet, quænam sit curva NDO, ut in ea BD. B*b* seu EF. E*e* æquetur rec-lo *ead* seu ED. *ad*. Ubi E*e* vel B*b* est elementum spatii NE, & *ad* elementum ordinatæ DE.

Per

Per punctum N ducta sit log-mica NHT, cujus subtangens AK (posito scilicet rectam NK ipsam contingere in puncto N) æqualis AN, atque in ea ad asymptotam AR aptetur ordinata IH æqualis BD, eaque producatur in S; ductaque per logarithmicæ punctum H recta indefinita HCD parallela OQ, tangentem log-micæ NK in G, rectamque NA in C secante, si in ea sumatur ubique CD æqualis GH, interceptæ inter tangentem NK & log-micam NHT, erit semper punctum D in scala celeritatum propriarum mobilis in linea deferente NO.

Ducantur enim per punctum log-micæ H tangens HR & linea HL parallela tangenti NK, eruntque HI & IL, item LR & HS vel DE æquales, ductaque insuper dh alteri DH indefinite vicina lineola mh & IR à media HL proportionaliter secentur, eritque adeò HI vel BD aut EF ad LR vel HS seu DE, sicut Hm seu da ad nh; adeoque $EF.nh = DE.da$. Jam, quia (constr.) DC vel $EN = GH$ & $Ne = ch$, erit nh, differentia inter GH & gh, æqualis Ee; nam Hn est parallela ipsi Gg. Ergo $EF.nh = EF.Ee = DE.da$. Quod erat demonstrandum.

Porro est $nh : LR = mh : IR$, atqui $nh : LR = Ee : DE$ (§. 128.) $= tEe$, ergo $tEe = Ii$ vel $mh : IR$; ergo omnia tEe, id est, tempus per $NE =$ omnibus $Ii : IR = AI : IR = \log. (AN : HI)$ applicatus ad IR vel AN. Hoc est, tempus absolutum, quo mobile percurrit spatium NE in linea deferente, exponitur log-mo rationis, quam habet celeritas initialis AN ad celeritatem mobilis residuam IH elapso hoc tempore, applicato ad log-micæ subtangentem.

Hinc, quia (§. 489.) spatium absolutum, quod mobile M dato illo tempore in aëre transmittit, est $AN.tNE - NE$, erit hoc spatium $AI - NE = CH - GH = CG = NC$, quoniam (constr.) $AN = AK$, item $tNE = AI : AN$, & NE (constr.) $= GH$. Ergo spatium absolutum, quod mobile nominato tempore percurrit, in aëre repræsentatur per eam lineam NC vel DE, quæ velocitatis amissam partem exhibet. Quæ omnia erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

496. Ergo si mobilis celeritates actuales BD seu IH sumantur in progressione geometrica, tempora respectiva AI : AN erunt in progressione arithmetica.

Co-

Corollarium II.

497. Adeoque velocitas mobilis non nisi tempore infinito extingui potest, cum log-us rationis AN ad o, seu ad quantitatem quælibet data minorem, sit infinitus. Propterea mobile M ejusmodi motu ex primitive uniformi derivato in aëre nunquam percurrere potest spatium AN datæ magnitudinis.

Hæc omnia ad amussim conveniunt cum determinationibus Newtoni Prop. 2. Lib. 2. Pr. Phil. Nat. Leibnitii Act. Erud. 1689. art. 1. Wallisii Algebr. cap. 101. Et Varignonii Act. Acad. Reg. Parif. Scient. 1707. die 13 Aug. probl. 1. & coroll. annexis.

PROPOSITIO LIX. Theorema.

498. *Si grave in aëre juxta rationem celeritatum resistente verticaliter à quiete descendat, spatium, quod mobile aliquo tempore perlabitur, exponetur excessu, quo factum ex tempore descensus in velocitatem corporis terminalem excedit lineam, quæ celeritatem mobili acquisitam repræsentat. Tempus vero ipsum exponetur log-mo rationis, quam gravitas absoluta mobilis habet ad solicitationem acceleratricem in termino dicti spatii, applicato ad log-micæ subtangentem.* Fig. 122.

Sin verò grave in aëre eodem verticaliter in altum projiciatur data cum celeritate initiali, altitudo totius ascensus mobilis exponetur excessu, quo velocitas initialis excedit factum ex tempore ascensus in velocitatem terminalem. Et tempus ipsum exponetur log-mo rationis resistentiæ totalis initio ascensus ad gravitatem absolutam mobilis applicato ad subtangentem logarithmicæ.

I. Sit B*t*C log-mica ad axem FI extructa, cujus subtangens FH sit quæcunque, & BH tangens log-micæ in puncto B. Ducatur pro lubitu linea DC æquidistans ipsi FI, rectæ BF in puncto D, tangenti BH in E, & denique log-micæ in puncto C occurrens. Eritque EC intercepta inter tangentem BH & log-micam BC spatium percursum descensu mobilis, ratio DC : FH exponet tempus, quo spatium EC conficitur, & denique DE intercepta inter BF & BH exponet celeritatem mobili acquisitam tempore prædicto DC : FH. FH verò exponet celeritatem terminalem, seu maximam, exclusive. Hinc ducta EG parallela BF, recta GH repræsentabit solicitationem acceleratricem in fine spatii percursi EC. Nam quoniam FH

repræsentat gravitatem absolutam, & (secundùm hypothesin) DE vel FG resistentiam medii, residua GH exponet omnino solicitationem acceleratricem mobilis, ut adeò aliud non restet faciendum, quam (§. 484.) ut probetur hanc constructionem præbere GH. δc = DE. gh, seu *momentum solicitationis acceleratricis* GH *æquari momento celeritatis* DE, ductis *dc* parallela DC, & δC parallela BH, adeo ut δc sit elementum lineæ EC, & *gh* elementum lineæ DE. Ubi obiter notandum, punctum C in figura per accidens tantum reperiri in communi intersectione rectæ HP, æquidistantis FO per datum positione punctum H ductæ & log-micæ BC, cum dictum punctum C quodlibet aliud log-micæ punctum esse possit.

Demonstr. Fiat GI = FH, eritque HI = FG = DE, & acta EI erit parallela tangenti log-micæ in C, atque adeò E*i* erit parallela & æqualis elemento logarithmicæ C*c*, & δc = *hi*. Jam, quia GH: HI vel DE, = *gh*:*hi* seu δc erit GH. δc = DE. *gh*. Quod erat unum.

Porrò *gi* vel *uc*: GI = *gh*:GH (§. 128.) = *t*δ*c*, ergo omnia *uc*:GI, seu DC:GI = tempori descensus in spatio EC. Atqui DC est log-us rationis FB ad GE seu HF ad GH, hoc est, rationis, quam habet velocitas terminalis FH ad solicitationem acceleratricem GH. Nam, quia DE exponit (secundùm hypothesin) velocitatem mobili acquisitam, & quia hæc fit FH, ubi DC facta fuerit infinita, manifestum est celeritatem terminalem per subtangentem FH exponendam esse, qua etiam gravitas absoluta mobilis repræsentatur. Idcirco tempus descensus per spatium EC est log-us rationis FH:GH divisus per subtangentem FH. Adeoque DC est factum ex tempore descensus per EC in velocitatem terminalem FH, & spatium EC est excessus facti modo nominati, supra rectam DE, quæ celeritatem acquisitam exponit. Quæ omnia erant demonstranda.

499. Ponatur secundò mobile ascendere in linea verticali *ak* vel AN celeritate initiali NO, ostendendum restat, altitudinem, ad quam mobile pertingere possit, esse *ak* vel AN interceptam inter tangentem BN & log-micam BTA, tempusque, quo altitudo ista conficiatur, esse AO:FH. Linea *ak* alteri AN indefinite vicina ponitur, unde ducta A*a* parallela BN, lineola *aa* erit decrementum spatii *ak* versus B continue decrescentis cum velocitate NO. Initio motus resistentia aëris (secundùm hypothesin) est NO, & gravitas FH vel OP corpori ascendenti etiam opponitur, adeoque (§. 481.) resistentia totalis est NP. Propterea ostendendum, constanter esse

NP:

NP. *ac momentum scilicet resistentiæ totalis* NP *æquale* NO. kl *momento celeritatis decrescentis* NO.

Si enim iterum LM = FH & NM ducta fuerit, erunt MH = NO, & *km* = *aa*, & LH : MH = NP : NO = *kl* : *km* vel *aa*, adeòque NP. *aa* = NO. *kl*. Idcircò omnia decrementa *aa*, id est *ak*, seu AN, sunt altitudo, quam ascendens mobile absolvere potest.

Item *ml* : LM = *km* seu *aa* : MH vel NO. (§. 128.) *taa*, ergo omnia *ml* : LM, seu omnia *ab* : LM, hoc est, AO : LM æquantur omnibus *taa*, seu tempori ascensionis mobilis in spatio *ak* vel AN. Atqui AO est log-us rationis A2F ad BF, seu rationis æqualis NP ad OP, id est, rationis, quam habet resistentia totalis initio motus ad gravitatem. Adeoque temp. per AN = log. (NP : OP) divis. per LM vel FH, & LM in *t*AN = AO = log. (NP : OP). Ergo, cum AN sit NO − AO, erit altitudo, quam mobile ascendens percurrere potest, excessus, quo celeritas initialis NO excedit factum ex tempore ascensionis in celeritatem terminalem FH vel LM.

COROLLARIUM I.

500. Tempus, quo ascendens grave suam altitudinem AN vel QB emetietur, est ad tempus descensus ejusdem ex eadem altitudine BQ, sicut AO ad OP. Hoc per se satis clarum. Nam tempus descensus per BQ vel EC (§. 498.) est DC : FH seu OP : FH, & tempus ascensus in AN (§. 499.) est AO : FH. Ergo &c.

COROLLARIUM II.

501. Tempus quo mobile spatium AN ascendendo trajicit celeritate initiali NO, est ad tempus, quo idem grave in vacuo & celeritate eadem initiali NO suam altitudinem, quousque pertingere potest, absolveret, ut AO ad NO vel A2Q, ducta scilicet per Q recta Q2Q parallela FO. Nam tempus ascensionis in aëre per altitudinem AN est, ut vidimus, AO : TH; grave verò in vacuo ascendens emetietur (§. 139.) suam altitudinem eo tempore, quo id à quiete cadere incipiens accelerato motu celeritatem NO initiali æqualem acquirere potest; atqui (§. 151.) hoc tempus est, ut celeritas acquirenda NO applicata ad rectam FH, quæ gravitatem uniformem exponit; atque adeò NO : FH exponit dictum tempus ascensionis mobilis in vacuo. Est ergo tempus ascensionis in aëre ad

tempus ascensionis in vacuo ut AO : FH ad NO : FH, id est, sicut AO ad NO seu A2Q; nam ob æquales & parallelas BN & QA, etiam æquales erunt NO & A2Q.

COROLLARIUM III.

502. Altitudo AN, quam grave celeritate NO verticaliter in altum projectum percurrere potest, erit ad altitudinem, quam eadem celeritate in vacuo sursum projectum absolvere posset, ut rec-lum FBQ vel FB. AN ad triangulum BNO. Nam (§. 150.) altitudo in vacuo absolvenda exponitur quadrato velocitatis initialis NO, applicato ad duplum gravitatis, seu 2FH; ergo altitudo in aëre est ad altitudinem in vacuo absolvendam sicut AN vel BQ ad NO^2: 2. FH; vel sicut QB ad OB, ON : 2. FB, cum NO sit ad FH sicut BO ad BF; ergo prædictæ altitudines sunt ut BF. BQ ad BO. ½ON. id est, ut rec-lum FBQ ad triangulum BON. Verùm rec-lum FBQ æquatur trilineo BA2B; nam quadrilineum FBA2F, indicante Hugenio & demonstrante Cel. Viro Guidone Grando in suis Hugenianis cap. 8. num. 14, æquatur rec-lo BO. FH, quod quidem ex superioribus (§. 491. num. 11.) facillime probari potest, nam quia fig. 119. rec-lum HI. Ii = rec-lo IR. Hm, erunt omnia HIi, quæ in area NAIH continentur, id est, hæc area ipsa = omnibus IR. Hm seu
Fig. 122. IR. NC. Eodem ergo argumento sequitur quadrilineum FBA2F æquari rec-lo FH. BO seu rec-lo ex subtangente log-micæ in differentiam ordinatarum A2F & BF. Atqui propter similitudinem triangulorum HFB & NOB; est FH. BO = FB. NO = rec-lum LFB, ergo LFB = FBA2F, & ablato communi rec-lo BF2F, restabit L2F2B = FBQ = trilineo BA2B.

Hinc, quia altitudo in aëre conficienda est ad altitudinem in vacuo percurrendam, sicut rec-lum FBQ ad triangulum BNO, erit etiam prior altitudo ad alteram ut trilineum BA2B ad triangulum BNO.

COROLLARIUM IV.

503. Celeritas initialis gravis spatio AN vel QB in aëre ascendentis, est ad celeritatem quacum in terram recideret, emenso eodem spatio NA vel BQ, sicut NO ad DE, vel propter triangula similia BON & BDE, sicut BO seu RP ad BD vel RC.

Hæc

Hæc quatuor corollaria continent omnia, quæ Nobil. Hugenius circa motus corporum in lineis rectis verticaliter ascendentium & descendentium in præsenti resistentiæ aëris hypothesi absque omni demonstratione simpliciter indicavit, ad calcem suæ Diatribæ *De Causa gravitatis* pag. 171, & quæ Cl. Varignonius postea eleganter etiam demonstravit in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. 1708.

COROLLARIUM V.

504. Cum tempora ascensus per spatia AN, & TS vel YN ducta, scilicet parallela TY ad BN vel QA, sint AO : FH, & TW : FH, existentibus celeritatibus initialibus NO & SW; erit ideo $tAY = (AO - TW) : FH = \log.(OF : WF) : FH$, in log-mica, cujus subtangens est FH, vel §. 492. simpliciter $= \log.(OF : WF)$ in log-mica, cujus subtangens est unitas.

COROLLARIUM VI.

505. Sic etiam tempus, quo grave spatium *st* in aëre perlabitur, est log. (BF : WF) in log-mica, cujus subtangens est unitas. Nam tempus per $st = wt : FH$, & $wt = \log.(BF : wF)$, ergo (§. 492.) $wt : FH = \log.(BF : wF)$ in log-mica, cujus subtangens est unitas.

COROLLARIUM VII.

506. Unde, si grave quoddam projiciatur in aëre resistente juxta præsentem hypothesin, secundum directionem tangentis BH log-micæ BtC in puncto B, & celeritate ea, ut celeritas verticalis FH ex obliqua jactus BH derivata par sit celeritati *terminali gravis* seu *maximæ* exclusive, corpus projectum arcum log-micum BtC in aëre describet. Fingatur enim rectam *sx* ex situ BR versus C sibi semper parallelam moveri, ita ut ejus extremitas *s* semper in recta BH existat, ejusque velocitas, juxta lineam BH, hac ipsa BH exponatur; idcirco, si ponatur puncto intersectionis *s* rectæ *sx* & BH resisti in ratione celeritatum, hoc punctum *s* tempore, quod exponitur per log. (BH : *s*H) : FH vel (§. 492.) per log. (BH : SH) vel propter triangula similia BFH & B*ws*, per log. (BF : *w*F) in log-mica, cujus subtangens est unitas, percurret spatium B*s*; grave vero hoc eodem tempore log. (BF : *w*F) in linea deferente perlabetur spatium *st*,

ut in coroll. VI. (§. 505.) dictum; eo ergo tempore, quo deferens linea *sx* ex situ B*d* venit in situm *tu*, grave in ea motu accelerato perlabitur spatium *st*, adeò ut id semper incessurum sit in linea logarithmica B*t*C, prorsus ut Hugenius absque demonstratione asseruit, & Varignonius analytico id calculo in Actis Acad. Reg. Paris. Scient. 1708. eleganter demonstravit.

507. Hugenius addit pag. 173. Dissertationis *De la Cause de la Pesanteur* hujus log-micæ speciem eo determinari, quod ejus subtangens dupla sit altitudinis, ad quam grave celeritate initiali terminalem æquante ascendens, in vacuo pervenire possit. Hoc facile deducitur ex §. 150. Nam si quadratum subtangentis FH, quæ exponit celeritatem terminalem, applicetur ad duplum subtangentis ejusdem, quæ etiam gravitatem uniformem exponit, resultabit inde altitudo maxima, ad quam mobile in vacuo ascendens velocitate initiali terminalem in aëre æquante, pervenire potest, æqualis semissi subtangentis log-micæ.

508. Addam & ego mobilis celeritate & directione BH in aëre projecti, & log-micam B*t*C describentis velocitatem in quolibet log-micæ puncto *t*, exponi debere tangente log-micæ *tu* in hoc puncto *t*; ut adeò mobilis celeritas in logarithmica terminali semper major futura sit, etsi decrescat, eique semper magis magisque accedat. Assertionis demonstrationem utpote facillimam non adduco.

COROLLARIUM VIII.

509. Si grave, data cum celeritate, verticaliter deorsum projiciatur in aëre resistente juxta proportionem celeritatum, motus corporis ex duabus præcedentibus propositionibus facili negotio determinabuntur, perinde ac præcedens corollarium ex iisdem elicuimus.
Fig. 119. Esto enim AN celeritas initialis seu velocitas projectionis, & quia si mobile in vacuo ferretur, ejus motus mixtus foret ex æquabili projectionis & ex motu accelerato gravitatis, ita etiam ejus motus in aëre mixtus est duplici motu variato, scilicet ex eo, qui resultat a motu primitive uniformi, & ex eo qui nascitur à primitive accelerato; ambo hi motus seorsim considerari possunt. In figuris 119. & 122. sint ordinatæ logarithmicæ AN, HI, BF atque HC proportionales, atque adeò erit (§. 491. num. IV.) AI : DC = AK : FH, atque adeò DC : FH = AI : AK, atqui (§. 498.) DC : FH, seu logarithmus

rithmus rationis BF ad DF, seu FH ad GH, id est, log-us rationis, quam gravitas habet ad solicitationem acceleratricem in aëre divisus per subtangentem FH, exponit tempus descensus gravis in aëre per spatium EC, idque à sola gravitate. Altera verò ratio AI: AK (§. 495.) exponit tempus, quo mobile motu ex primitivo æquabili variato in aëre transmittit spatium NC, sed quia ostensum est DC : FH = AI : AK, hæc tempora erunt æqualia; propterea tempore DC : FH mobile describet in aëre, motu mixto motibus ex æquabili & accelerato à gravitate uniformi derivatis, spatium NC + EC (inspiciendo utramque figuram 119. & 122.): atque in fine prædicti temporis celeritas mobilis erit HI + DE. Est verò NC = AN − HI, & EC = DC − DE, ergo NC + EC = AN + DC − HI − DE, atque adeò spatium indicato tempore transmissum erit DC + AN − HI − DE, & celeritas, in termino hujus spatii acquisita vel residua, HI + DE = HI + FH − GH = AN + FH − NC − GH. Quæ quantitas crescente tempore AI : AK vel DC : FH, atque adeo decrescente HI aut crescente NC, continue decrescit, quandiu AN major est quam FH; ita tamen, ut minima exclusive, cui semper magis magisque appropinquatur, futura sit FH, æqualis velocitati terminali. Sin verò AN, seu velocitas jactus, minor fuerit terminali FH, summa HI + DE continue crescit, usque dum HI in infinitum imminuta evanuerit, alteraque DE facta fuerit FH, æqualis scilicet velocitati terminali.

PROPOSITIO LX. Problema.

510. *Invenire curvam 2M2T2C, quam grave secundum directionem 2M2R, dato angulo 2R2M2L, ad horizontem inclinatam celeritate 2M2G projectum, in aëre, juxta proportionem celeritatum resistente, describet.* Fig. 122.

Solutio. In puncto 2G excitata normali 2G2D ad 2M2G, circa 2G2D tanquam axem descripta sit per punctum 2M log-mica 2M2B2Q, subtangentem habens 2G2*u*, quæ juxta præcedentia, gravitatem uniformem seu etiam velocitatem terminalem exponit. Jungatur 2M2*u*, quæ log-micam in puncto 2M continget; tunc per quodlibet punctum 2*r* directionis jactus ductis 2*r*2*l* & 2*r*2*b* rectis 2G2E, & 2G2D æquidistantibus, quarum altera tangenti log-micæ in 2*s* & log-micæ ipsi in 2*b* occurrat: denique fiat ubique in qualibet 2*r*2*l* ejus pars 2*r*2*t* æqualis homologæ 2*s*2*b*, interceptæ inter tan-

tangentem & log-micam, eritque semper punctum $2t$ in curva quaesita $2M2T2C$.

Demonstr. Intelligatur iterum quaedam linea $2M2N$, grave projectum secum deferens, motu sibi ipsi & $2G2E$ semper parallelo ferri, & quidem motu variato ex primitive uniformi in aëre secundum celeritatum rationem resistenti, existente celeritate initiali eadem cum celeritate jactus $2M2G$; atque in hac linea deferente $2M2N$ grave libere cadere motu eadem ratione accelerato, quam qui in propositione antecedente definitus est; quibus positis, linea deferens $2M2N$ ex hoc suo primo situ veniet in situm $2r2l$, describendo in directione jactus spatium $2M2r$, (§. 495.) tempore, quod exponitur per log. $(2M2G : 2r2G) : 2G2u = 2r2b : 2G2u$, atqui hoc eodem tempore (§. 505.) grave in linea deferente perlabitur spatium aequale $2s2b$ seu (constr.) $2r2t$. Ergo simulatque linea deferens $2r2l$ percurrit spatium $2M2r$, grave perlabitur in ea spatium $2r2t = 2s2b$, atque adeò id semper durante ejusmodi motu mixto invenietur incedere in curva $2M2T2C$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

511. Tangens $2g2t$ per quodlibet curvae punctum $2t$ ducta, exponet celeritatem mobilis in eodem curvae puncto. Nam elementa rectae $2M2r$ & curvae $2M2t$ duabus rectis indefinite vicinis & parallelis interjecta, quarum $2r2t$ esset altera, eodem tempore describentur, atque adeò velocitates, quibus dicta elementa percurruntur, erunt ut haec ipsa elementa; sed haec elementa sunt lineis $2r2G$ & $2t2g$ proportionalia, ergo hae rectae etiam velocitatibus, quibus praedicta elementa percurruntur, proportionari debent. Unde, quia (§. 495.) $2r2G$ exponit celeritatem, qua percurritur elementum rectae $2M2r$, ideò tangens $2t2g$ exponet celeritatem mobilis in curvae $2M2T2C$ puncto $2t$.

COROLLARIUM II.

512. Recta $2E2G$ asymptota erit curvae projectionis $2M2T2C$. Nam si $2O2Q$ cadat super $2G2D$, fiet $2P2Q$ infinita, ergo etiam $2O2C$ ipsi $2P2Q$ aequalis infinita erit, ubi ceciderit super lineam $2G2E$.

Co-

Corollarium III.

513. Si 2*u*2D par fiat 2G2E, jungaturque 2M2D log-micam ſecans in 2Q, ductaque ex 2Q recta 2Q2O parallela 2D2G, & per 2O recta 2O2C æquidiſtanti 2G2E; recta 2M2C erit amplitudo curvæ projectionis 2M2T2C.

Corollarium IV.

514. Sic etiam amplitudo curvæ projectionis, in quolibet plano ad horizontem inclinato, 2M2F invenietur, ſumendo 2*u*2*x* = 2F2G, & ducendo 2M2X log-micam ſecantem in puncto 2V. Nam, ſi ex hoc puncto agatur 2V2I parallela 2G2D, & 2I2H æquidiſtans rectæ 2E2G, intercepta 2M2H erit amplitudo quæſita in plano 2M2F ad horizontem inclinato. Erit enim 2X2*u* : 2V2K = 2G2F : 2I2H, unde cum (conſtr.) 2X2*u* ſit = 2G2F, erit etiam 2I2H = 2V2K. Simili ferme ratione demonſtratur præcedens corollarium.

Corollarium V.

515. Quinimo datis amplitudine 2M2C atque celeritate jactus 2M2G, inveniri poteſt angulus 2G2M2E hiſce datis conveniens. Nam ſi coordinatis 2M2O & 2O2Q, nominatis x & y reſpective, conſtruatur curva 2Y2Q, cujus æquatio ſit $y = \frac{cx}{a} + \sqrt{(xx - bb)}$, quam proinde liquet eſſe aliquam ſectionem conicam, ſcilicet hyperbolam, in qua a ſignificat 2M2G, dein c & b denotant log-micæ ſubtangentem datam 2G2*u*, & datam curvæ projectionis amplitudinem 2M2C. Communis interſectio curvæ 2Y2Q & log-micæ 2M2B2Q ſit 2Q, per quam & per punctum 2M ducatur linea 2M2D rectæ 2G2D occurrens in puncto 2D, linea 2*u*D dabit ſinum 2G2E anguli quæſiti 2G2M2E, exiſtente 2G2M radio ſeu ſinu toto.

Corollarium VI.

516. Nec amplius arduum erit determinatu, quinam angulus elevationis 2G2M2E conveniat maximæ omnium amplitudini 2M2C poſſibili. Nam, poſitis iiſdem, quæ in coroll. præc. ſymbolis, ſi hoc

casu curvæ 2Y2Q æquatio fuerit $y = \frac{aax - axx}{cx - 2ac} + \frac{cx}{a}$, quam proinde liquet esse aliquam Sectionem conicam, novæ curvæ hujus & log-micæ communis intersectio 2Q præbebit lineam 2u2D, quæ perpetuo æqualis est sinui anguli 2G2M2E quæsiti. Sed, si curva 2Y2Q log-micam nusquam intersecat, problema impossibile est, quod præsertim de corollario antecedente intelligendum, in quo sæpe contingere potest, ut b, seu amplitudo jactus, tanta assumatur, ut hyperbola inde resultans log-micam nusquam secare queat, atque adeò problema solutu impossibile sit, cum contra problema corollarii hujus sexti semper possibile existat. Nonnunquam etiam hyperbola corollarii V. hujus log-micam in duobus punctis secare potest, quo fiet ut problema duas elevationes diversas 2G2M2E admittat. Horum duorum corollariorum fundamentum consistit in corollariis III. & IV. Calculum verò Lectoris industriæ relinquo.

COROLLARIUM VII.

517. Per log-micæ punctum 2b ducta sit tangens 2b2p, eritque primo 2u2p = 2G2g. Nam elementum lineæ 2s2b est ad elem. lineæ 2M2s ut 2u2p − 2s2b ad 2u2s, & elem. lineæ 2M2s ad elem. 2M2r ut 2u2s ad 2G2r, ergo ex æquo elem. lineæ 2s2b ad elem. lineæ 2M2r se habet sicut 2u2p − 2s2b ad 2G2r; atqui elementum lineæ 2s2b vel (constr.) æqualis 2r2t est ad element. 2M2r sicut 2G2g − 2r2t vel 2s2b ad 2G2r, ergo 2u2p − 2s2b : 2G2r se habet ut 2G2g − 2s2b : 2G2r, atque adeò 2G2g − 2s2b = 2u2p − 2s2b, hoc est, 2G2g = 2u2p, & sic ubique. Secundò est 2u2p ubique æqualis respectivæ 2r2b. Nam ducta per 2b recta 2b2q, parallela rectæ 2M2G, erit 2p2q subtangens, atque adeo æqualis ipsi 2G2u, hinc ablata (vel addita subinde) communi 2q2u, remanebunt æquales 2u2p & 2G2q vel 2r2b, ergo etiam 2G2g = 2r2b, unde 2G2g − 2r2t = 2r2b − 2s2b = 2r2s. Propterea est elementum 2t2r ad elem. rectæ 2M2r, sicut 2r2s ad 2r2G. Jam 2s2r : 2r2M = 2G2u : 2G2M, & 2r2M : 2r2G = 2r2M : 2r2G, ergo per rationum compositionem, & ex æquo 2s2r : 2r2G = 2r2M. 2G2u : 2G2M. 2r2G. Erit ergo etiam elementum rectæ 2r2t ad element. rectæ 2M2r = 2r2M. 2G2u : 2G2M. 2r2G. Hinc, si lineæ nominentur, ut sequitur, scilicet 2M2G, b; subtangens 2G2u, a; indeterminatæ 2M2r, y; 2r2t, x, harum elementa dy & dx, & analogia modò reperta element. 2r2t : elem. 2M2r = 2r2M. 2G2u : 2G2M. 2r2G præbebit hanc alteram, in terminis

minis analyticis, $dx:dy = ay:bb - by$; adeoque æquatio differentialis curvæ erit $dx = aydy:bb - by$. Quam Celeb. Varignon primus reperit in Act. Acad. Scient. Parif. 1708. ad diem 18. Julii, coroll. III; Clariff. hic Autor etiam in citato hoc fchediasmate conftructionem tradidit problematis in præfenti propofitione exhibiti fimillimam illi, quam fupra (§. 510.) adduximus, fed aliter quam à nobis factum, demonftratam. Et denique in fchediasmate die 22. Augufti ejusdem anni 1708. coram focietate prælecto, identitatem curvarum projectionis à fummis geometris Newtono & Hugenio conftructarum cum effectione à fe adducta (quam ab ea, quam nos attulimus, non nifi in demonftratione differre jam diximus) analytico calculo eleganter commonftravit. Verùm, quia eadem identitas curvarum, quas conftructiones Newtoni atque Hugenii cum inter fe, tum etiam à conftructione Varignonii prima fronte non parum difcrepantes præbent, absque calculo eleganter etiam demonftrari poteft, eandem identitatem geometrica demonftratione hoc loco confirmare non gravabor. Ad demonftrationis facilitatem à conftructione Hugeniana rem ordiar.

PROPOSITIO LXI. Theorema.

518. *Curva projectionis, cujus conftructio in propofitione præcedenti exhibita eft, fimilis & æqualis eft curvæ, quæ refultat ex conftructione Hugeniana* (*vide* Difcours de la Caufe de la Pefanteur pag. 171.) *in hypothefi refiftentiarum mediis velocitatibus actualibus mobilis proportionalium.* Fig. 124.

Hugenii conftructio ita habet. Sint MG directio jactus, ME horizontalis, DE horizonti perpendicularis, circa quam velut axem defcripta fit log-mica ABC fubtangentem habens Dω vel FO, divifaque qualibet AD alteri EM parallela in K, ut AK fit ad KD, ficut celeritas jactus verticalis ex obliqua MG derivata, ad celeritatem terminalem, feu maximam exclufive, quam fcilicet grave nunquam attingere poteft, etfi ei magis magisque femper cadendo accedat. Per K agatur KBL æquidiftans DE log-micam in B, & horizontalem in L fecans; ductisque porrò per log-micæ puncta A, B tangentibus Aω, BO, tum etiam AC tangenti BO parallela, quæ KL fecet in P, & logarithmicam in C; fi fiat in qualibet KL, rectas Aω, AC, MG & ME fecante in punctis S, P, R & L, logarithmicam verò in B, ut RL ad TL ita SP ad BP, & $rl:tl =$

 sp:

$sp:bp$, erunt puncta T, t, &c. in curva optata MTC, quam dico eandem esse cum curva $2M2T2C$ in propositione LX. §. 510. constructa, si anguli GME, $2G2M2E$, subtangentes logarithmicarum $D\omega$ & $2G2u$, & denique celeritates jactus MG, & $2M2G$, æquales fuerint.

Fig. 124. & 123. *Demonstr.* Sint præterea Mr & $2M2r$ æquales, & æquabuntur pariter rl ac $2r2l$. Jam, quia MG exponit celeritatem jactus, EG denotabit velocitatem verticalem ex obliqua MG derivatam, & $D\omega$ vel FO (§. 498.) exponit celeritatem terminalem, erit (constr.) $AK:DK = EG:D\omega$; &, quia si æqualibus $D\omega$ & FO communis ωF addatur, provenientes inde DF seu KB & ωO æquales, atque adeò rectæ ωK, HB & AI parallelæ sunt, erit etiam $AK:DK = \omega I:D\omega = EG:D\omega$; & per consequens $\omega I = EG$, & sic ubique $sp = rl = 2r2l$, cùm Mr & $2M2r$ angulique GME, $2G2M2E$ (secundùm hypothesin) æquentur; porrò $AD:kD$ ($= MG:rG$) $= 2M2G:2r2G$, ergo (§. 492.) $kb:D\omega = 2r2b:2G2u$, sunt enim kb log-mus rationis AD ad kD in log-mica ABC, & $2r2b$ log-mus rationis alteri æqualis $2M2G$ ad $2r2G$ in log-mica $2M2B2Q$. Vel, quia (secundùm hypothesin) $D\omega = 2G2u$, fiet $kb = 2r2b$, & quia $2G2u:2r2s$ ($= 2G2M:2r2M = GM:rM = DA:kA$) $= D\omega:ks$ atque $2G2u = D\omega$, erit $2r2s = ks$ & $sb = 2s2b$; hinc etiam ex æqualibus sp & $2r2l$ ablatis æqualibus sb & $2s2b$ vel $2r2t$, remanet $bp = 2t2l$; sed constructio præbet $rl:tl = sp:bp$; seu quia $rl = sp$, fit etiam $tl = bp$, ergo pariter habebitur $tl = 2t2l$, & sic ubique, ergo curva Hugeniana MTC eadem est cum altera $2M2T2C$. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

519. Hinc liquet Hugenium suam constructionem nonnihil simpliciorem traditurum fuisse, si loco analogiæ $RL:TL = SP:BP$ simpliciter jussisset sumere ubique applicatam TL æqualem homologæ BP interceptæ inter log-micam ABC & ejus subtensam AC.

COROLLARIUM II.

520. Parameter parabolæ, quam missile juxta directionem MG & celeritate hac recta expressa in vacuo describeret, foret $2.EM^2:D\omega$. Nam, quia celeritas verticalis ex obliqua derivata est EG, & gravitas uniformis exponitur per subtangentem log-micæ $D\omega$, maxima alti-

altitudo, ad quam grave celeritate initiali EG pervenire potest, erit (§. 150.) $EG^2 : 2.D\alpha$. Sed GE est ad EM, ut dupla parabolæ altitudo ad semissem amplitudinis, ac propterea hæc dimidia amplitudo est $EM.EG : D\alpha$. Atqui quadratum dimidiæ amplitudinis parabolæ applicatum ad ejus altitudinem præbet parametrum, ergo hic parameter est $2.EM^2 : D\alpha$. Quod Hugenianæ & Varignonianæ determinationibus, utut aliis terminis expressis, consonum est.

PROPOSITIO LXII. THEOREMA.

521. *Eadem adhuc resistentiæ hypothesi posita, curva projectionis, quæ ex constructione à Cel. Newtono* (Princ. Phil. Nat. Math. Lib. II. Prop. IV.) *exhibita nascitur, eadem est cum Hugeniana, de qua in propositione proxime antecedenti egimus, aut cum curva propositionis nostræ sexagesimæ primæ.*

Ne Lectori Newtoni constructionem alibi quærere opus sit, Fig. 124. eam, sed aliis quam apud Autorem litteris signatam, huc afferre libet. Eadem vero ita habet:

Assumpta MG pro celeritate & directione jactus, ductisque per terminos ejus horizontali ME, ac verticali ED, in qua ejus segmentum EG celeritatem verticalem ex obliqua MG derivatam exponit, inter asymptotas DEM hyperbola quæcunque QVd descripta intelligatur rectam AM in Q secans, per quod punctum agatur insuper QH æquidistans horizontali ME, divisaque hac ME in L, ut ML sit ad LE sicut resistentia medii renitens motui in altum initio projectionis, seu velocitas verticalis EG ad gravitatem, seu celeritatem terminalem, antea expositam per subtangentem FO log-micæ ABC, ducatur LK parallela AM, hyperbolam in V secans, quæ log-micæ occurret in B & AD in K, quandoquidem in constructione Hugeniana (§. 518.) AK etiam est ad KD sicut EG ad FO vel $D\alpha$. Per hyperbolæ punctum V agatur Zz parallela EM, sumaturque in ea portio gz, quam Newtonus per litteram N designat, quæ sit ad zQ vel VN, sicut ME ad EG, aut simplicius, ducatur Qg æquidistans ipsi MG. Quibus positis, si in qualibet rl parallela KL capiatur rt æqualis trilineo hyperbolico Qun applicato ad datam gz, punctum t erit in curva, quæ eadem prorsus est cum ea, quam constructiones propositionum antecedentium LX & LXI, præbent.

Demonstr. I. Hyperbola QVd præbet, $EM : EL = VL : QM$ & dividendo $LM : EL = zQ : QM$, & (constr.) $LM : EL = EG : D\alpha = rl : ks$,

ks; ergo etiam $zQ:QM=rl:ks$, tum etiam (constr.) $gz:zQ$ $(=ME:EG)=Ml:rl$, ergo ex æquo $gz:QM=Ml:ks$; atque adeò $Ml.QM=gz.ks$.

II. Resumatur analogia $zQ:QM=GE:Du$, & $gz:zQ=EM:GE$, ergo ex æquo $gz:QM=EM:Du$. Atque adeò $EM.QM=Du.gz$.

III. Constructione est trilineum hyperbolicum $Quu=gz.rt$, additisque $Ml.QM$ (num. I. hujus) $=gh.ks$, fiet $QulM=rt.gz+ks.gz$. Atqui (§. 368.) $QMlu:EM.MQ=kb:Du$ & (num. II. hujus) $EM.QM=Du.gz$; ergo $rt.gz+ks.gz:Du.gz=rt+ks:Du=kb:Du$; atque adeò $rt+ks=kb=sb+ks$: hinc tandem $rt=sb$, ut habent constructiones propositionum LX & LXI; propterea tres diversæ constructiones propositionum trium postremarum unam eandemque curvam suppeditant. Quod erat demonstrandum.

CAPUT XVI.

De motu Corporum, in aëre resistente in duplicata ratione celeritatum mobilis.

HÆc resistentiæ hypothesis convenit fluidis perfectis atque raris, quorum scilicet partes prorsus non cohærent, sed liberrime, ubi corporibus solidis impegerunt, recedere queunt; ipsius vero hypotheseos ratio alibi (§. 427.) jam data est.

PROPOSITIO LXIII. Theorema.

Fig. 125. 522. *Motus variati ex primitive uniformi in aëre juxta duplicatam celeritatum rationem resistente ita se habent, ut spatium transmissum aliquo tempore exponatur log-mo rationis, quam habet celeritas initialis mobilis ad residuam eidem mobili post dictum tempus. Hoc verò tempus, ratione celeritatis amissæ mobilis ad residuam.*

I. Sit nunc linea MO deferens, quæ juxta NQ quiescentem æquabiliter incedere intelligatur eodem modo, quo ad propositionem LVIII. dictum est (§. 495); mobile vero M feratur ad oppositam partem scilicet versus O in deferenti linea, quæ versus Q æquabiliter procedit; sint præterea MDO scala celeritatum mobilis motu proprio in deferente linea currentis, & PFO scala solicitationum acceleratricium seu impulsuum aëris mobili allidentis. Unde, si aliquo tempore

pore mobile M confecerit in linea deferenti spatium ME, & in ejus termino acquisiverit celeritatem DE, velocitas absoluta mobilis in aëre erit BD, quâcum aër mobili M allabetur, unde per hypothesin erit MP ad EF in duplicata ratione AM ad BD; hoc est MP : EF $=$ AM^2 : BD^2. Ponitur enim AM, seu MN vel NT, pro designanda velocitate initiali. Jam ductis per punctum N intra asymptotas MA & AR hyperbolâ NHK, & log-micâ NGK subtangentis NT; in linea indefinita DCH parallela OQ & quomodocunque inter parallelas OR ac OQ ducta, fiat VD æqualis interceptæ GH inter hyperbolam NHK & log-micam NGK, eritque punctum D in scala celeritatum mobilis propriarum MDO. Per punctum *d* alteri D indefinite vicinum agantur *dh* parallela OQ, & *bf* æquidistans alteri BF; ac ductis per punctum hyperbolæ H rectis IS & HL, ita ut IL $=$ NT (seu $=$ subtangenti logmicæ NGK in puncto G, atque adeò HL parallela sit tangenti log-micæ in G, seu elemento G*g*) ac denique tangente hyperbolæ HR, adeo ut AI sit $=$ IR, & LR $=$ TI $=$ NS; quibus factis erit *nh* $=$ E*e* $=$ D*a*, & H*m* $=$ *da*.

II. Hyperbola præbet, AI : AT $=$ TN : IH, & dividendo LR vel TI : AT $=$ DE vel HS : BD seu IH, ex hypothesi verò AT vel AM aut MP : BD $=$ BD : EF, ergo ex æquo LR : IH vel BD $=$ DE : EF; est verò LR : IH $=$ *nh* vel E*e* : H*m* seu *da*, ergo etiam DE : EF $=$ E*e* : *da*; atque adeò EF. E*e* $=$ DE. *da*. Hoc est *momentum solicitationis acceleratricis* EF *æquatur momento celeritatis in deferenti linea mobili* M *acquisitæ* DE. Ergò (§. 488.) curva MDO est scala celeritatum, & PFO scala resistentiarum, seu impulsuum aëris vel solicitationum acceleratricium mobilis in linea deferenti, hæc enim omnia idem significant.

III. Agatur SR eritque ea parallela HL, nam IH : IS vel TN $=$ IL vel AT : IR vel AI. Adeoque IS : HS $=$ AM : DE $=$ IR : LR $=$ *mh* : *nh* vel E*e*, hinc E*e* : DE (§. 128.) $=$ *t*E*e* $=$ *mh* : AM; ergo omnia *t*E*e* id est *t*ME $=$ CH : AM, hinc AM. *t*ME $=$ CH, & AM. *t*ME, $-$ ME [illegible] (§. 489.) spatium absolutum, quod mobile in aëre transmittit, erit $=$ CH $-$ GH $=$ CG, adeòque exponi debet logarithmo rationis, quam celeritas initialis mobilis TN habet ad IH vel BD in logarithmica NGK, cujus subtangens NT. Quod erat primùm.

IV. Num. III. erat *t*ME $=$ CH : AM $=$ LR : IL $=$ SH : HI $=$ DE : BD, id est, tempus quo mobile spatium suum absolutum in aëre absolvit, seu motu proprio in linea deferenti spatium ME, exponitur

ra-

ratione, quam habet celeritatis initialis AM pars hoc tempore extincta DE ad residuam BD. Quod erat secundum.

Corollarium I.

523. Adeoque, si tempora fuerint in progressione geometrica ascendente, atque adeò velocitates mobili post hæc tempora residuæ etiam in progressione geometrica, sed descendente, & quidem reciproca progressionis temporum, spatia transmissa erunt in progressione arithmetica. Nam, si AT, AI sint in progressione geometrica, differentiæ TI, quæ sunt ut tempora, erunt in eadem progressione ascendente; ipsæ verò HI, seu celeritates mobili residuæ ipsis AI reciproce proportionales, erunt in progreslione geometrica descendente, spatia vero, seu CG, existent in progressione arithmetica. Atque cum hoc corollario penitus consentit Prop. V. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Celeberr. Newtoni.

Corollarium II.

524. Idcirco in ista resistentiæ hypothesi mobile in infinitum excurrens, tempore infinito ut CH, ubi infinite accesserit ad asymptotam TR, percurret etiam spatium infinitum CG; nam, si CG confunditur cum asymptota TR, fit infinita. In hypothesi verò capitis præcedentis, mobile tempore infinito ne quidem spatium finitæ magnitudinis, quod per rectam celeritatem initialem indicantem exponitur, absolvere potest, ut supra (§. 497.) ostensum. Quod Hugenio notatu dignum meritò visum est in Tractatu *De la Cause de la Pesanteur* pag. 175. circa finem.

PROPOSITIO LXIV. Theorema.

525. *Si grave vi gravitatis uniformis in aëre juxta duplicatam rationem celeritatum mobilis resistente verticaliter descendat à quiete motum suum incipiendo,*

Spatium *descensu confectum exponetur log-mo rationis sinus totius ad sinum complementi illius anguli, cujus sinus rectus celeritatem mobili acquisitam repræsentat;*

Tempus *verò, quo spatium illud pertransitur, aut prædicta velocitas mobili acquiritur, exponetur log-mo rationis sinus totius ad tangentem se-*

semissis complementi præmemorati anguli, applicato ad logarithmicæ subtangentem.

Grave M descendere incipiat à quiete in recta verticali MX, cui alia AO ad angulos rectos aptata sit; in hac AO capiatur MA, quæ gravitatem uniformem exponat, ac descriptis centro M intervallo MA quadrante circuli ILA & hyperbola æquilatera IK*k*, necnon log-mica NIQ, cujus subtangens æquet radium quadrantis vel semi-latus transversum MI hyperbolæ; per hyperbolæ & quadrantis punctum I agatur tangens communis IU, quæ æquidistans erit ipsi MA. Tum etiam per quodvis quadrantis punctum L ducatur LN parallela AO log-micæ occurrens in puncto N, & recta ALP radio MI producto occurrens in P, per quod punctum ducatur insuper PQ æquidistans MA & log-micæ occurrens in puncto Q, sitque adhuc NO ordinata log-micæ per punctum N ducta. Dein fiat porrò in recta indefinita MX segmentum ME = MO, & sic ubique respective; eritque ductis per puncta E & L rectis EG, LS radiis MA & MI respective parallelis, communis earum intersectio D in *scala celeritatum acquisitarum* MDX, adeo quidem, ut mobile postquam spatium ME perlapsum fuerit, in termino E hujus spatii acquisiverit celeritatem ED vel MS. Factaque ubique EF tertia proportionali post rectas EG & ED, punctum F erit in *scala resistentiarum* aëris MFX, quæ scala etiam erit *scala solicitationum acceleratricium* mobilis cadentis in recta MX, sed quatenus ea refertur ad axem AX, versus quem curva MFX convexa est; nam, quia EF, seu $ED^2 : EG$, exponit resistentiam medii in puncto E & EG = MA gravitatem uniformem, exponet FG omnino solicitationem acceleratricem in puncto eodem E, ut alibi (§. 481.) jam dictum est. Igitur ductis *eg* parallela EG & ab ea elemento spatii E*e* distante; *dlr* parallela DL productæ in *a*, & sursum in R, per punctum quadrantis *l*, recta *Alp*, & per *p* linea *pq* æquidistante PQ; ac denique ordinata *no* distantia O*o* = E*e* distante ab altera NO, in qua NO sit VQ tertia proportionalis ad IM & NO; & his positis juxta alibi (§. 484.) ostensa, tantum probandum superest, FG.E*e*, seu rec-lum FG*g*, *momentum solicitationis acceleratricis* FG æquari rec-lo ED.*a d*, seu *momento celeritatis* ED *casu mobilis ex altitudine* ME *acquisitæ*. Quo probato reliqua sponte sua obtinebuntur, scilicet expressio temporis descensus in spatio ME, & natura curvarum MDX, MFX, &c.

Demonstr. I. Est (secundùm hypothesin) EG : EF (= $EG^2 : ED^2$) = ML^2:

Qq

$= ML^2 : MS^2$, & convertendo fit $EG : FG$ ($= ML^2 : LS^2 = IM^2 : NO^2$, seu quia IM, NO & VO sunt in continua ratione) $= IM : VO$, hinc $VO = FG$, & $VO \cdot Ov = FG \cdot Ee$. Atqui (§. 491. num. III.) $VO \cdot Ov = NO \cdot Np = LS \cdot Lm$ (§. 493.) $= MS \cdot Ss = ED \cdot ad$; ergo $FG \cdot Ee = ED \cdot ad$. Quod erat primum.

II. Propter similitudinem triangulorum MLS & Mlm, fit ad (vel ml) : $l\lambda$ (vel, §. 463. num. III, Ld) est $= LS : ML = NO : IM = VO : NO$; & $l\lambda : Pp = NO$ (vel LS) $: MP$; ac denique ex natura log-micae (§. 491. num. I.) $Pp : qp = MP : IM$, erit ex aequo $ad : pq = VO : IM$, seu permutando $ad : VO = pq : IM$. Atqui (§. 131. & 485.) $ad : VO = tEe$, hoc est, incrementum celeritatis elementare, applicatum ad solicitationem acceleratricem VO, exponit tempusculum, quo elementum spatii Ee percurritur; ergo etiam $pq : IM = tEe$, atque adeò omnia $pq : IM$, id est, $PQ : IM =$ omnibus tEe, seu tempori descensus per spatium ME.

III. Jam MO seu ME, id est, spatium descensu confectum, est log-us rationis IM ad NO, seu IM ad LS, hoc est log-us sinus totius ad sinum complementi anguli IML, cujus sinus rectus MS celeritatem in E acquisitam exponit. PQ verò est log-us rationis PM ad IM, seu IU ad IM; ducta scilicet ex centro M super AP perpendiculari, eaque producta usque ad occursum cum tangente IU; aut denique rationis MA ad AZ, id est, sinus totius ad tangentem semissis anguli LMA, id est, semissis complementi anguli IML, cujus sinus MS celeritatem acquisitam exponit. Idcirco tempus per ME, quod num. II. hujus exponitur per $PQ : IM$, exponi debet per log-mum rationis ($MA : AZ$) sinus totius ad tangentem semissis complementi anguli IML applicatum ad radium IM, seu ad log-micae subtangentem. Quae omnia erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

526. Igitur ducta MR usque ad occursum K cum hyperbola IK, trilineum hyperbolicum IMK applicatum ad semissem quadrati IM, exponet etiam tempus descensus per spatium ME. Nam (§. 463.) est duplum trilinei $IMK =$ rec-lo $PQ \cdot IM$, ergo trilineum $IMK = PQ \cdot \frac{1}{2}IM$. Jam, quia (§. 525. num. II.) $tME = PQ : IM = PQ \cdot IM : IM^2$, erit $tME =$ dupl. trilin. $IMK : IM^2 =$ trilin. $IMK : \frac{1}{2}IM^2$.

Pariter ducta asymptota My hyperbolae IKk, atque ex K demissa ad asymptotam ordinata KY, ad quam alia quaedam ky se habeat,

ut

ut LS ad IM, quadrilineum hyperbolicum $KkyY$ applicatum ad semissem IM exponet spatium percursum ME. Nam, quia (constr.) $KY : ky = IM : NO$, erit (§. 368.) $KkyY : MY . KY$ seu $\frac{1}{2}IM^2 = OM : IM$, adeoque $OM = ME = KkyY : \frac{1}{2}IM$.

Corollarium II.

527. Scala solicitationum acceleratricium MFX est log-mica, cujus subtangens est semissis ipsius IM. Nam, quia supra (§. 525. num. 1.) ostensum $VO = FG$ & (constr.) $OM = ME = AG$, sequitur curvam MFX similem & æqualem esse curvæ IV; atqui hæc curva est log-mica, cujus subtangens est dimidia ipsius IM subtangentis logarithmicæ IN; quandoquidem quælibet VO est tertia proportionalis ad IM & NO, ergo etiam MFX est log-mica, cujus asymptota est AX. Propterea, si solicitationes acceleratrices FG sunt in progressione geometrica descendente, spatia transmissa sunt in progressione arithmetica ascendente.

Corollarium III.

528. Adeoque velocitas *terminalis* seu *maxima*, est MA, quæ gravitatem uniformem repræsentat, cum linea AX parallela MX asymptota sit utriusque curvæ MFX & MDX.

Corollarium IV.

529. Tempus, quo grave in aëre celeritatem DE acquirit, est ad tempus, quo eandem celeritatem in vacuo acquireret, ut PQ ad DE. Nam (§. 151.) tempus, quo celeritas DE in vacuo acquiritur, est $DE : IM$ vel AM, & tempus, quo in aëre eadem DE acquiritur, $PQ : IM$.

Corollarium V.

530. Vicissim celeritas, quæ tempore $PQ : IM$ in aëre acquiritur, est ad celeritatem, quæ eodem tempore in vacuo acquiri potest, ut DE ad PQ. Nam (§. 151.) tempore $PQ : IM$ acquiritur in vacuo celeritas PQ.

SCHOLION.

Fig. 127. 531. Si grave M perpendiculariter deorsum projiciatur in recta MX celeritate MI, majore ipsâ terminali MA vel MP; positoque, mobilis velocitatem reductam esse ex MI ad MS (nam, quia velocitas projectionis MI major est quam AM, resistentia medii major erit gravitate, ac propterea motus continuo debet retardari) erit spatium percursum ME exponendum per log. $\sqrt{}(PIA:PSA)$ seu log-mum subduplicatæ rationis rectanguli PI. AI ad PS. AS; tempus verò, quo mobile spatium ME percurrit, seu quo velocitas initialis MI reducitur ad ED vel MS, exponitur per log. $\sqrt{}(AI:AS)$ — log. $\sqrt{}(PI:PS)$. Ponitur verò MP = MA, hi posteriores log-mi sumuntur in log-mica, cujus subtangens est unitas, log. vero ex $\sqrt{}(PIA:PSA)$ sumitur in log-mica, cujus subtangens est AM vel MP. Sin verò celeritas projectionis MI minor fuerit quam MA, hic casus jam continetur in præsenti propositione, ut adeo eidem diutius immorari plane necessum non sit.

PROPOSITIO LXV. THEOREMA.

532. *Lineâ rectâ, quæ celeritatem terminalem seu gravitatem uniformem exponit, sumtâ pro sinu toto seu radio; si mobile quoddam, celeritate initiali, expressa tangente alicujus anguli, verticaliter in altum projiciatur*, maxima altitudo, *ad quam mobile in aëre pervenire potest, exponetur log-mo rationis secantis anguli ad radium*, & tempus *hujus ascensionis exponetur per ipsum angulum, cujus tangens celeritatem initialem exponit.*

Fig. 128. Ascendat mobile celeritate initiali EC ex E in M in linea verticali EM, centroque M describantur, ut in præcedenti, circuli quadrans IKA, hyperbola æquilatera IL, & logarithmica FN. Producatur CE in H factaque EH tertia proportionali ad EG & EC, eritque EH resistentia, quam ascendens mobile ab aëre patietur in E; & quia præterea EG, seu MA, gravitatem uniformem exponit, quæ mobili in altum lato quoque resistit, erit ideo (§. 481.) *resistentia totalis* mobili opposita in E æqualis GH. Adeoque curva quædam HM erit scala resistentiarum totalium, curva verò CM scala celeritatis decrescentis EC. Adeoque (§. 484.) res eo deducitur, ut construantur hæ nominatæ curvæ ejus proprietatis, ut sit ubi-

ubique HE. Ee = EC. bC. Ad id, ductis CL, LN atque NO parallelis rectis MI & MA respective, fiat ME = MO, & sic ubique, dabunturque tot puncta in curva C2CM, quot libuerit, ex qua deinceps alteram HM construere non erit difficile. Ducantur *cl*, *ln*, *no* prioribus CL, LN & NO æquidistantes & indefinite vicinæ, sumaturque in qualibet ON major OV, quæ sit ad homologam ON, ut hæc NO ad MI; quæ MI simul etiam log-micæ IN subtangentem significat, & hac ratione resultabit nova log-mica IV, cujus subtangens erit semissis IM subtangentis log-micæ IN.

Demonstr. I. Quia rectæ EG, EC & EH (secundùm hypothesin) sunt in continua ratione, erit EG : EH = $EG^2 : EC^2$, vel invertendò & componendo HG : EG = $IS^2 : IM^2 = LS^2 : IM^2 = NO^2 : IM^2$ (vel ob continue proportionales VO, NO & IM) = VO : IM vel EG, ergo HG = VO; & quia OM = EM, ac $oM = eM$, & proinde $Oo = Ee$; erit HG. Gg, vel HG. Ee = VO. Oo (§. 491. num. III.) = NO. Np = LS. Lm (§. 493.) MS. Ss = EC. Cb. Id est *momentum celeritatis decrescentis* EC *æquatur momento resistentiæ totalis* HG. Jam ME vel MO est log-us rationis NO ad IM, seu IS ad IM, id est, log-us rationis secantis anguli MIS, cujus tangens MS = EC celeritatem initialem exponit, ad radium IM vel MA. Quod erat primum.

II. Quia VO : IM = $NO^2 : IM^2 = LS^2 : IM^2 = MR^2 : MK^2$ (§. 165.) = $Rr : Kk$, atque adeò, quia $Rr = Cb$, erit Kk : IM = Cb : VO = Cb : HG (§. 131, 485.) = tEe, & Kk : MK vel IM (§. 129.) = angulo KMk, adeoque tEe = angulo KMk, ac proinde tempus totius ascensus per spatium EM exponi debet angulo KMI, cujus tangens est IR vel EC. Quod erat alterum.

COROLLARIUM I.

533. Nunc iterum curva resistentiarum totalium M2HH erit log-mica similis & æqualis log-micæ IV. Atque adeo si resistentiæ totales sumantur in progressione geometrica descendente, spatia ascendendo confecta erunt in progressione arithmetica descendente, scilicet spatia toto ascensu descripta. Horum demonstratio eadem ferme est cum ea coroll. II. prop. præced. §. 527.

COROLLARIUM II.

534. Velocitas initialis mobilis suam maximam in aëre altitudinem EM absolventis, est ad celeritatem initialem, qua mobile pari tempore suam in vacuo maximam altitudinem conficeret, ut tangens IR ad arcum IK. Nam, si corpus in vacuo celeritate initiali IK ascendit, tempore IK : IM id (§.§. 141. 151.) ascendet quousque potest, sed hoc ipso tempore IK : IM expositum angulo KMI, ascendet in aëre spatio EM, celeritate initiali EC vel IR. Ergo, &c. Atque hoc consentit cum coroll. 4. prop. 9. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Cel. Newtoni.

COROLLARIUM III.

535. Tempus, quo mobile suam in aëre altitudinem, ad quam celeritate initiali IR pervenire potest, absolvit, est ad tempus, quo in vacuo suam altitudinem, celeritate initiali existente eadem IR, absolveret, sicut arcus IK ad tangentem IR, seu, quod idem est, ut sector IMK ad triangulum IMR. Nam tempus ascensionis in aëre est angulus IMK, seu IK : IM, & tempus ascensionis in vacuo (§. 151.) IR : IM.

COROLLARIUM IV.

536. Adeoque, si celeritas initialis, qua corpora in aëre & in vacuo ascendunt, terminalem æquaverit, erit tempus, quo altitudo illius quod in aëre, ad tempus, quo altitudo ejus, quod in vacuo ascendit, conficitur, ut circulus ad quadratum circumscriptum; nam, si IR = IM, erit sector IMK octava circuli & triangulum IMR octava quadrati circulo circumscripti pars, adeoque ille ad hoc, ut circulus totus ad quadratum circulo circumscriptum.

COROLLARIUM V.

537. Iisdem adhuc positis, quæ in coroll. III. altitudo, quam mobile in aëre absolvit, est ad altitudinem in vacuo percurrendam, ut duplum rec-lum IMO ad quadratum tangentis IR. Nam (§. 150.) altitudo in vacuo describenda erit $IR^2 : 2IM$, & ME est ad $IR^2 : 2IM$, ut duplum rec-lum IMO ad IR^2.

Co-

Corollarium VI.

538. Adeoque, si celeritas initialis IR terminali IM par fuerit, erit altitudo in aëre ad altitudinem in vacuo absolvendam, vel 2.IMO ad IR^2, sicut 2MO ad IM, id est, sicut log. ($2.IM^2 : IM^2$) ad IM, hoc est, sicut log-us rationis duplæ ad subtangentem log-micæ, vel etiam (§. 368.) ut quadrilineum hyperbolicum alterutri asymptotæ adjacens, cujus ordinatæ sunt in ratione dupla, ad rec-lum hyperbolæ inter asymptotas. Ut Celeb. Hugenius (pag. 174. Diss. *De Causa Gravitatis*) sine demonstratione asseruit.

Corollarium VII.

539. Celeritas initialis mobilis spatium EM ascendendo describentis, est ad celeritatem, quacum denuo in terram recidit, sicut tangens anguli IMR ad ejusdem sinum. Nam, quia in figuris 126. & 128. spatia ME utrinque sunt (secundùm hypothesin) æqualia, erit ratio ON : IM, in fig. 126. seu LS : LM = in fig. 128. IM : NO = RS : MR; adeoque triangulum rec-lum LMS in fig. 126. est simile triangulo RMS, adeo ut angulus IML in fig. 126. = IMK, atqui IR est tangens & MS in fig. 126. sinus unius ejusdemque anguli IMK vel IML, ergo &c. Fig. 126. & 128. Fig. 126.

Hisce multa alia potuissent addi corollaria, sed brevitati consulens talia Lectoris industriæ ex præcedentibus elicienda relinquo.

Caput XVII.

De motibus Corporum in aëre resistente, partim juxta proportionem celeritatum mobilis, partim etiam juxta duplicatam proportionem earundem.

540. Hæc resistentiarum hypothesis illis fluidis convenit, quorum partes nonnihil instar visci cohærent: etenim, si tale fluidum tanquam medium concipiamus mobili trajiciendum, illicò apparebit, ad separandas ejusmodi viscidi fluidi partes, aliquam vim adhibendam esse, diversam ab ea, quæ in mobili tollitur ab allapsu continuo particularum fluidi; & hanc vim separatricem partium fluidi proportionari quantitatibus fluidi trajiciendi. Quantitates verò ipsæ fluidi trajiciendæ velocitatibus mobilis proportionales

les exiſtunt. Igitur tenacitas abſoluta fluidi ducta in celeritatem mobilis, ſeu, quod idem eſt, in quantitatem materiæ ſeparandæ vel trajiciendæ, erit una pars reſiſtentiæ, quam mobile in ejusmodi fluido latum ſubibit, altera provenit à fluiditate, qualem in præcedenti capite contemplati ſumus. Idcirco reſiſtentia totalis, quam mobile in hujusmodi medio patietur, eſt ut velocitas in datam quantitatem ducta, cum quadrato ejusdem velocitatis. Idcirco tenacitatem dictam conſiderabimus deinceps tanquam vim mortuam gravitatique comparabilem, perinde ac reſiſtentias, quæ ab allapſu fluidi ad corpus mobile proveniunt.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA.

541. *Si mobile in aëre dicta ratione reſiſtente motu variato ex primitive uniformi ſeu æquabili feratur;* ſpatium, *quod id aliquo effluxo tempore deſcribet, exponetur tertia proportionali ad celeritatem mobilis initialem, tenacitatem fluidi & log-um rationis, quam habet dicta velocitas initialis tenacitate aucta, ad hanc tenacitatem auctam pariter, ſed celeritate actuali mobilis.* Tempus, *quo hoc ſpatium percurritur, exponi debet exceſſu, quo log-us rationis, quam celeritas initialis habet ad actualem, ſuperat log-um rationis earundem celeritatum, ſed tenacitate aëris auctarum, applicato ad celeritatem initialem. Poſito ſcilicet log-mos deſumtos eſſe ex log-mica, cujus ſubtangens ſe habet ad celeritatem mobilis initialem, ſicut rectangulum ex aggregato tenacitatis fluidi & velocitatis initialis corporis in hanc celeritatem initialem ad rec-lum ſub dicta tenacitate & reſiſtentia medii totali initio motus.*

Fig. 129. I. Eſto MS linea deferens, quæ, ut in propoſitione LVIII. explicuimus, uniformiter moveatur verſus T celeritate AM, quæ proinde eſt celeritas initialis, mobile verò M proprio ſuo motu ab alliſione continua aëris feratur ex M verſus S, ponaturque certo tempore acquiſiviſſe in linea deferenti celeritatem AQ, poſtquam ſcilicet ſpatium ME in ea transmiſit, adeoque detracta celeritate AQ ab initiali AM, quâ deferens linea MS verſus T æquabiliter incedit, erit reſidua QM velocitas abſoluta mobilis, quam revera in aëre habet; ſit porrò OM, vel æqualis IA, tenacitas fluidi proveniens ex viſcoſitate ejus; item ponatur MP pro reſiſtentia aëris initio motus, & EF pro reſiſtentia aëris, ubi actualis mobilis velocitas fuerit QM; eritque adeò (ſecundùm hypotheſin) EF ut OM.QM + QM^2, ſeu facta OG = MQ, ut rec-lum GM.QM, & MP ut IM.AM, atque

atque adeo habetur MP : EF = IM. AM : GM. QM, atque MP. GM. QM = EF. IM. AM. Æqu. I.

Per punctum A ducta sit log-mica HAB, cujus subtangens quælibet RC sit ad AM (secundùm hypothesin) = IM. AM : OM. MP; atque adeò RC. OM. MP = IM. AM². Æqu. II. Et per puncta I, G, O, Q agantur rectæ IK, GH, OX, & QB asymptotæ log-micæ ST parallelæ, log-micæ occurrentes in punctis K, H, X & B, per quæ ordinatæ KL, HN, XY & BC ductæ sint; fiat ME = $MC - \frac{IM.LN}{AM}$, eritque PFS scala resistentiarum & tempus, quo spatium ME in linea deferenti MS percurritur, seu tME = (MC = LN) : AM.

II. *Demonstr.* Cum (constr.) sit ME = $MC - \frac{IM.LN}{AM}$, erit etiam $Ee = Cc - \frac{IM}{AM}.Nn$, sunt enim Ee, Cc, & Nn elementa linearum ME, MC & LN. Præterea, quia etiam (constr.) OG = MQ, erit pariter $Gg = Hi = Qq = Bd$, adeòque (§. 491. num. 11.) rec-lum HNn = rec-lo BCc, ac proinde $Cc : Nn$ = GM : QM, & $Cc : \frac{IM}{AM}.Nn = GM : \frac{IM}{AM}.QM$ = GM. AM : IM. QM, & convertendo Ee seu $Cc - \frac{IM}{AM}.Nn : Cc$ = GM. AM − IM. QM : GM. AM (vel quia OM. AQ æquatur GM. AM − IM. QM) = OM. AQ : GM. AM, & propter triangula similia RCB ac bdB est, $Cc : Qq$ = RC : QM, ergo ex æquo & per rationum compositionem $Ee : Qq$ = RC. OM. AQ : GM. QM. AM = RC. OM. MP. AQ : MP. GM. QM. AM, (vel substitutis loco RC. OM. MP & MP. GM. QM ope Æqu. II. & I. solidis respective æqualibus IM. AM² & EF. IM. AM) = IM. AM². AQ : IM. AM². EF = AQ : EF, adeoque comparando primam cum ultima ratione, habetur $Ee : Qq$ = AQ : EF, atque adeò EF. Ee = AQ. Qq. Id est *momentum sollicitationis acceleratricis* EF in linea deferenti MS *æquatur momento celeritatis acquisitæ* AQ in hac linea deferente.

III. Ut antea (num. 11. hujus) erit $Cc : Nn$ = GM : QM, & convertendo $Cc - Nn : Cc$ = OM (seu GQ) : GM, & $Cc : Qq$ = RC : QM, ergo $Cc - Nn : Qq$ = RC. OM : GM. QM = RC. OM. MP : MP. GM. QM = IM. AM² : EF. IM. AM, substitutis scilicet loco solidorum RC. OM. MP & MP. GM. QM æqualibus IM. AM² & EF. IM. AM, quæ æqualitates secunda & prima num. 1. exhibent;

est ergo $Cc - Nn : Qq = IM . AM^2 : EF . IM . AM = AM : EF$, & permutando $Cc - Nn : AM = Qq : EF = Ee : AQ = tEe$, ergo omnia tEe seu tempus per $ME = (MC - LN) : AM$.

IV. Ergo, assignato hoc tempore, linea deferens MS describet in aëre cum velocitate AM motu suo æquabili spatium $MC - LN$, motu verò proprio in hac deferente corpus simul describit spatium $ME = MC - \frac{IM}{AM} . LN$, adeòque spatium absolutum, quod mobile in aëre absolvet, erit excessus spatii motu communi & æquabili lineæ deferentis supra motum isti contrarium mobilisque in deferenti proprium, seu $MC - LN - MC + \frac{IM}{AM} . LN = IM . LN : AM$. Hoc ergo spatium absolutum exponitur tertia proportionali ad celeritatem initialem AM, tenacitatem fluidi OM vel IA, atque ad logarithmum rationis, quam KL & HN, id est, celeritates initialis & actualis, mobilis tenacitate auctæ, ad invicem habent. Quæ omnia erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

542. Apparet igitur in præsenti resistentiarum hypothesi mobile non solum non posse in infinitum excurrere, sed ne quidem posse terminum finiti spatii $SM . LY : AM$ tempore quantumlibet magno attingere. Nam evanescente QM, ipsa MC fit infinita, GM fit OM, adeoque LN mutatur tunc in LY, adeo ut $MC - LN : AM$ abeat in $MC - LY : AM$ seu in $MC : AM$, quia finita LY præ infinita MC evanescit. Idcirco spatium $IM . LN : AM$ tempore finito $MC - LN : AM$ percursum, mutabitur in $IM . LY : AM$, quod tempore infinito tantum $MC : AM$, id est nunquam, absolvi potest.

COROLLARIUM II.

543. Si spatia $IM . LN : AM$ sumantur in progressione arithmetica, erunt ipsæ LN abjectis $IM : AM$ ejusdem ubique magnitudinis, etiam in progressione arithmetica, atque adeò ordinatæ log-micæ HN vel æquales hisce GM, seu velocitates actuales mobilis QM tenacitate medii OM vel AI auctæ, in progressione geometrica.

Corollarium III.

544. Quia CM = log. (AM : QM) & LN = log. (IM : GM) erit MC − LN = log. (GM. AM : IM. QM) = log. (AM. OM + AM. QM : IM. QM). In recta MP sumatur MZ, quæ sit ad OM vel AI = AM : QM, eritque QM. MZ = AM. OM, atque adeò AM. OM + AM. QM : IM. QM = AM + MZ seu AZ : IM, & consequenter MC − LN = log. (AM + MZ : IM), atque (MC − LN) : AM = log. (AM + MZ : IM) applicatus ad AM. Adeoque, si hæ MC − LN : AM, hoc est, tempora sumantur in progressione arithmetica, erunt ipsæ AM + MZ, seu magnitudines MZ velocitatibus QM reciproce proportionales celeritate initiali AM auctæ in progressione geometrica.

Hæc duo postrema corollaria probe conspirant cum propositionibus XI. & XII. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Cl. Newtoni, & cum iis, quæ Cl. Varignon in Actis Acad. Scient. 1707. d. 13. Augusti probl. IV. coroll. 11. & 14. exhibuit.

Scholion.

545. Satis prævideo fore, ut mihi objiciatur nimia prolixitate in hac propositione nostra ea tradita esse, quæ multo brevius atque facilius potuissent perfici, si pro linea OM, tenacitatem fluidi denotante, assumsissem rectam AM, quæ velocitatem initialem exponit. At respondeo hoc pacto propositionem minus generalem futuram fuisse, etsi non negem, multò brevius atque simplicius tunc demonstrari potuisse. Nam talem adducere volui, quæ etiam casum propositionis nostræ LXIII. contineret; quod revera præstat, nam evanescente OM vel AI, ex constructione præsentis propositionis, nascuntur omnes determinationes propositionis LXIII, adeo ut illa casus tantum sit seu corollarium præsentis. Sed, si pro linea tenacitatem fluidi repræsentatrice accepissem tantum rectam AM, quæ velocitatem initialem mobilis exponit, talis deductio non successisset, quia AM, quatenus velocitatem initialem exprimit, nunquam potest evanescere. Sed, quia deductio propositionis superioris LXIII. ex præsenti non adeò obvia esse videtur, eam hoc loco distinctius explicare libet. Si IA vel OM evanescit, etiam AI. LN : AM evanescere videtur, seu spatium à mobili in aëre juxta duplicatam pro-

portionem celeritatum resistente in nihilum abire, tum etiam MC − LM : AM. Hoc enim casu IM abiret in AM, & GM in QM, id est, ratio IM : GM fieret AM : QM, adeoque LN log-us illius rationis fieret MC, adeò ut MC − LN futura sit MC − MC = o. Quomodo ergo ex constructione præsentis propositionis elici potest constructio propositione LXIII. in casu ipsius AI = MO = o?

546. Quia in dicta propositione (§. 522.) log-micæ subtangens exponit celeritatem initialem, sumatur log-us rationis IM : GM in ea log-mica, eritque (§. 492.) log. (IM : GM) : AM = LN : RC, adeoque LN = RC. log. (IM : GM) : AM, & IA. LN : AM = RC. IA. log. (IM : GM) : AM^2 = RC. OM, MP. log. (IM : GM) : AM^2. MP. Atqui (§. 541. num. 1. æqu. I. II.) est RC. OM. MP = IM. AM^2, ergo IA. LN : AM = IM. AM^2. log. (IM : GM) : AM^2. MP = IM. log. (IM : GM) : MP, & hæc est nova expressio spatii in aëre decursi, sive IA sit quantitas realis sive non. Jam, si IA = o, erit ratio IM : GM = AM : QM, evanescente scilicet OM = IA, & existente OG = QM. Ergo spatium in aëre percursum erit hoc casu AM. log. (AM : QM) : MP = log. (AM : QM) in casu propositionis LXIII. ubi MP revera æqualis facta erat AM celeritati initiali. Est ergo spatium absolutum à mobili in aëre percursum exponendum log-mo rationis, quam celeritas initialis AM habet ad residuam mobilis seu actualem QM, prorsus ut habet propositio citata.

547. Determinatio temporis est paulò altioris indaginis. Hoc tempus exponitur juxta præsentem propositionem per (MC − LN) : AM. Jam (§. 544.) est MC − LN = log. (AM + MZ : IM) = log. AM + MZ, − log. IM. Et log. (AM + MZ) = $\left(\frac{MZ}{MA} - \frac{MZ^2}{2.AM^2} + \frac{MZ^3}{3.AM^3} -\right.$ &c.) in RC, = $\left(\frac{MZ.QM}{AM.QM} - \frac{MZ^2.QM^2}{2.AM^2.QM^2} + \frac{MZ^3.QM^3}{3.AM^3.QM^3} - \&c.\right)$. RC, seu quia ex constructione rec-lum MZ. QM æquatur dato rectangulo AM. OM, erit log. (AM + MZ) = $\frac{RC.OM.AM}{AM.QM} - \frac{RC.OM^2.AM^2}{2.AM^2.QM^2} + \frac{RC.OM^3.AM^3}{3.AM^3.QM^3}$ − &c. = $\frac{RC.OM.MP}{MP.QM} - \frac{RC.OM^2.MP}{2.MP.QM^2} + \frac{RC.OM^3.MP}{3.MP.QM^3}$ − &c. (aut, quia solidum RC. OM. MP æquatur solido IM. AM^2, ut aliquoties jam vidimus) = $\frac{IM.AM^2}{MP.QM} - \frac{IM.AM^2.OM}{2.MP.QM^2} + \frac{IM.AM^2.OM^2}{3.MP.QM^3}$ − &c. Atqui in hac ultima serie infinita, ob evanescentem (secundùm hypothesin) OM,

OM, evanescent omnia post primum terminum membra, propterea erit hoc casu log. $(AM + MZ) = \frac{IM.AM^2}{MP.QM}$.

Quia $IM = AM + IA = AM + OM$, erit log. $IM = (\frac{OM}{AM} - \frac{OM^2}{2.AM^2} + \frac{OM^3}{3.AM^3} - \&c.)$ RC, quæ est eadem series cum prima, excepta sola OM, quæ hoc loco est posita loco MZ, in prima. Ergo etiam log. $IM = \frac{RC.OM.MP}{AM.MP.} - \frac{RC.OM^2.MP}{2.AM^2.MP} + \&c. = \frac{IM.AM^2}{AM.MP} - \frac{IM.AM^2.OM}{2.AM^2.MP} + \&c. = \frac{IM.AM}{MP} - \frac{IM.OM}{2.MP} + \&c. = \frac{IM.AM}{MP}$, quia etiam in hac serie infinita omnes, post primum, termini evanescunt, existente (secundùm hypothesin) OM vel $AI = 0$. Hinc $MC - LN = \log. (AM + MZ) - \log. (IM) = \frac{IM.AM^2}{MP.QM} - \frac{IM.AM}{MP} = \frac{IM.AM^2 - IM.AM.QM}{MP.QM} = \frac{IM.AM.AQ}{MP.QM} = \frac{AM^2.AQ}{MP.QM}$, quia in præsenti hypothesi IM fit AM evanescente IA, & quia insuper, in propositione LXIII, MP æqualis erat AM, erit $MC - LN = \frac{AM.AQ}{QM}$, & $MC - LN : AM$, seu tempus, quo mobile suum spatium log. (AM : QM) in aëre absolvit fit $= AQ : QM$, exponendum scilicet ratione celeritatis initialis partis amissæ ad residuam, seu velocitatem mobilis actualem in aëre, prorsus ut habet citata propositio LXIII. §. 522.

548. Quin imò res universalius adhuc quam illic tradi potest, supponendo resistentiæ ab initio motus repræsentatricem MP diversam esse à recta AM, quæ celeritatem initialem exponit; etenim spatium absolutum in aëre confectum eo casu exponetur, ut supra (§. 546.) invenimus, per AM. log. (AM : QM) : MP; & tempus, quo hoc spatium absolvitur per AM. AQ : MP. QM. Idcirco potuisset sæpius jam memorata propositio penitus omitti, quemadmodum & eæ, quæ post eam in eodem capite XVI. immediate sequuntur, quod pariter ex iis deduci possint facillimo negotio illæ, quæ mox sequentur. Sed demonstrationum diversitas atque in conclusionibus concentus omnino digna sunt, quæ distinctius curiosi Lectoris oculis exponantur.

PROPOSITIO LXVII. Theorema.

549. *Si gravitas uniformis exponatur sinu complementi alicujus anguli acuti & dati, & grave in linea recta horizonti normali cadat in aëre, juxta indicatam in titulo hujus capitis hypothesin, resistente; assumaturque quædam magnitudo, quæ sit ad log-mum rationis, quam tangens semissis complementi dati anguli habet ad tangentem semissis complementi alicujus anguli variabilis & majoris dato, ut sinus dati anguli ad sinum totum. Sumptis scilicet log-mis in logarithmica, cujus subtangens est æqualis sinui complementi dati anguli præmemorati, quibus positis,*

1°. Spatium, *quod grave aliquo tempore perlabitur accelerato motu, est excessus log-mi rationis, quam habet sinus complementi dati anguli ad sinum complementi variabilis, supra assumptam magnitudinem:*

2°. Tempus, *quo spatium istud absolvitur, exponetur assumpta magnitudine applicata ad sinum rectum anguli dati:*

3°. Celeritas, *in fine cujusque temporis acquisita, est, ut excessus sinus anguli variabilis supra sinum rectum anguli dati.*

Fig. 130. Cadat grave à quiete ex M in linea recta Mα horizonti perpendiculari, ac centro A descripto circuli quadrante BLCA, exponat in eo recta IM, quæ est sinus complementi cujusdam dati anguli BAI, gravitatem uniformem, & ductâ porrò qualibet SL parallela IM, jungatur AL; eritque angulus BAL is, qui in propositione variabilis dicitur, cujus recta LS est sinus complementi. Circa axem MR & per supremum quadrantis punctum transeat log-mica BGN, cui linea LN parallela radio CA occurrat in N, recta verò IG eidem MC æquidistans in puncto G, per hæc duo log-micæ puncta transeant ordinatæ GH & NO; dein assumatur quædam XZ, quæ sit ad log-um rationis QA : AP sicut AM sinus dati anguli BAI ad radium AI. Ductis enim per puncta I & L ex puncto C rectis CP & CQ, erit QA : PA, ut tangens dimidii anguli IAC ad tangentem dimidii LAC, seu ut tangens semissis complementi anguli dati BAI ad tangentem semissis complementi anguli variabilis BAL; nam AQ : AP = tang. LCA : tang. ang. ICA = tang. MIC : tang. SLC = tang. $\frac{1}{2}$IAC : tang. $\frac{1}{2}$LAC. Ipsa verò HO, seu log-us rationis GH : NO, seu IM : LS, est log-us rationis, quam habet sinus complementi IM anguli dati BAI ad sinum complementi LS variabilis BAL; propterea ostendi debet 1°. spatium cadendo descriptum

ME,

ME, esse $= HO - XZ$; deinde 2°. tempus, quo spatium istud percurritur, seu $tME = XZ : AM$, ac denique MS differentiam sinuum AS, AM angulorum variabilis & dati, celeritatem in E acquisitam, adeo ut productis FE & LS in D hoc punctum futurum sit in scala celeritatum MD, ducta scilicet FD per punctum E parallela RS. Esto insuper RF scala solicitationum acceleratricium, ductisque *dl*, *ln*, *no* ac *df* ipsis DL, LN, NQ ac DF parallelis ac indefinite vicinis productaque LD in *a*; probari debet momentum solicitationis acceleratricis FE æquari momento celeritatis acquisitæ ED, seu $EF. Ee = ED. ad$, posita constructione supra exposita. Fiat $AT = AM$, & VO tertia proportionalis ad GH & NO, adeò ut inde nova log-mica GV exurgat. Log-micæ BN subtangens quælibet æquetur IM vel GB.

Demonstr. I. Esto resistentia in E, quam simplici litera R indicabimus, ut gravitatem per G, esto inquam $G : R = IM^2 : 2AM. MS + MS^2$, seu, quia (constr.) $AM = AT$, ponatur $G : R = IM^2 : TS. MS$, eritque convertendo $G - R : G$, id est, solicitatio acceleratrix in E ad gravitatem, hoc est, $EF : IM = IM^2 - TS. MS : IM^2 = IM. EF : IM^2$, atque adeò $IM. EF = IM^2 - TS. MS = AI^2 - AM^2 - TS. MS = AI^2 - AM^2 - 2. AM. MS - MS^2 = AL^2 - AS^2 = LS^2 = NO^2$, aut (quia NO est media proportionalis inter GH vel IM & VO) $= IM. VO$, atque adeò $EF = VO$.

II. Quia (constr.) $ME = HO - XZ$, & $Me = Ho - Xz$, erit etiam $Ee = Oo - Zz$; propterea si Es ponatur $= Oo$, erit $es = Zz$, ubi Zz est elementum lineæ assumtæ XZ.

III. Propter triangula similia *Llm* & ALS habetur $Ss : rl$ (vel æqualem Ll) $= LS : AL$, & $rl : Qq = rs$ (vel LS) $: QA$; ergo ex æquo $Ss : Qq = LS^2 : AL. AQ = NO^2 : AL. AQ = IM. VO : AI. AQ$. Verùm Qq: elementum log-mi $(QA : PA) = QA$: subtang. log-micæ $IM = QA. VO : IM. VO$, ergo ex æquo Ss : elem. log-mi $(QA : RA) = AQ. VO : AI. AQ = VO : AI$. Et (constr.) element. log-mi $(QA : PA) : Zz = AI : AM$, ergo denuo ex æquo $Ss : Zz = VO : AM$. Atque adeò $FE. es$ (num. I. & II. hujus) $= VO. Zz = AM. Ss$.

IV. Rursus $EF. Es$ (seu $VO. Oo$) $= NO. Np$ per §. 491. num. III. Et $NO. Np = LS. Lm$ (§. 493.) $= AS. Ss$, hinc, quia (num. III. hujus) $FE. es = AM. Ss$, erit $FE. Es - FE. es = AS. Ss - AM. Ss$, hoc est, $FE. Ee = MS. Ss$. Id est, *momentum solicitationis acceleratricis* EF *est æquale momento celeritatis acquisitæ* MS.

V. Quoniam supra (num. III. hujus) invenimus $VO. Zz = AM.$

Ss, erit $Zz:AM=Ss:VO=da:FE$ (§. 485.) $=tEe$; adeoque omnia tEe, hoc est, tempus casus perpendicularis per spatium ME, quod tempus designavimus per tME, = omnibus Zz, quibus tota XZ componitur, divisis per AM, seu $=XZ:AM$. Ergo tempus per spatium ME exponitur per assumtam magnitudinem XZ applicatam ad sinum AM anguli dati BAI. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I.

550. Cum celeritas in E acquisita sit ED vel MS, celeritas terminalis erit MC sinus versus complementi IAC anguli dati BAI, & scala celeritatum MD asymptotam habebit parallelam ipsi $M\alpha$, sed per punctum C transeuntem.

Corollarium II.

551. Spatium, quod grave in vacuo absolveret cadendo eo tempore, quo in aëre spatium ME perlabitur, est ad semissem MI, quæ gravitatem exponit in duplicatâ ratione assumtæ XZ ad datam AM. Nam, quia tempus (§. 151.) descensus in vacuo exponitur radice ex duplo spatio applicato ad magnitudinem, quæ gravitatem uniformem repræsentat, erit, vocando spatium tempore $XZ:AM$ in vacuo percurrendum S, erit inquam $\sqrt{(2S:IM)}=XZ:AM$, seu $2S:IM=S:\frac{1}{2}IM=XZ^2:AM^2$.

Corollarium III.

552. Velocitas, quam mobile in termino E spatii ME in vacuo descripti acquireret, erit ad celeritatem in aëre acquisitam percurso eodem spatio ME, sicut $\sqrt{(2ME.IM)}$ ad MS, id liquet ex §. 150.

Corollarium IV.

553. Celeritas vero in aëre erit ad celeritatem in vacuo mobili acquisitam tempore $XZ:AM$, sicut rec-lum AM.MS ad rec-lum IM.XZ. Nam (§. 551.) in vacuo percurritur spatium $S=IM.XZ^2:2.AM^2$ tempore $XZ:AM$; atqui (§. 150.) est velocitas in termino hujus spatii acquisita $=\sqrt{(2.S.IM)}=\sqrt{(2.IM^2.XZ^2:2.AM^2)}=IM.XZ:AM$; ergo celeritas in aëre est ad celeritatem in vacuo acquisitam,

tam, ficut MS ad IM. XZ : AM, vel ficut rec-lum AMS ad rec-lum IM. XZ.

Corollarium V.

555. Quia recta TA tenacitatem medii & AM dimidium hujus tenacitatis exponit, erit hæc tenacitas ad gravitatem, ficut finus anguli dati BAI ad femiffem finus complementi.

Corollarium VI.

556. Idcirco evanefcente angulo BAI fluidum omni tenacitate carebit, eritque perfecte fluidum, adeò ut redeat cafus propofitionis LXIV, quæ propofitio proinde tantum corollarium eft præfentis. Evanefcent enim eo cafu AM & XZ, adeo ut tunc ME fimpliciter æqualis fiat ipfi HO. Tempus vero per ME, quod in hac propofitione LXVII. eft XZ : AM (conftr.) = log. (QA : PA) : AI, in cafu coincidentiæ ipfarum BA & IM, fiet XZ : AM = log. (QA : BA) : AB = tME; prorfus ut §. 525. num. III. oftenfum.

Scholion I.

557. Propofitio etiam analyfi geometrica fequenti ratione expediri poteft. Pofitis iis, quæ in præparatione ad demonftrationem propofitionis, numero I. erit FE vel VO = NO^2 : IM = LS^2 : IM (vel pofita KC diametro circuli BIC) = KS. SC : IM; unde, quia generaliter effe debet EF. Ee = MS. Ss = ED. ad, erit etiam KS. CS. Ee : IM = MS, Ss, atque adeo Ee : IM = MS. Ss : KS. CS. Sed MS = $\frac{1}{2}$KS − $\frac{1}{2}$KM + $\frac{1}{2}$MC − $\frac{1}{2}$SC, quo valore fubrogato reperietur Ee : IM = $\frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{\frac{1}{2}KM.Ss + \frac{1}{2}CM.Ss}{KS.CS} = \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM.Ss}{KS.CS}$; nam KM − CM = 2. AM. Atqui $\frac{AM.Ss}{KS.CS} = \frac{AM}{AC} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}\right)$ ergo Ee : IM = $\frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM}{AC} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}\right)$. Verum $\frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS}$ = elem. log-mi ex $\sqrt{\left(\frac{CM}{CS} : \frac{KS}{KM}\right)}$ = elem. log. $\sqrt{\left(\frac{CM.KM}{CS.KS}\right)}$ = elem. log. $\sqrt{\left(\frac{IM^2}{LS^2}\right)}$ = elem. log. (GH : NO) in log-mica, cujus fubtangens eft unitas.

Et $\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}$ = elem. log-mi ex $\sqrt{\left(\frac{KS}{KM} : \frac{CM}{CS}\right)}$ = elem. log. $\sqrt{\left(\frac{KS}{CS} : \frac{KM}{CM}\right)}$.

Sed quia SL & MI sunt mediæ proportionales inter KS & CS, atque inter KM & CM, erit $KS:CS = LS^2:SC^2 = QA^2:AC^2$, & $KM:CM = IM^2:MC^2 = PA^2:AC^2$, atque adeò $\frac{KS}{CS}:\frac{KM}{CM} = \frac{QA^2}{AC^2}:\frac{PA^2}{AC^2} = \frac{QA^2}{PA^2}$; ac propterea erit $\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} =$ elem. log. $(\frac{QA}{PA})$ etiam in log-mica, cujus subtangens est æqualis unitati. Hinc $\frac{AM}{AC}(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}) = \frac{AM}{AC}$ in elem. log. $(QA:PA)$; ac proinde habebitur etiam $Ee:IM$ $(= \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM}{AC}(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS})) =$ elem. log. $(GH:NO) - \frac{AM}{AC}$ elem. log. $(QA:PA)$ ergo $\int Ee:IM = ME:IM =$ log. $(GH:NO) - \frac{AM}{AC}$ log. $(QA:PA)$, vel ducendo omnia in IM, erit $ME = IM.$ log. $(GH:NO) - \frac{AM.IM}{AC}$ log. $(QA:PA)$. At verò IM. log. $(GH:NO)$ juxta §. 492. $= HO$, quandoquidem log. $(GH:NO)$ primùm sumebatur in log-mica, cujus subtangens erat unitas; sic etiam IM. log. $(QA:PA)$ sumenda est in log-mica BN, quia ejus subtangens est IM. In constructione propositionis erat $XZ:$ log. $(QA:PA) = AM:AC$, & quia log. $(QA:PA)$ jam sumitur in log-mica, cujus subtangens est IM, quæ antea erat unitas, erit proinde hoc casu $XZ = \frac{AM.IM}{AC}$. log. $(QA:PA)$, atque adeo $ME = HO - XZ$ ut supra (§. 549.)

Similiter pro expressione temporis casûs ex altitudine ME invenietur $XZ:AM$, ut in jam citato loco. Quæ omnia analytice erant invenienda.

Scholion II.

558. Eadem methodo solvi potest casus, quo mobile dâta velocitâte, majore tamen terminali, perpendiculariter deorsum projicitur in aëre resistente juxta præsentem resistentiarum hypothesin. Nam, si celeritas projectionis terminali minor sit, problema jam solutum continetur in propositione postrema; absque eo, ut alia solutione opus sit; sin verò, ut nunc supponemus, celeritas projectionis major sit quam terminalis, nonnihil alia inde prodibit constructio, quam nunc adducam omissa demonstratione, quam industriæ

Lecto-

Lectoris ex præcedentibus eliciendam relinquo. Esto KO linea indefinitæ longitudinis, cui perpendicularis insistat IME ad partes α indefinita, in hac perpendiculari portio IM exponat gravitatem uniformem, & AM = AT semissem tenacitatis medii, ductaque AI factisque AC = AK = AI, centro A & latere transverso KC descripta sit hyperbola æquilatera CLP, in qua, si MO accipiatur pro celeritate initiali projectionis, & MS pro velocitate mobili post aliquod tempus residua, agantur ordinatæ OP & SL hyperbolæ occurrentes in P & L, per quæ puncta ducantur denique ex K rectæ KP, KLQ. Spatium ME, in cujus termino E mobili relinquitur celeritas MS vel ED, erit = log. (PO : LS) − $\frac{AM}{AC}$. log. (PO : QO), & tempus per spatium ME = log. (PO : LS) : IM. Omnes hi logarithmi sunt ex log-mica, cujus subtangens est æqualis IM. Ex hac constructione jam satis apparet, scalam celeritatum ODα asymptotam habere Cα, atque adeò mobilis celeritatem quidem continuò decrescere, nunquam verò ad celeritatem MC reduci posse. Fig. 130

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA.

559. *Si gravitas exponatur per secantem alicujus arcus dati, & corpus grave verticaliter in altum projiciatur in aëre præsentis resistentiæ hypotheseos, ac celeritate, quæ exponitur excessu tangentis arcus cujusdam variabilis supra tangentem dati arcus; assumaturque magnitudo quædam, quæ sit ad differentiam arcuum variabilis & dati, ut rec-lum ex secante & tangente dati arcus ad quadratum radii.*

Erit 1°. Spatium, *quod mobile, ascendendo quousque potest, conficiet, ut log-us rationis, quam secans arcus variabilis habet ad secantem dati arcus, dempta magnitudine assumta.*

2°. Tempus, *quo mobile hanc altitudinem absolvet, erit ut magnitudo assumta applicata ad tangentem dati arcus.*

Sint ABKC quadrans circuli, BIL hyperbola æquilatera ex centro A & semilatere AB descripta. Exponat IM seu AW secans dati arcus Bα gravitatem uniformem, ac mobile ex E in altum projici intelligatur celeritate ED vel WQ, quæ est differentia tangentium BQ, BW arcuum variabilis BK & dati Bα. Descriptaque circa axem AT log-mica BGN, cujus subtangens sit GH vel IM; agantur IG, LN parallelæ AS, ac per puncta G, N, &c. transeant ordinatæ log-micæ GH & NO; in NO producta sit OV tertia pro- Fig. 131

 por-

portionalis ad GH & NO, & per omnia puncta V transibit nova log-mica GV, cujus subtangens dimidia erit subtangentis prioris log-micæ GN. Accipiatur deinde XZ, quæ sit ad arcum wK, ut rec-lum IMA ad quadratum radii AB, quibus positis dico fore I. ME vel potius EM = HO − XZ, & temp. per EM = XZ : AM.

Demonstr. Ductis lineis *dl*, *ln*, *no* prioribus cognonimis DL, LN, NO ad distantias indefinite parvas parallelis, fiatque ut supra (§. 549. num. I.) AT = AM, & resistentia aëris in E ut TS. MS.

I. Eritque adeò resist. : grav. = TS. MS : IM², & componendo R + G, seu resistentia totalis EF : IM, seu G = IM² + TS. MS : IM² (seu quia AM² + TS. MS = AS², seu TS. MS = AS² − AM²) = AS² + IM² − AM² : IM² = AS² + QS² : IM² = LS² : IM² = NO² : GH² (aut quia VO, NO & GH sunt in continua ratione) = VO : IM vel GH, habemus ergo EF : IM = VO : IM atque adeò EF = VO.

II. Ex constructione est EM = HO − XZ, & *e*M = H*o* − X*z*, adeoque E*e* = O*o* − Z*z*, unde, si *ee* fuerit = O*o*, & *e*E = Z*z*, erit omninò E*e* = O*o* − Z*z*. Jam (§. 165.) Q*q* : K*k* = AQ² : AK² = LS² : AB² = NO² : AB² = VO. GH : BA², & (constr.) K*k* : Z*z* = AB² : GH. AM, ergo ex æquo Q*q* : Z*z* = VO. GH : GH. AM = VO : AM (num. I. hujus) = EF : AM. Adeoque EF. Z*z* = EF. *e*E = AM. Q*q* = AM. S*s*.

III. Est verò etiam (§. 491. num. III.) VO. O*o* (= EF. *ee*) = NO. N*p* = LS. L*m* (§. 493.) = AS. S*s*. Adeoque EF. E*e* (= EF. *ee*. − EF. *e*E) = AS. S*s* − AM. S*s* = MS. S*s*. Hoc est, momentum resistentiæ totalis EF æquatur momento celeritatis MS.

IV. Numerus secundus hujus demonstrationis præbet, S*s* : EF (num. III. hujus) = E*e* : MS = Z*z* : AM; atqui, ut toties jam dictum S*s* : EF = E*e* : MS = *t*E*e*; ergo *t*E*e* = Z*z* : AM, & omnia *t*E*e* = omnibus Z*z* : AM seu = XZ : AM. Hoc est, tempus ascensionis in spatio EM, est XZ : AM, exponitur ergo per magnitudinem assumtam applicatam ad tangentem anguli BAW. Quæ omnia erant demonstranda.

COROLLARIUM I.

560. Altitudo, ad quam grave in altum projectum pertingere potest, eodem tempore, quo in aëre altitudinem EM absolvet, erit iterum ad semissem IM, quæ gravitatem exponit in duplicata ratione assumtæ XZ ad datam AM. Celeritas verò projectionis in vacuo est ad celeritatem projectionis in aëre, sicut IM. XZ ad AM. MS.

De-

Demonstratio continetur in corollariis II. & IV. propositionis præcedentis.

Corollarium II.

561. Evanescente AM vel AT, atque adeò coincidentibus rectis IM, BA & GH, redibit iterum casus propositionis LXV. adeò ut omnia, quæ in propositione illa exhibita sunt, tantum corollaria sint præsentis.

Ut brevitati consulerem omisi perplura corollaria, quæ ex hac propositione adhuc elici potuissent, tum etiam calculum arithmeticum, quo ope tabularum sinuum tangentium & log-morum, celeritates, spatia percursa, & tempora lationis determinari potuissent. Intelligens Lector omnia sua sponte supplebit. Sed, priusquam ad contemplationem motuum curvilineorum in mediis resistentibus me conferam, forte haud abs re fuerit, si calculo algebraico regulas generales tradidero pro motibus rectilineis in mediis densitate variantibus.

Caput XVIII.

Methodus inveniendi symptomata motuum corporum in mediis utlibet resistentibus, atque densitate pro libitu variantibus.

In præcedentibus capitibus celebriores resistentiarum aëris hypotheses excussimus, & quinam motus, iisdem hypothesibus positis, nasci debeant, definivimus, supponentes tamen medium resistens ejusdem ubique densitatis esse. Quia verò densitates subinde variare possunt, canones motuum etiam exhibendi sunt pro ejusmodi mediis densitate variantibus, quod in hoc capite respectu motuum rectilineorum præstabimus, de curvilineis in sequentibus duobus capitibus acturi.

Propositio LXIX. Lemma.

562. *Exhibens nonnullas elementorum logarithmicorum proprietates; scilicet*, 1°. *Elementum log-micum* positivum, *est elementum log-mi rationis majoris inæqualitatis, quam* magnitudo quæcunque variabilis *habet ad suam* minimam magnitudinem.

Elementum vero log-micum privativum *est elementum log-mi rationis majoris itidem inæqualitatis, quam* maxima magnitudo alicujus variabilis *habet ad hanc* variabilem.

2°. Multiplum *quodcunque vel* submultiplum *elementi cujuscunque magnitudinis variabilis applicatum ad ipsam magnitudinem, cujus est elementum, est elementum log-mi rationis* multiplicatæ *vel* submultiplicatæ *rationis, quam variabilis magnitudo habet ad summi minimam magnitudinem, aut quam maxima magnitudinis variabilis habet ad ipsam variabilem, prout elementum log-micum positivum aut privativum fuerit.*

Fig. 133. Esto 1°. quantitas variabilis u, ejusque *minima* magnitudo a, elementum log-micum $+du:u$ erit elementum log-mi rationis $(u:a)$. Sin verò magnitudo u, cum *maxima* est, sit $=a$; erit $-du:u=$ elem. rationis $(a:u)$. 2°. Iisdem positis, si habeatur $mdu:u$ erit hoc elementum log-mi rationis $(u:a)$ multiplicatæ juxta m, id est, $mdu:u=$ elem. rationis $(u^m:a^m)$ ubi m significat quemlibet numerum integrum vel fractum, rationalem aut irrationalem, &c. & $-mdu:u=$ elem. rationis $(a^m:u^m)$. in log-mica, cujus subtangens est unitas.

Sit IAE log-mica circa axem MF, cujus subtangens DO æquetur unitati 1, sintque CD magnitudo variabilis ac continue crescens ejusque *minima* magnitudo AB, ordinata verò variabilis GH sit magnitudo continue decrescens, ejusque *maxima* etiam AB; ponantur cd & gh ordinatæ ipsis CD & GH indefinite propinquæ, ductisque Ck, $g\gamma$, axi MF parallelis, erunt $c\kappa$ incrementum ipsius CD adeoque $c\kappa$ erit positivum; ipsum verò $G\gamma$ erit decrementum ordinatæ GH, atque adeò privativum. Hisce positis,

Fig. 133. I. Quia (§. 491.) $+c\kappa:CD=Dd:OD$ (aut quia subtangens OD æquivalet unitati) $=Dd$, & quia Dd est elementum ipsius BD seu log-mi (CD:AB), erit omninò $c\kappa:CD=$ elem. log-mi rationis (CD:AB) hoc est $+du:u=$ elem. log-mi rat. $(u:a)$, positis AB, a; CD, u & $c\kappa$, du.

Eodem argumento probatur esse $-G\gamma:GH=$ elem. log-mi rationis AB:GH, hoc est $-du:u$, $=$ elem. log. $(a:u)$ seu log-mi (AB:GH), vocatis nunc GH, u; ac $G\gamma$, du existente AB, etiamnunc a.

II. Ostendendum, esse $m.c\kappa:CD=$ elemento log-mi $(CD^m:AB^m)$. Sit enim BD:BF $=1:m$, atque adeò BF $=m$:BD, adeo ut excitata in F ordinata FE, ex natura log-micæ sit $CD^m:AB^m=EF:AB$. Verum $m.c\kappa:CD=m.Dd:DO$, & omn. $m.c\kappa:CD=$ omnibus $m.Dd:$ DO

$DO = m.BD^{m}:DO$ (seu constr.) $BF:DO$ (vel si DO æquivalet unitati) $= BF =$ log. $(EF:AB) =$ log. $(CD^{m}:AB^{m})$. Adeoque $mdu:u$, $=$ elem. log. $(u^{m}:a^{m})$.

Nec dissimili ratione evincitur, quod, facta $BM = m.BH$ erectaque ordinata MI, futurum sit, $-m.Gy:GH =$ elem. log-mi $(AB:IM) =$ elem. log. $(AB^{m}:GH^{m})$ seu, quod idem est, $-mdu:u =$ elemento log-mi $(a^{m}:u^{m})$. Quæ duo erant demonstranda.

PROPOSITIO LXX. Problema.

563. *Exhibere canonem generalem motuum rectilineorum ex primitive uniformibus derivatorum, quibus corpora in aëre densitatis variabilis, & juxta quamlibet legem resistente, ferantur.*

Positis iis, quæ ad propositionem LV. hujus Libri Secundi dicta sunt, vocetur spatium NE in linea deferenti percursum x, tempus, quo absolvitur t, celeritas mobili residua DB post effluxum hoc tempus u; adeoque celeritas DE mobilis in linea deferenti hoc tempore acquisita erit $a-u$, si, quod supponimus, a significet velocitatem mobilis initialem AN, quâ scilicet linea deferens æquabili motu (secundùm hypothesin) in aëre progreditur. Spatium absolutum, quod mobile tempore memorato t, in aëre transmittit S. Solicitatio acceleratrix, in quolibet lineæ deferentis puncto E, seu recta EF resistentiam aëris generaliter indicans R; ac denique densitas aëris Δ. Hisce denominationibus factis, paragraphi 489. & 488. sequentes præbent formulas: I. $Rdx = udu - adu$. II. $t = \int -du:R$. III. & $S = at - x$. Quæ erant exhibendæ. Fig. 119.

Exemplum.

564. Sit generaliter $R = (abu^{m} + cu^{m+1}).\Delta:a^{m+1}$, ubi a, b, c sunt magnitudines constantes, & m quilibet numerus rationalis vel surdus. Formula prima generalis, reductionibus factis, dat $\Delta dx = (a^{m+1}udu - a^{m+2}du):abu^{m} + cu^{m+1}$. Ex qua liquet abscissas x inveniri per quadraturas duarum curvarum.

565. Si $m = 1$, fiet $R = (abu + cuu).\Delta:aa$; & $\Delta dx = (aaudu - a^{3}du):(abu + cuu)$.

566. Igitur, si præterea $c = 0$, erit $R = bu\Delta:a$, hoc est, resistentiæ aëris erunt in composita ratione densitatum & velocitatum mobilis actualium, alteraque æquatio §. 565, mutabitur in $\Delta dx = adu:b, -$

aadu:

$-aadu:bu$. Atqui (§. 88.) summa omnium $adu:b=(au-aa):b$, & $\int -aadu:bu$ (§. 562.) $=\frac{aa}{b}$ log. $(a:u)$ in log-mica, cujus subtangens 1, vel $=\frac{a}{b}$ log. $(a:u)$ in log-mica, cujus subtangens est a. Propterea $\int \Delta dx = \frac{a}{b}$ log. $(a:u)-(aa-au):b$. Hinc, si $\Delta = 1$, & $b=a$, erit $\int \Delta dx = x =$ log. $(a:u)-a+u$. Atque adeò, si in fig. 119. AN = AK = $a=b$, BD = IH = u, & NE = x, erit CG = CN = $a-u$, & CH = log. $(a:u)$ = log. (AN : IK), ergo x, seu NE = CH − CG = GH, prorsus ut constructio propositionis LVIII. habet.

567. Si in æquationibus superioribus (§. 565.) $b=0$, habebitur $R=cuu\Delta:aa$, id est, resistentiæ aëris sunt in composita ratione densitatum & duplicatæ velocitatum mobilis, & $\Delta dx = aaudu - a^3du: cuu, = aadu:cu, - a^3du:cuu$. At verò (§. 562.) est $\int -aadu:cu = \frac{a}{c}$. log. $(a:u)$ in log-mica, cujus subtang. $=a$, & $\int -a^3du:cuu$ (§. 88.) $=(a^3-aau):cu$. Ergo $\int \Delta dx = a^3 - aau:cu; -\frac{a}{c}$. log. $(a:u)$; vel factis $\Delta = 1$, & $a=c$; fiet $x=aa-au:u, -$log. $(a:u)$. Hinc, si in fig. 125. AM = AT = a, BD = IH = u, & ME = x, erit, propter hyperbolam NHK, $(aa-au):u$ = CH, & log. $(a:u)$ = log. (NT : IH) = CG, cum NGK (constr.) sit log-mica, cujus subtangens = NT = a; adeoque ME = CH − CG = GH, iterum ut habet constructio propositionis LXIII.

568. Tandem, si æquatio ipsa paragraphi 565. $\Delta dx = aaudu - a^3du : abu + cuu$ construenda sit, dividatur numeratoris membrum $-a^3du$ per membrum abu denominatoris, reductisque reducendis, erit $\Delta dx = (\frac{aa}{b}+\frac{aa}{c}).\ du:(\frac{ab}{c}+u) - \frac{aa}{b}du:u$. Et horum integralia (§. 562.) invenientur, scilicet $\int \Delta dx =$ log. $(a:u) - \frac{b-c}{c}$. log. $(\frac{ab}{c}+a:\frac{ab}{c}+u)$ in logarithmica, cujus subtangens est $\frac{aa}{b}$. Jam, in figura 129. propositionis LXVI. si fiat PW : MP = OM : IM, & PV : MP = AM : IM, ac dicantur PW = b, PV = c, & AM = a, = OI; indeterminatæ QM = OG = u, ac ME = x. Invenieturque $\frac{aa}{b}$ = IM . AM² : OM . MP (constr.) = RC. Nam (§. 541. num. 1.) RC : AM = IM .
AM :

AM : OM. MP, atqui propter (conftr.) PW : MP = OM : IM, atque adeo OM. MP = IM. PW, ergo RC : AM (= IM. AM : OM. MP) = IM. AM : IM. PW = AM : PW, ac proinde RC = AM² : PW = $aa : b$, ut dicebatur. Item $\frac{b+c}{c} = \frac{IM}{AM}$, & $\frac{ab}{c}$ = OM, adeoque $\frac{ab}{c} + a$ = IM, & $\frac{ab}{c} + u$ = GM; hinc $\int \Delta dx$ = log. (AM : QM) − $\frac{IM}{AM}$. log. (IM : GM), atque adeò exiftente $\Delta = 1$, x = ME = log. (AM : QM) − $\frac{IM}{AM}$ log. (IM : GM) prorfus ut habet conftructio recenfitæ propofitionis LXVI.

569. Pro inventione temporis confulenda eft fecunda formula generalis (§. 563.) feu $t = -\int du : R$, vel $dt = -du : R$, vel fubftituendo ex §. 565. valorem ipfius R erit $\Delta dt = -aadu : abu + cuu = -adu : bu; + \frac{acdu}{b} : ab + cu = -adu : bu, + \frac{a}{b} du : \frac{ab}{c} + u$. hinc $\int \Delta dt = \frac{1}{a}$. log. $(a : u) - \frac{1}{a}$ log. $(\frac{ab}{c} + a : \frac{ab}{c} + u) = \frac{1}{AM}$ log. (AM : QM) − $\frac{1}{AM}$. log. (IM : GM) = (MC − LN) : AM; prorfus ut in præmemorata propofitione LXVI. jam oftenfum, ubi tamen Δ eft 1, atque adeo $\int \Delta dt = t$.

Atque hæc pauca exempla particularia ad illuftrationem formularum generalium fufficiant.

PROPOSITIO LXXI. PROBLEMA.

570. *Exhibere generales formulas pro defcenfu & afcenfu gravium rectilineo & horizonti perpendiculari in aëre denfitatis variabilis & fecundum quamcunque legem refiftente.*

Retentis fymbolis fupra (§. §. 484, 485.) jam adhibitis : propofitio LIV. nobis fuppeditat formulas pro utroque cafu defcenfus afcenfusque gravium; fcilicet, I. $x = \int udu : g \mp r$. & II. $t = \int du : g \mp r$. Ubi fignum fuperius refpicit defcenfum & inferius defcenfum corporum. In hifce formulis g fignificat gravitatem, r refiftentiam medii, u velocitates mobili acquifitas vel refiduas, & x fpatia à quiete defcendendo percurfa, vel complementa fpatiorum afcenfu jam actu confectorum ad maximam altitudinem A, quam gravia certa quadam velocitate initiali afcendentia percurrere valent, ac denique t denotant tempora defcenfus in fpatiis x, vel quibus complementa præmemorata ad maximam altitudinem defcribi poffunt. Idcirco fpatia

$t = \frac{1}{b}\log.\surd(b+y:b-y) - \frac{1}{b}\log.\surd(b+f:b-f) = XZ:f = XZ:AM$.
Iterum ut in citata propositione asseritur.

576. Pro ascensu gravium faciunt formulæ paragraphi 571. cum signis inferioribus, unde si iterum Δ sit $=1$, erit $x = \int aaudu : aag + abu + cuu$ (vel, si nunc fiat $aag = chh + cff$, item $2cf = ab$, & $f+u$ æquale y) $= \int(\frac{aa}{c}ydy - \frac{aaf}{c}dy) : hh + yy$. Atqui $\int\frac{aa}{c}ydy : hh + yy$ (§. 562.) $= \text{Log}.\surd(hh+yy:hh+ff)$, quia ydy est dimidium elementum denominatoris $hh+yy$, & $hh+ff$ est minima omnium $hh+yy$, cum f sit minima omnium $y = f+y$. Hic log-us sumitur in log-mica, cujus subtangens est $\frac{aa}{c}$.

Altera pars æquationis, seu $\int\frac{aaf}{c}dy : hh+yy = \frac{aaf}{chh}.\int hhdy : hh+yy$. Atqui (§. 166.) est $hhdy : hh+yy =$ elemento arcus circularis, cujus radius h, & tangens y, quod elementum dicatur $d\omega$, atque adeò arcus ipse ω; unde $\int hhdy : hh+yy = \omega$, ergo $\int\frac{aaf}{c}dy : hh+yy = \frac{aaf}{chh}.\omega$. Ergo utrumque integrale, ut decet, conjungendo, habetur $x = \int aaudu : aag + bau + cuu = \int(\frac{aa}{c}ydy - \frac{aaf}{c}dy) : hh+yy = \log.\surd(hh+yy:hh+ff) - \frac{aaf\omega}{chh}$.

577. Altera æquatio tempus respiciens est $t = \int aadu : aag + abu + cuu = \int\frac{aa}{c}dy : hh+yy$ (§. 166.) $= \frac{aa}{chh}.\omega$. Positis iis, quæ in periodo paragraphi proxime antecedentis ultimo.

578. Etiam hæ postremæ determinationes cum propositione LXVIII. probe conspirant; nam si, ut supra (§. 574.) $a=g=c$,
Fig. 132. atque adeò $2f=b$, erit $aa = hh+ff$. Unde, si dicantur $AW = IM = a$, $AM = f = \frac{1}{2}TM = \frac{1}{2}b$, erit $WM = BA = h$, adeoque $\surd(hh+ff) = a = MI$, & quia iterum $AS = f+u = y$, existente $MS = u$; erit $LS = \surd(hh+yy)$ adeòque $\log.\surd(hh+yy:hh+ff) = \log.(LS:IM) = \log.(NO:GH) = HO$. Cum log-micæ subtangens $\frac{aa}{c}$ sit $= a$, existente (secundùm hypothesin) $c = a$.

Et quia $AS = BQ = y$, & $AB = h$, erit arcus $BK = \omega$, atque adeò

$\frac{aaf}{chh}$.

$\frac{aaf}{cbb}u = \frac{af}{bb}\omega = \frac{WM.AM}{IM^2}$ in BK, ſed in propoſitione LXVIII. §. 559. eſt XZ : BK = WM. AM : IM² ergo $\frac{af\omega}{bb} = XZ$; ac proinde x (= log. $\sqrt{(bb+yy:bb+ff)} - \frac{aaf\omega}{cbb}$) = HO − XZ. ut in memorata propoſitione dictum.

$t = \frac{aa}{cbb}u = \frac{a\omega}{bb}$, erit = XZ : AM, pariter ut in dicta propoſitione oſtenſum.

SCHOLION.

579. Plura alia exempla ad illuſtrationem canonum generalium non affero, ac multa alia ſilentio prætereo, quæ ex ſoluto exemplo potuiſſent elici. Id tamen minime videtur ſubticendum, quod denſitates medii varie modificando effici poſſit, ut gravia, juxta quamlibet accelerationis retardationisque legem, poſſint deſcendere vel aſcendere in lineis horizonti perpendicularibus. Galilæus olim primus demonſtravit, celeritates gravi in vacuo cadenti acquiſitas eſſe in ſubduplicata ratione ſpatiorum, quod etiam in antecedentibus (§. 150.) oſtenſum eſt, ſed ex principiis à Galilæanis diverſis. Hæc accelerationis lex ſolis corporibus in vacuo cadentibus convenire hactenus credebatur, ſed, ut mox probabitur, perperam, cum etiam in aëre reſiſtente juxta hanc eandem accelerationis legem deſcendere poſſint gravia, modò aëris denſitas certa quadam ratione ubique varietur.

580. Ut res generaliter tradatur, ſit nunc $r = (a^{m+2} + abu^m + cu^{m+1}).\Delta : a^{m+2}$, adeo ut formula prima §. 570. $x = \int udu : g \mp r$, vel differentiando $(g \mp r).dx = udu$, nunc futura ſit $(a^{m+2}g \mp a^{m+2}\Delta \mp abu^m\Delta \mp cu^{m+1}\Delta).dx = a^{m+2}udu$, fiat $a^{m+2}g \mp a^{m+2}\Delta \mp abu^m\Delta \mp cu^{m+1}\Delta = \frac{1}{2}a^{m+2}e$, eritque $\frac{1}{2}a^{m+2}edx = a^{m+2}udu$, vel $edx = 2udu$, ac integrando, $ex = uu$, ſeu $u = e^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, ac $u^m = e^{m:2}x^{m:2}$, nec non, $u^{m+1} = e^{m+1:2}x^{m+1:2}$, qui valores, in æquatione $a^{m+2}g \mp$ &c. $= \frac{1}{2}a^{m+2}e$ ſubſtituti, præbent æquationem $a^{m+2}g \mp a^{m+2}\Delta\, abe^{\frac{1}{2}m}x^{\frac{1}{2}m}\Delta \mp ce^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}}\Delta = \frac{1}{2}a^{m+2}e$. Quæ æquatio relationem inter denſitates aëris & ſpatia percurſa, ſeu inter indeterminatas Δ & x, declarat, ad id, ut grave in

hoc aëre eadem accelerationis lege feratur ac in vacuo; etenim hæc accelerationis norma exhibetur æquatione $uu = ex$, vel $u = \sqrt{ex}$. Jam, cum e sit quantitas constans liquet celeritates acquisitas (u) esse ut ($\sqrt{x}$) id est, in subduplicata ratione spatiorum percursorum. Ad hoc ne quidem necesse est, ut gravitas (g) sit constans seu uniformis, res etiamnum obtinebit, dummodo g datæ sint per x^n & constantes.

Non immorabimur particularibus exemplis illorum casuum, quibus aër gravibus resistit in ratione composita densitatum & velocitatum, vel in composita ratione ex densitatum ratione & duplicata celeritatum, vel etiam juxta resistentiæ legem, quæ ex utraque memoratarum participat, ad hæc enim duntaxat in æquatione ponendus est exponens $m = 1$, & $c = 0$ primo, vel $b = 0$, secundo, aut vero utramque b, c, &c. retinendo tertio casu, inde tot resultabunt diversæ æquationes, quot hi diversi casus exigunt.

CAPUT XIX.

De descensu & ascensu gravium in lineis quibuscunque curvis, posita medii resistentia quadratis celeritatum proportionali.

581. GRavia, quæ in vacuo feruntur atque in lineis curvis incedunt, in quolibet curvæ puncto, quam accelerato motu perlabuntur, eam celeritatem acquisivisse censentur, quam acquisivissent, si via brevissima à linea horizontali per initium descensus in curva ducta, in datum curvæ punctum, id est, juxta lineam rectam horizontali perpendicularem, cecidissent, ut in primo Libro §. 142. id generaliter ostensum. Sed res aliter se habet cum corporibus, quæ in aëre moventur; eorum enim celeritates aliter, quam per quadraturas & rectificationes curvarum exhiberi nequeunt, idque in sola hypothesi, qua resistentiæ aëris quadratis celeritatum mobilis proportionantur, ut quidem ex sequentibus id elucescet.

PROPOSITIO LXXII.

582. *Si, extensa tota curva, quam grave descensu suo & subsequente ascensu describit in lineam rectam, in singulis hujus rectæ punctis per-*

pen-

pendiculares excitentur proportionales resistentiis aëris, quas mobile in homologis curvæ punctis subit. Area curvilinea, quæ omnes ejusmodi perpendiculares continet, æquabitur rectangulo, à recta, quæ gravitatem uniformem exponit, in differentiam abscissarum arcuum descensu & ascensu descriptorum.

Esto ADB curva descensu mobilis & BEC ascensu descripta, curvæ hujus BEC abscissa est BH, illius verò BG, adeoque GH erit differentia abscissarum. Extensa deinde tota curva ABC in lineam rectam ABC, atque in singulis hujus rectæ punctis D, erectæ sint perpendiculares DT exponentes resistentiam medii in homologis curvæ punctis B, formantesque figuram curvilineam ATRC, quam æquari ostendam rec-lo βB in GH, supponendo rectam βB exponere gravitatem uniformem. Fig. 134.

In eadem DT producta sumatur, ubi DN, quæ solicitationem tangentialem gravitatis in curvæ puncto D ex centrali derivatam exponet ND — TD excessus solicitationis tangentialis gravitatis supra resistentiam aëris, solicitationem acceleratricem mobilis in curva ADB descendentis. Jam momentum hujus solicitationis acceleratricis, hoc est, (ND — TD.) D*d*, vel ND. D*d* — TD. D*d*, hoc est, elementum areæ AMND — elem. areæ ATD (§.§. 132, 484.) æquatur momento celeritatis mobili in curvæ puncto D acquisitæ, seu elemento dimidii quadrati ex dicta celeritate acquisita; unde, cum in A omnia à nihilo incipiant, & omnia momenta solicitationis acceleratricis æquentur omnibus momentis celeritatis, erit area AMND — area ATD = dimid. quadr. velocitatis in D, & area AMNSB — area ATRB = dimid. quadrat. velocitatis acquisitæ in B.

Si porro mobile in curva BEC ascendit, resistentia totalis, in quolibet ejus puncto E (§. 481.) erit NE + TE, & momentum hujus resistentiæ totalis seu (NE + TE). *e*E = NE. *e*E + TE. *e*E = elem. areæ MNEC — elem. areæ CTE æquatur momento celeritatis decrescentis mobilique in curvæ puncto E residuæ, seu elemento dimidii quadrati ex celeritate in E; unde, quia delata NE in MC, omnia in nihilum desinunt, erit area MNEC + area CTE = dimid. quadr. ex veloc. in E, adeoque etiam MNSBC + CTRB = dimid. quadrato ex celeritate initiali in B. Atqui hæc celeritas initialis in B, eadem est cum velocitate acquisita in B, post descensum mobilis in curva ADB; ergo AMNSB — ATRBA (= dimid. quadrato celeritatis in B) = CMNSBC + CTRBC, adeoque tota figura resistentiarum ATRCA = AMNSB — CMNSB.

At-

Atqui area AMNSB æquatur perpetuo rectangulo sub βB recta, quæ gravitatem uniformem exponit, & abscissa BG curvæ ADB descensu mobilis descriptæ, cum quodlibet elementum areæ NDd æquetur rec-lo βB. Ff, seu momento gravitatis centralis βB. Eodem argumento sequitur fore aream CMNSBC = βB. BH, ergo AMNSB − CMNSB, quod areæ ATRCA æquari ostensum, æquabitur etiam rec-lo βB. GH. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

583. Si resistentiæ aëris sint ut celeritates mobilis acquisitæ, erit AMND = areæ ATD + ½TD². Nam TD (secundùm hypothesin) est ut celeritas in D acquisita, adeoque, per præcedentem paragraphum, erit momentum solicitationis acceleratricis, seu ND. Dd + TD. Dd = elem. AMND + elem. ATD, æquale momento celeritatis, seu TD. tθ, quod æquatur elem. ex ½TD². Ergo summando, erit omninò area AMND − area ATD = ½TD², atque adeò AMND = ATD + ½TD². Eodem argumento concludetur esse NECM + ½TE² = CTE.

Corollarium II.

484. Sin verò resistentiæ aëris fuerint in duplicata ratione celeritatum acquisitarum, quæ verior est hypothesis, erit area AMND = AQ. TD + ATD, & area CMNE = AQ. TE − CTE. Ubi AQ est magnitudo data seu constans.

Hoc enim casu celeritatis in D acquisitæ quadratum erit = 2AQ. TD, cum resistentiæ sint ut quadrata celeritatum; & dimidium celeritatis quadratum AQ. TD, hujusque elementum, id est momentum celeritatis acquisitæ in D, reperietur AQ. tθ; unde, quia momentum solicitationis acceleratricis ND − TD æquatur momento celeritatis in D acquisitæ, fiet ND. Dd − TD. Dd = AQ. tθ, & summando, omnia ND. Dd, seu area AMND − omn. TD. Dd, seu area ATD = omnibus AQ. tθ, id est, rec-lo AQ. TD; adeoque AMND = ATD + AQ. TD. Eadem ferme ratione probatur esse CMNE = AQ. TE − CTE.

Co-

Corollarium III.

585. Si resistentia est uniformis, curva ARC abit in lineam rectam ipsi AC parallelam, eritque hoc casu $AMNSB - CMNSB = \beta B.GH = AC.BR$, ac per consequens resistentia medii BR uniformis ad gravitatem uniformem se habebit, ut GH differentia abscissarum BG & BH arcuum curvæ AB & BC descensu & subsequente ascensu descriptorum ad AC aggregatum ipsorum arcuum ABC.

Corollarium IV.

586. Si curva ABC est cyclois ordinaria, cujus axis vel diameter circuli generatoris est *b*B & basis *ac*; semissis differentiæ quadratorum ex arcubus cycloidis ADB & BEC descensu & ascensu descriptis æquabitur areæ ATRTC.

Nam, quia βB exponit gravitatem uniformem juxta ea, quæ §. 179. dicta sunt, hæc βB erit dupla diametri bB; hinc $\beta B.BG = 2.bB.BG = 2.BK^2$ (vel, quia arcus cycloidis ADB æquat duplam subtensam BK) $= \frac{1}{2}.AB^2$, & $\beta B.BH = 2.bB.BH = \frac{1}{2}.BC^2$, ergo $\beta B.GH = \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}BC^2 = ATRTC$. Hoc est, rectangulum ex semisse differentiæ arcuum ADB & BEC descensu & subsequente ascensu in cycloide descriptorum, in aggregatum ABC eorundem arcuum, æquat aream ATRTC.

Hoc corollarium coincidit cum propositione XXX. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Illustr. Newtoni, cujus tamen demonstrationem ex aliis principiis hausit, ut demonstrationem illam inspicienti cuilibet patebit.

Corollarium V.

587. Ergo, in casu corollarii III. hujus, resistentia uniformis in cycloide erit ad gravitatem, id est, RB ad βB in fig. 134. sicut dimidia differentia arcuum ADB & BEC ad βB, seu hemicycloidem *a*DB, vel, sicut differentia dictorum arcuum ad integram cycloidem, *a*B*c*. Est enim (§. 585.) $BR : \beta B = GH : AC = \beta B.GH : \beta B.AC$ (§. 586.) $= (\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}BC).AC : \beta B.AC = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}BC : \beta B$ vel *a*DB, $= AB - BC$: cycloid. *a*B*c*.

Scholion.

588. In aliis resistentiæ hypothesibus res evadit paullo altioris indaginis, quam in corollariis III. & V. hujus; cum in omni alia hypothesi curva ATRTC adhuc invenienda sit. Illustris Newtonus statim post propositionem in corollario IV. hujus citatam asserit, hanc curvam ARC ad ellipsin proxime accedere, si, curva ABC existente cycloide, resistentiæ aëris fuerint celeritatibus proportionales, vel ad parabolam, si resistentiæ fuerint in duplicata proportione celeritatum. Sed, accurate & mathematice rem sumendo, prænominata ATRTC non est ellipsis in prima, nec parabola in altera resistentiæ hypothesi; sed, quantum conjicere licet, utroque casu erit transcendens. Etenim, si resistentiæ sunt ut celeritates acquisitæ, nondum constat, quâ ratione curva ARC construi debeat, ne quidem concessis quadraturis figurarum curvilinearum. Pro altera vero hypothesi ac naturæ magis consentaneâ nominatæ curvæ constructio haberi potest per quadraturas & rectificationes curvarum. Ex propositione XXIX. laudatissimi Newtoni Lib. II. ejusmodi constructio peti potest in casu particulari, quo curva descensus ABC est cyclois. Hoc loco vero generalem constructionem adducam pro quacunque curva ABC, idque gemino modo.

PROPOSITIO LXXIII. Theorema.

589. *Per quodlibet in linea* AM *producta punctum* V, *descripta logarithmica* VXY *subtangentem habente æqualem datæ lineæ* AQ, *&* *asymptotam* CQ, *ac protensa* ND *usque ad occursum* P *cum log-mica* VX; *si omnia elementa* PD. DN. Dd *alicujus solidi duobus planis* MAV *&* NDP *interjecti erecto scilicet ad angulos rectos plano* MABS *super plano* VAB, *æqualia fuerint parallelepipedo* AQ^2. DO, *sub quadrato subtangentis log-micæ & ordinata* DO *cujusdam curvæ* AOAC; *homologa ordinata* DT *scalæ resistentiarum* ARC *erit quarta proportionalis ad ordinatas* PD, DO *&* AQ *subtangentem log-micæ* VX.

I. Esto linea *pn* alteri PN indefinite vicina, atque per puncta T, O & P curvarum AT, AO & VP ductæ sint lineolæ Tθ, Oω, & Pπ; ac denique, sit DT quarta proportionalis ad PD, DO & AQ, vel, quod eodem recidit, rec-lum PD. DT = AQ. DO, & *pd*. *dt* = AQ.*do*, id est, PD.*dt* + *p*π. *dt* = PD.DT + PD.$\tau\theta$ + *dt*.*p*π = PD.DT + PD.

$PD.t\theta + DT.p\pi = AQ.DO + AQ.\omega o$; subductis igitur PD.DT & AQ.DO, remanebit $PD.t\theta + DT.p\pi = AQ.\omega a$, ductisque singulis partibus in AQ, fiet $AQ.PD.t\theta + DT.AQ.p\pi = AQ^2.o\omega$.

II. Atqui $AQ^2.\omega o = PD.DN.Dd$, cum omnia PD.DN.Dd sint (constr.) $= AQ^2.DO$, item (§. 491. num. 11.) $AQ.p\pi$ æquatur PD.Dd, vel $AQ.DT.p\pi = DT.PD.Dd$; ergo, subrogatis his valoribus in postrema æqualitate num. 1. hujus, invenietur $PD.AQ.t\theta + PD.DT.Dd = PD.DN.Dd$, &, applicando singula membra ad PD, $AQ.t\theta + DT.Dd = DN.Dd$. Adeoque omnia AQ.tθ, id est, AQ.TD + omn. DT.Dd, id est, area ATD = omnibus DN.Dd, seu areæ AMND. Est proinde AQ.TD + ATD = AMND; atque adeò (§. 584.) curva ATR est scala resistentiarum mobilis in curva ADB cadentis. Fig. 134.

III. Eodem modo probatur $PE.t\theta - ET.P\pi$ æquari $AQ.o\omega$ atque inde, ut ante, inferetur esse $AQ.TE - CTE = CMNE$, ac per consequens (§. 584.) curvam CTR scalam resistentiarum aëris mobili in curva BEC ascendenti oppositarum. Propterea curva ATRTC est scala resistentiarum aëris, cum corpus in curva quacunque ADB descendit, atque dehinc in altera BEC ascendit: Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

590. Celeritas mobilis, in quolibet curvæ puncto D acquisita, est $\sqrt{}(2AQ.DT)$, atque velocitas eidem mobili per arcum curvæ BE ascendenti residua in E erit $\sqrt{}(2AQ.ET)$ quorum ratio ex superioribus (§. 484.) satis constat.

COROLLARIUM II.

591. Omnia parallelepipeda PD.DN.Dd continentur in solido quodam MAVN, cujus singulæ sectiones plano BAV rectæ planoque MAV parallelæ, sunt rectangula PDN. Planum enim AMSB super plano VAB erectum concipiendum est.

COROLLARIUM III.

592. Si linea descensus mobilis ABC est cyclois ordinaria, linea MNS erit recta transiens per B, angulumque MBA, semirecto æqualem continens cum linea AB. Propterea solidum prædictum MAVN erit truncus log-micus super basi ADPV interjectus plano VAB

 alii-

aliique per BX transeunti, atque angulo semirecto ad planum VAB inclinato.

Fig. 134. Nam, quia subtensa BL arcus circularis BL parallela est tangenti cycloidis in puncto D, erit gravitas ad solicitationem ejus tangentialem in cycloidis puncto D, sicut bB ad BL $= \beta B : 2.BL = \beta B$: arcum cycl. BD, atqui βB exponit gravitatem, ergo BD exponet solicitationem gravitatis tangentialem in D, atque adeo in fig. 135. BD quæ eadem est cum arcu cycloidis BD in fig. 134. in rectam extenso æquabitur ordinatæ ND, & AB = AM; hinc linea MNS est recta, seu figura AMNS erit triangulum rectangulum isosceles, atque adeò solidum MAVNP truncus resectus ex prismate recto super basi ADPV à plano secante per BX ducto, atque angulo semirecto ad planum baseos BAV inclinato.

COROLLARIUM IV.

593. Unde, si Ω sit centrum gravitatis quadrilinei log-mici ADPV, demissa perpendiculari $\Omega\Delta$ ad AB, solidum ex quadrilineo prædicto ADPV in $B\Delta$ æquabitur trunco MAVNP, atque adeo (constr.) parallelepipedo; atqui ducta per VZ parallela AC, quadrilineum AVPD [illegible]perietur = AQ. PZ, ergo solidum MAVNP = AQ. PZ. $B\Delta$ (constr.) = AQ². DO; & PZ. $B\Delta$ = AQ. DO (num. 1. §. 589.) = PD. DT. Est proinde resistentia DT in quolibet cycloidis puncto = PZ. $B\Delta$: PD.

SCHOLION.

594. Quia ad obtinendam expressionem ordinatarum DT etiam expressio requiritur ipsarum $B\Delta$, seu distantiarum centri gravitatis quadrilineorum ADPV, idcirco duobus verbis indicabo, qua ratione investigari debeant.

In log-mica est DP. Dd = AQ. $p\pi$, & AD. DP. Dd = AQ. AD. $p\pi$ (vel ducta PW parallela VZ) = AQ. PW. $p\pi$, ergo omnia AD. DP. Dd = omnibus AQ. PW. $p\pi$ id est = AQ in trilineum VPW. Atqui (§. 44.) est quadrilineum ADVP in $A\Delta$ = omnibus AD. DP. Dd; ac per consequens = AQ. VPW. Verum ADPV = AQ. PZ, & VPW = AD. DP − AQ. PZ; ergo AQ. PZ. $A\Delta$ = AQ. AD. DP − AQ². PZ. seu PZ. $A\Delta$ = AD. DP − AQ. PZ; hinc PZ. $B\Delta$ = AB. PZ − AD. DP + AQ. PZ = BQ. PZ − AD. DP (vel ponendo DP − AV loco ipsius PZ) = BQ. DP − BQ. AV − AD. DP.

Hinc,

Hinc, ut saltem in transitu dicam, centrum gravitatis areæ log-micæ ultra ordinatam DP versus Q in infinitum excurrentis intervallo subtangentis AQ distat à sua prima ordinata DP.

Corollarium V.

595. Cum DT (§. 593.) sit PZ. Bα : PD, substituto invento valore ipsius Bα, reperietur DT = (BQ. DP − AD. DP − BQ. AV) : PD = BQ − AD, − BQ. AV : DP. Adeoque solicitatio acceleratrix mobilis in cycloidis puncto D, hoc est, DN seu DB, − DT erit BD − BQ + AD, + BQ. AV : DP = AV. BQ : DP, − AQ.

Scholion II.

596. Supra jam indicavi (§. 588.) resistentias in cycloide jam pridem definitas esse à Cel. Newtono Prop. XXIX. Lib. II. Princ. Phil. Nat. idque præstitit per spatia hyperbolica, expressionibus à nostris diversissimis quoad apparentiam, sed revera cum nostris conspirantibus; sed, quia assertionis meæ veritas non statim in oculos incurrit, consensum inter Newtonianam atque meam determinationem resistentiarum, paucis ostendere libet. In figura 136. afferam Newtoni schema ipsiusmet literis, ast confusionis vitandæ gratia minusculis insignitum, atque propria ejus verba nulla mutatione facta, nisi quod hoc loco, quæ cycloidem respiciunt, nostræ figuræ 134. applicaturus sim, quæ ille indicat circa figuram propos. XXV. citati libri.

„ 597. Sit ABC arcus oscillatione integra descriptus, sitque B infimum cycloidis punctum, & B*a* semissis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis, & quæratur resistentia corporis in loco quovis D. Secetur recta infinita *oq*, in punctis *o*, *c*, *p*, *q*, ea lege, ut (si erigantur perpendicula *ok*, *ct*, *pi*, *qe*, centroque *o*, & asymptotis *ok*, *oq* describatur hyperbola *tige* secans perpendicula *ct*, *pi*, *qe* in *t*, *i* & *e*, & per punctum *i* agatur *kf* parallela asymptoto *oq* occurrens asymptoto *ok* in *k*, & perpendiculis *ct* & *qe* in *l* & *f*) fuerit area hyperbolica *pieq* ad aream hyperbolicam *pitc*, ut arcus AB, descensu corporis descriptus, ad arcum BC ascensu descriptum, & area *ief* ad aream *ilt* ut *oq* ad *oc*. Dein perpendiculo *mn* abscindatur area hyperbolica *pinm*, quæ sit ad aream hyperbolicam *pieq*, ut arcus *a*B ad arcum AB descensu descriptum. Et si perpendiculo *rg* abscindatur area hyperbolica *pigr*, quæ sit

Fig. 134. (margin, beside line 1 of §597)
Fig. 136. (margin, beside "Secetur recta infinita")

„ ad aream *pieq*, ut arcus quilibet BD ad arcum AB descensu to-
„ to descriptum; erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut
„ area $\frac{or}{oq}$ *ief*—*igh* ad aream *pienm*. Hactenus Newtonus.

598. Consulantur omnino tres figuræ 134, 135 & 136. &, quia (constr.) spatia hyperbolica *pinm*, *pieq*, *pigr* & *rgeq* arcubus cycloidis *a*B, AB, DB & AD proportionalia sunt, & logarithmicæ ordinatæ DP, & AV abscissis hyperbolæ *oq* & *or* respective, adeo ut habeatur AV : DP = *or* : *oq*. & AB : AQ = *pieq* : *piko* & componendo BQ : AQ = *okieq* : *okip*, erit BQ—AD ut *okieq*—*rgeq* seu *okigr* & AV. BQ : DP ut $\frac{or}{oq}$ *okieq*, ergo BQ—AD—$\frac{AV.BQ}{DP}$ ut *okigr*—$\frac{or}{oq}$ *okieq*, atqui *okigr* = *orhk*—*igh*, & $\frac{or}{oq}$ *okieq* = (*oq*.*pi*—*ief*).$\frac{or}{oq}$ = *or*.*pi*—$\frac{or}{oq}$ *ief*, ergo *okigr*.—$\frac{or}{oq}$ *okieq* = *or*.*pi*—*igh*—*or*.*pi*+$\frac{or}{oq}$ *ief* = $\frac{or}{oq}$ *ief*—*igh*, atque adeo BQ—AD—$\frac{AV.BQ}{DP}$ est, ut $\frac{or}{oq}$ *ief*—*igh*, & BQ—AD—$\frac{AV.BQ}{DP}$ ad βB seu *d*B, id est, resistentia aëris ad gravitatem ut $\frac{or}{oq}$ *ief*—*igh* ad aream *pienm*. Quod erat demonstrandum.

Hoc ergo modo Newtoniana determinatio reducitur ad simpliciorem meris lineis à nobis exhibitam, & vice versa nostra facile reducitur sub formam Newtonianæ; propterea etsi ambæ plurimum inter se differre prima fronte videntur, inter se jam egregie conspirare apparent. Resistentiæ aëris in cycloide, imò in qualibet data curva, aliter adhuc determinari possunt, vel potius celeritates acquisitæ in quolibet curvæ puncto concessa quadratura cujusdam spatii curvilinei ope theorematis sequentis.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA.

Fig. 137. 599. *Inter asymptotas* AZ, AF *angulum rectum continentes describatur hyperbola quadratica* MO, *cujus scilicet quælibet ordinata* MK *sit ut quadratum abscissæ* AK *inversè, ordinataque* FO *gravitatem uniformem exponat, ductaque per* F *log-mica* FSQ, *cujus subtangens æquet rectam* AF, *atque in hac log-micâ ordinata* ID, *cujus abscissa* AD *æqualis sit arcui curvæ* aB *descensu mobilis descripto* AD; *agantur* IM *parallela* AD *&* MZ *parallela* AF, *atque in* MZ *producta infra axem* AT, *ca-*

capiatur ZN *æqualis* GF *in fig.* 134. *eruntque puncta* N *in linea quadam curva* YN. *Esto porrò rec-lum ex ordinata* AF *aliaque* QR *in log-mica, æquale duplo areæ* AYNP, *& in medio* T *intervalli* AR *ordinatarum* AF *&* RQ, *ducta ordinata* TS, *atque ad distantiam* TX *æqualem* AD, *alia ordinata* XV; *hæc* XV *exponet celeritatem acquisitam mobili in curvæ descensus* ADB *puncto* D *post lapsum per ejus arcum* AD. Fig. 134.

Ductis ordinatis aliisve lineis, videlicet *pn*, *nm*, *mi*, *id*, *st*, *ux*, & *qr* lineis cognominis PN, NM, &c. parallelis & indefinite vicinis, item per puncta Q, V & S lineolis Qe, Vv, & $S\sigma$ axi AR parallelis.

I. Constructio, quæ præbet $2.AYNP = AF.QR$ & $2.AYnp = AF.qr$, etiam efficiet $2NP.Pp = AF.qe$ (§. 491. num. II.) $QR.Rr$.

II. Quia (constr:) $AT = TR$ & $At = tr$, erit $Rr = 2.Tt$, atque adeò $ST.Tt : QR.Rr = ST : 2.QR$ (seu, propter continue proportionales AF, TS & RQ ob æqualia harum ordinatarum log-micæ intervalla AT & TR, erit etiam) $= AF : 2.TS = AF.s\sigma : 2.ST.s\sigma = ST.Tt : 2ST.s\sigma$; ergo $2.ST.\sigma s = QR.Rr$ (num. I. hujus) $= 2.NP.Pp$, ergo etiam $ST.s\sigma = NP.Pp$; vel $Pp : s\sigma = ST : NP$.

III. Hyperbola verò MO præbet $AF^2 : AK^2$ (aut, quia ob æqualia intervalla AD & TX ordinatæ AF, ID, seu AK, ST ac VX per naturam log-micæ proportionales sunt) $= ST^2 : VX^2$ $(= MK : OF) = AF.MK : AF.OF$, erit, permutando, $ST^2 : AF.MK = VX^2 : AF.OF$, sed (num. II. hujus) erat $Pp : s\sigma = ST : MK$, vel NP; & log-mica exhibet $s\sigma : Tt = ST : AF$, ergo ex æquo $Pp : Tt = ST^2 : AF.MK = VX^2 : AF.OF$, & $VX^2.Tt = AF.OF.Pp$.

IV. Cum (constr.) sit $AD = TX$, & $Ad = tx = tT + TX - Xx$, erit $Dd = Tt - Xx$, vel $Xx = Tt - Dd$, id est, $VX^2.Xx = VX^2.Tt - VX^2.Dd$; atqui, loco $VX.Xx$ substituendo (§. 491. num. II.) æquale $AF.uv$, locoque $VX^2.Tt$ (num. III. hujus) æquale solidum $AF.OF.Pp$, ac denique faciendo $VX^2 = R.AF$, fiet $AF.VX.uv = AF.OF.Pp - AF.R.Dd$, vel, applicando omnia ad AF, reperietur $VX.uv = OF.Pp - R.Dd$ (seu ponendo $T.Dd$ æquale $OF.Pp$) $= VX.uu = T.Dd - R.Dd = (T - R).Dd$. Jam, quoniam Dd est elementum spatii AD, si $T - R$ sit solicitatio quæcunque acceleratrix, erit momentum hujus solicitationis æquale momento velocitatis acquisitæ in curvæ puncto D, & cum idem solicitationis momentum repertum sit æquale momento ordinatæ XV, sequitur hanc ordinatam exponere celeritatem in D acquisitam. Atqui, quoniam Fig. 134.

(se-

(secundùm hypothesin) T. Dd = OF. Pp, atque OF gravitatem uniformem exponit, & OF. Pp (constr.) OF. Ff sit momentum gravitatis centralis, cui momentum ejusdem tangentialis, seu rec-lum ex hac tangentiali & elemento curvæ Dd (§. 133.) æquatur, perinde ac T. Dd, liquet T esse solicitationem gravitatis tangentialem in curvæ puncto D, &, quia VX, ut jam ostensum, est celeritas acquisita in D quæcunque sit solicitatio acceleratrix T − R, atque AF. R = VX^2; id est, R ut VX^2; & cum resistentia medii (secundùm hypothesin) etiam sit ut quadratum celeritatis acquisitæ, magnitudo R exponet resistentiam aëris in curvæ puncto D, atque adeò T − R detracta scilicet resistentia aëris à solicitatione gravitatis tangentiali, exponit solicitationem acceleratricem mobili descendenti continue applicatam, cui vigore ejusmodi solicitationum acquiritur in D celeritas XV. Quod erat demonstrandum.

600. Si grave in altera curvæ parte BEC, fig. 134. ascendit, curva YN semper magis magisque ad AP accedit, ut ab eadem recedit in casu descensus, constructio vero eadem est utroque casu, hac sola cum differentia, quod in casu descensus hyperbolæ portio OM, quæ est subter ordinatam OF, in constructione illa adhiberi debet, & portio, quæ supra ordinatam OF, in casu ascensus. Quonam vero artificio in præcedentes constructiones inciderim, ex demonstrationis filo facile intelliget perspicax Lector, propterea, ut brevitati consulam, eidem explicando non diutiùs immorabor.

COROLLARIUM.

Fig. 134. 601. Si linea descensus mobilis aDB est iterum cyclois, area AYNP in figura 137. erit quadrabilis ope logarithmorum; nam inspiciendo utramque figuram 137, & 134. erit area AYNP = (AB. YZ + $\frac{1}{2}$AF. YZ − AD. AZ). AF : 4bB. (constr.) = $\frac{1}{4}$AF. QR (seu ex natura log-micæ) = $\frac{1}{4}ST^2$. Verùm, quia, ob æqualia intervalla AD & TX, ordinatæ AF, DI vel AK, ST & VX proportiones sunt, fit $AF^2 : AK^2$ vel (propter hyperbolam OM) = AZ : AY = $ST^2 : VX^2$ = (AB. YZ + $\frac{1}{2}$AF. YZ − AD. AZ). AF : 2bB, ad VX^2, seu (constr.) AF. R. = (AB. YZ + $\frac{1}{2}$AF. YZ − AD. AZ) : 2bB ad R; seu AB. YZ − $\frac{1}{2}$AF. YZ − AD. AZ ad R. 2bB; atque adeò erit resistentia medii, seu R = (AB. YZ − $\frac{1}{2}$AF. YZ − AD. AZ). AY : 2bB. AZ. Quod præcedentibus determinationibus (§. §. 595, 596, & 597.) probe consonum est.

CA-

CAPUT XX.

De motu projectorum in aëre, qui missili in duplicata ratione celeritatum resistit, cum corpus à solicitationibus gravitatis non ad aliquod centrum positione datum, ut hactenus considerari solebant, tendentibus, urgetur, sed secundum directiones lineam quamcunque curvam positione datam contingentes.

IN præcedenti Capite celeritates mobili in curva quacunque cadenti acquisitas, vel ascendenti residuas, assignavimus, cum scilicet à gravitate uniformi recta ad horizontem tendente urgetur in aëre secundum duplicatam proportionem celeritatum resistente. In hoc verò Capite examinandi restant motus projectilium in ejusmodi aëre resistente, sed pro gravitate variante, tam ratione ipsarum gravitatis solicitationum, quam ratione directionum; quas directiones ad nullum determinatum punctum tendere, sed quamcunque lineam curvam contingere supponemus. Ab omnibus, quotquot de viribus centralibus scripserunt, geometris, harum virium centralium, vel ut nos eas vocare solemus, solicitationum gravitatis centralium meta vel centrum positione datum & immutabile, considerari consuevit, veluti id nomen ipsum hisce viribus inditum satis superque declarat. Nos verò rem generalissime pertractaturi, solicitationum illarum centrum in una eademque curva mutabile assumemus, ita quidem, ut mobile in singulis curvæ percurrendæ punctis ad aliud atque aliud centrum solicitationum urgeatur. Hoc modo centra omnia posita erunt in quadam linea curva, quam solicitationum gravitatis directiones contingunt. Problema harum virium, pro centris, quæ dixi, variabilibus, prima fronte difficillimum, si non prorsus intractabile, videtur. Veruntamen, principiis in primo libro jam expositis insistentes, solutionem non minus simplicem quam facilem trademus, ex qua deinceps omnia instar corollariorum deducentur, quæ solicitationes ad unicum tantum centrum directas respiciunt symptomata, aut saltem eorum præcipua.

602. Adeoque, si AMm fit curva, quam projectile M data cum celeritate exiens ex puncto A secundum directionem tangentis AC Fig. 138.

 descri-

describat in aëre secundum rationem duplicatam ipsi resistente, cum scilicet directiones solicitationum gravitatis AB, MN, *mn*, ubique ad diversa puncta seu centra B, N, *n* respiciunt, atque adeo curvam quamcunque BN*n* in præfatis punctis B, N, *n*, &c. contingunt. Solicitationem mobilis M ad punctum N directam deinceps repræsentabimus per MX, in ejus directione MN sumptam, ductaque MR normali ad curvam AM in puncto M, & per X parallela XZ tangenti curvæ MP in dicto curvæ puncto, exponetque XZ (§. 118.) solicitationem gravitatis tangentialem in M.

603. Talis solicitationes gravitatis considerandi modus jam continet sub se casum, quo corpus M in curva AM incedens ad plura
Fig. 139. diversa centra positione data *u*, 2*u*, 3*u*, 4*u*, &c. urgetur solicitationibus M*y*, M2*y*, M3*y*, M4*y*, &c. Nam existente Ω centro gravitatis punctorum *y*, 2*y*, 3*y*, 4*y*, &c. quorum numerus sit *n*, solicitatio ex omnibus lateralibus M*y*, M2*y*, &c. resultans (§. 49.) erit *n*.MΩ, cui æqualem faciamus MX. Hæc MX erit solicitatio gravitatis centralis, quâ mobile in puncto curvæ M afficietur, & centrum, ad quod hæc solicitatio MX dirigitur, erit punctum N, in quo media directio omnium M*y*, M2*y*, M3*y*, M4*y*, &c. curvam quandam N*n* (quam proinde curvam mediarum directionum nominare licet) contingit. Propterea, loco omnium illarum solicitationum lateralium M*y*, M2*y*, &c. unicam illarum mediam solicitationem MX = *n*. MΩ considerare convenit, ut adeò tota res reducatur ad casum articuli præcedentis.

HYPOTHESIS.

604. In hisce autem supponendum, resistentiam aëris tantum exseri in motum corporis M in curva AM incedentis, non verò in gravitatis impressiones juxta directiones MN.

PROPOSITIO LXXV. LEMMA.

605. *Si in hyperbola* TKΘ *inter asymptotas* SB, BΦ, *ductis ordinatis* IK, GH, AD & ST *ad asymptotam* SB, *ad alteram verò* BΦ, *ordinatis* ΔΠ, ΘΦ, & WV; *quadrilineum* ΘΦVW *æquaverit excessum, quo quadrilineum* ΦΘΔΠ *superat duo simul quadrilinea* GHKI & ADTS, *ratio* BV *ad* BΦ *componetur ex tribus rationibus* BΦ *ad* BΠ, IB *ad* GB, & AB *ad* BS. *Hoc est, erit* BV *ad* BΦ, *ut* BΦ.IB.AB, *ad solidum ex* BΠ.GB.BS.

Facta

Facta Bh tertia proportionali ad BΠ & BΦ, erectaque ordinata gh, sit insuper quadrilineum $g\sigma\theta h$ = GHIK, eritque WV$\theta\sigma$ = SADT. Nam, quia $\Theta\Phi$VW = $\Theta\Phi\Pi\Delta$ − GHIK − SADT (constr.) = $\Theta\Phi hg$ − $\theta\sigma gh$ − SADT = $\Theta\Phi\theta\sigma$ − SADT = $\Theta\Phi\theta\sigma$ − WV$\theta\sigma$, erit omninò WV$\theta\sigma$ = SADT.

Atqui ratio BV ad BΦ componitur ex rationibus BV ad Bθ, Bθ ad Bh, & Bh ad BΦ, (seu, quia propter quadrilinea æqualia WV$\theta\sigma$, SADT, BV est ad Bθ, ut BA ad BS, propter $\sigma\theta hg$ = GIKH habetur Bθ : Bh = BI : BG, ac denique propter $\Theta\Phi hg$ = $\Theta\Phi\Pi\Delta$, est Bh : BΦ = BΦ : BΠ) ex rationibus BA ad BS, BI ad BG & BΦ ad BΠ; atque adeò BV : BΦ = BΦ. BI. BA : BΠ. BG. BS. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

606. Sed, si quadrilineum $\Theta\Phi$VW fuerit æquale $\Theta\Phi\Pi\Delta$ − GHKI + ADTS, erit BV : BΦ = BΦ. BI. BS : BΠ. BG. BA. Demonstratio eadem ferme est.

PROPOSITIO LXXVI. Problema.

607. *Si mobile in directione* AC *data cum celeritate ex puncto* A *exiens, & solicitationibus acceleratricibus* MX *secundùm directiones* MN, *curvam quamcunque* BNn *contingentes, citatum, in aëre secundum rationem compositam ex rationibus densitatum medii & duplicatæ velocitatum mobilis resistente, curvam* AMm *describat, definire proportionem celeritatis mobilis in quolibet curvæ puncto* M *acquisitæ ad celeritatem initialem in* A, *ac proportionem solicitationum acceleratricium in iisdem curvæ punctis* M *&* A.

I. Sunto Mm elementum curvæ AM, per cujus elementi terminos transeant tangentes MN, mn curvæ BNn sese intersecantes in puncto o; MP & mp tangentes curvæ AMm in punctis M, m convenientes in c, super quas tangentes demittantur ex punctis N, o & n normales NP, oa (tangentem interiorem cb secans in α) ob & np, ac denique MR, mR perpendiculares curvæ AM in punctis M & m, adeò ut, coëuntibus his punctis, hæ perpendiculares curvæ futuræ sint radius circuli osculatoris curvi in puncto M vel m, seu circuli æque curvi in his punctis. Sint porrò curvæ MF, $m\mu f$ evolutæ arcuum BN, BNn; rectæ verò BΦ & BV in linea indefinita

BQ ipsi BA normali abscissæ exponant velocitates mobilis in punctis A & M, & Vu elementum ipsius BV; extensaque curva AM in rectam BQ, erectaque QY perpendiculari ad BQ, ac densitati aëris in omni curvæ AM termino proportionali, orietur figura, vel potius curva βY, quam scalam densitatum aëris deinceps vocabo. Denique assumtis D & R pro nominibus densitatis & resistentiæ aëris, ponatur ubique R ut $D.BV^2$, vel, ad complenda homogenea, adscito AB.AD rectangulo dato, sit ubique $AB.AD.R = D.BV^2$. Ac fiant $BI = MN$, $Bi = mn$, $B\phi = BC$, $B\pi = NP$ & $B\tau = np$, ducanturque ordinatæ IK, ik, $\Phi\Theta$, $\Pi\Delta$ ac $\pi\delta$ in hyperbola intra asymptotas AB, BQ per punctum D descripta. Hisce omnibus præparatis sequitur

II. *Analysis Geometrica.* Cum (§. 602.) ZX solicitatio sit tangentialis ex centrali MX derivata, erit (§. 481.) $ZX - R$ solicitatio acceleratrix mobilis in puncto M curvæ AM descensu descriptæ, & $ZX + R$ resistentia totalis mobilis ex puncto M super curva MA ascendentis: sed seposito tantisper casu ascensionis, examinabimus alterum, qui est descensus. Erit igitur (§. 484.) momentum solicitationis acceleratricis $ZX - R$ æquale momento celeritatis crescentis BV, id est $(ZX - R).Mm = BV.Vu = ZX.Mm - R.Mm$, vel ducendo omnia in datum rec-lum BAD, habetur $BA.AD.ZX.Mm - AB.AD.R.Mm = AB.AD.BV.Vu$, & quia (secundùm hypothesin) $AB.AD.R = D.BV^2$, ac $BAD = BVW$, erit $AB.AD.ZX.Mm - D.BV^2.Mm = BV^2.WV.Vu$. Et, quia (§. 604.) aër gravitatis solicitationibus non resistit, habetur (§. 154.) $BV^2 = MZ.MR$; idcircò, applicando æqualitatem præcedentem ad hanc postremam, proveniet $AB.AD.ZX.Mm : MZ.MR, - QY.Qq = VW.Vu$. Cum (num. 1. hujus) $QY = D$ & $Qq = Mm$.

III. At, quia triangula similia Moa, BZX præbent $ZX : MZ = Ma : ao$, & sectores similes caa ac RMm; $Mm : MR = aa : ac$ (& quia, coeuntibus punctis M, m, ratio Ma ad ca in rationem æqualitatis desinit) $= aa : Ma$, erit ex æquo $ZX.Mm : MZ.RM = aa : ao = da : PN$ (constr.) $= aa : B\pi$; ergo $AB.AD.ZX.Mm : MZ.MR = AB.AD.aa : B\pi$, hoc est (propter omnia rectangula in hyperbola æqualia) $= \Pi\Delta.aa$.

IV. Ducantur porrò per punctum o lineola $o1$ parallela tangenti MP, & per punctum n lineolæ 34, $n2$ parallelæ respective tangentibus MP, mp, & coeuntibus punctis n, o, N, lineolæ evanescentes O2, 14 & N3 ac arculus Nn in rationes æqualitatis desinent,

per-

perinde ac $o\alpha$ & ob. Quo posito, quia $NP - np$ (constr.) $= B\Pi - B\pi = \Pi\pi = PN - ao, + ao - \alpha o + bo$ (seu αo ipsi æqualis) $- pn = N1 + a\alpha + 14$ (vel 02) $= a\alpha + N4$, erit $a\alpha = \Pi\pi - N4$, & $\Pi\Delta . a\alpha = \Pi\Delta . \Pi\pi - \Pi\Delta . N4$.

Triangula verò similia $N43$ & NPM, præbent $N4 : NP = N3 : NM = Nn : NM = Ii - Ff : NM$. Nam $mn + nN = MN - M\mu = BI - Ff$; ergo $nN = BI - Bi - Ff = Ii - Ff$. Hinc, quia $BI . IK = B\Pi . \Pi\Delta$, erit $B\Pi . \Pi\Delta . N4 : B\Pi$, vel $NP = \Pi\Delta . N4 = (BI . IK . Ii - BI . IK . Ff) : BI, = IK . Ii - IK . Ff$ (seu ductis per singula hyperbolæ puncta K, k parallelis KE, ke rectæ AB, lineis FE, fe eidem AB normalibus, occurrentes in punctis E, e alicujus curvæ DE) $= IK . Ii - FE . Ef$, erit $\Pi\Delta . a\alpha (= \Pi\Delta . \Pi\pi - \Pi\Delta . N4) = \Pi\Delta . \Pi\pi - IK . Ii + FE . Ff$.

V. Hinc cum supra (num. II. hujus) reperta sit $VW . Vu = AB . AD . ZX . Mm : MZ . MR - QY . Qq$ (num. III. hujus) $= \Pi\Delta . a\alpha - QY . Qq$; erit (num. IV.) $WV . Vu = \Pi\Delta . \Pi\pi - IK . Ii + FE . Ff - QY . Qq$, & sic ubique; ergo omnia $WV . Vu =$ omn. $\Pi\Delta . \Pi\pi -$ omn. $IK . Ii +$ omn. $FE . Ff -$ omn. $QY . Qq$. Hoc est, $\Theta\Phi VW = \Theta\Phi\Pi\Delta - AIKD + AFED - B\beta YQ$; nam, si punctum M est in A, omnes hæ areæ simul à nihilo incipient. Areis AFED & $B\beta YQ$ capiantur æqualia quadrilinea hyperbolica AGHD & ASTD, eritque $\Theta\Phi VW = \Theta\Phi\Pi\Delta - GIKH - ASTD$, ac per consequens (§. 60[illegible]) $BV : B\Phi = B\Phi . BI . BA : B\Pi . GB . SB$ (vel restitutis BC, MN, NP loco $B\Phi$, BI, & $B\Pi$) $= BC . MN . AB : NP . GB . SB$. Jam, quia $BC : AB =$ sinus anguli BAC : radium vel sinum totum, & $NP : MN = \int NMP :$ rad., erit $BV : B\Phi$, id est, celeritas mobilis in M ad celeritatem initialem in A, sicut AB^2 in $\int BAC$ ad $GB . SB$ in $\int NMP$. Unde, si vA significet velocitatem in A, erit BV, seu celeritas in M, quam etiam exprimam per $vM = AB^2 . vA . \int BAC : GB . SB . \int NMP$.

VI. Porrò, quia $MX . MR : MZ . MR$, seu $MX : MZ =$ rad. : $\int MXZ$ vel $\int NMP$, & (§. 154.) $MZ . MR = vM^2$; erit ex æquo $MX . MR : vM^2 =$ rad. : $\int NMP$; atqui (num. V.) $vM^2 : vA^2 = AB^4 . \int BAC^2 : GB^2 . SB^2 . \int NMP^2$; & (ponendo AR & A pro radio osculi, & solicitatione centrali initio motus in curvæ puncto A) $vA^2 : A . AR = \int BAC :$ rad. Ergo ex æquo & per compositionem rationum $MX . MR : A . AR = AB^4 . \int \overline{BAC}^3 : SB^2 . GB^2 . \int \overline{NMP}^3$. Assumatur quædam magnitudo M, talis, ut $M : MR$ sit ad $A . AR$, sicut $AB^4 . \int \overline{BAC}^3$ ad $GB^2 . \int \overline{NMP}^3$, seu : $M = A . AR . AB^2 . \int BAC^3 : MR .$

$GB^2.\int \overline{NMP^3}$, & reperietur $MX:M = AB^2:SB^2$, id est, solicitatio centralis in aëre resistente est in quolibet curvæ puncto M, $= M.AB^2:SB^2$, cum scilicet mobile ex A profectum curvæ arcum AM descendendo, seu ad curvam *n*NB accedendo describit.

VII. Sin verò ascendat super arcum MA ex M versus A, id est à curva *n*NB recedendo, invenietur hoc casu $\Theta\Phi VW = \Theta\Phi\Pi\Delta - GIKH + ASTD$, atque adeò, vi paragraphi 606, & eorum quæ in præcedentibus numeris hujus ostensa sunt, $MX = M.SB^2:AB^2$. Quæ omnia erant invenienda.

608. Notandum autem literam $\int$ in hac propositione esse notam characteristicam sinuum illorum angulorum, quibus præfigitur, & $\int \overline{BAC^3}$, $\int \overline{NMP^3}$ significare cubos ex sinubus angulorum BAC, NMP, & reliqua signa, scilicet A, denotare solicitationem gravitatis centralem in curvæ puncto initiali A, & AR (quam in figura confusionis vitandæ gratia non expressi) radium circuli osculatoris, seu ejusdem curvitatis cum curva in eodem puncto A. Ratio verò SB ad AB, in qua SB semper major ponitur quam AB, eadem est cum ratione abscissarum alicujus quadrilinei hyperbolici ASTD (constr.) æqualis areæ BβYQ scalæ densitatum aëris. Propterea termini ipsi rationis SB ad AB, ad nullam determinatam magnitudinem restricti sunt, sed, pro re nata, modo majores minoresve accipi possunt, dummodo ratio inter hos terminos ea maneat, quæ est inter abscissas cujuscunque trapezii hyperbolici prædictæ areæ in scala densitatum aëris æqualis.

COROLLARIUM I.

609. Adeoque in medio nullius densitatis, id est, in vacuo evanescent areæ BβYQ vel ASTD, atque adeò ratio SB ad AB mutabitur in rationem æqualitatis, fietque $vM:vA = AB.\int BAC:GB.\int NMP$. Et MX ($= M.AB^2:SB^2$, vel $M.SB^2:AB^2$) $= M$. Idcirco M, cujus valor jam (§. 607. num. VI.) determinatus est, exponit generalissime solicitationem gravitatis centralem in vacuo.

COROLLARIUM II.

Fig. 139. 610. Si mobile M solicitationibus quotcunque lateralibus, My, $M2y$, $M3y$, $M4y$, &c. ad diversa centra ω, 2ω, 3ω, 4ω, &c. simul agentibus urgetur; earum media directio MN, quæ (§. 603. & 49.) per

per centrum gravitatis Ω omnium punctorum y, $2y$, $3y$, $4y$, &c. transibit, continget aliquam curvam NN, quam proinde curvam mediarum directionum solicitationum lateralium vocare licet. Idcirco, quia (§. 603.) $MX = n. M\Omega$ (§. 607. num. VI. & VII.) $= M. AB^2 : SB^2$ vel $= M. SB^2 : AB^2$; hoc in casu ascensionis, illud verò in casu descensus mobilis in curva AM, erit $M\Omega : M = AB^2 : n. SB^2$ in primo casu, qui est descensus, vel $M\Omega : M = SB^2 : n. AB^2$. Adeoque circumstantia problematis, solicitationum accelerarricium vel retardatricium ad plura diversa centra simul agentium, continetur jam in problemate harum solicitationum, si earum meta seu centrum in quolibet mobili describendæ curvæ puncto variabile est.

Corollarium III.

611. Quia (§. 607. num. I.) assumsimus $AB. AD. R = D. BV^2$, & (§. 154.) $BV^2 = MZ. MR$, erit $R : MZ = D. MR : AB. AD$. Atqui $MZ : MX = NP : NM = \int NMP$: rad. ergo ex æquo resist. R, ad solicit. centr. $MX = D. MR. \int NMP : AB. AD$. radium.

Item quia $MX : ZX = MN : MP =$ rad. : $\int MNP$, erit iterum ex æquo resistentia R ad solicitat. gravitatis tangentialem $ZX = D. MR. \int NMP : AB. AD. \int MNP = D. MR$. tang. $NMP : AB. AD$. radium.

Corollarium IV.

612. Si solicitationes gravitatis MX diriguntur ad centrum positione datum B, qui est casus harum solicitationum seu virium centripetarum, qualis hactenus geometris considerari consuevit, tota curva NB contrahetur in punctum B, ejusque evolutæ MF, $m\mu f$ abibunt in arcus circulares concentricos ex centro B descriptos, propterea singulæ NM, BI & BF, immò & GB, æquales fient, Fig. 138. & 140. coincidente tunc curva DE respectivo arcui hyperbolico DK. Adeoque formula numeri VI. §. 607. etiam mutabitur in $M = A. AR. AB^2. \int BAC^2 : MR. MN^2. \int NMP^3 = A. AR. BC^2. MN : AB. MR. NP^3 = BC^2. vA^2. MN : MR. NP^3$, quia quadratum velocitatis in A, seu $vA^2 = A. BC. AR : AB$. Hæc postrema formula pro solicitationibus centralibus in vacuo, & uno duntaxat existente centro solicitationum, egregie conspirat cum eâ, quam supra (§. 156.) jam demonstratam dedi, simulque retuli citato loco Clarissimos Geometras Joh. Bernoullium, Abr. Moyvræum, & Guid. Grandum in similem canonem incidisse,

Sed

sed alia via. In figura enim 37, lineæ $N\alpha$, AI, DR, DN, αZ, Dq, idem significant ac in figura 138. litteræ A, vA, & lineæ respectivæ BC, NM, MR & NP.

SCHOLION I.

Fig. 140. 613. Sit nunc curva AM spiralis logarithmica, in qua solicitationes gravitatis MX ad polum B dirigantur, ita ut puncta N, B unum idemque sint, unde, quia singuli anguli BAC, NMP, æquales sunt, ratio linearum MP, MN & NP ubique data erit. Ponatur densitas aëris in M, ut $h.MP:MN^2$, ubi h quemlibet numerum significat, adeòque erit, propter rationem datam, MP ad MN reciproce, ut MN, distantia mobilis à centro N vel B; positâ itaque $D=h.AB.AD.MP:MN^2$, invenietur $D.Mm=QY.Qq=ST.Ss=h.IK.Ii$, & consequenter $ASTD=h.AIKD$, ac propterea $AB:SB=BI^h:AB^h=MN^h:AB^h$, & $AB^2:SB^2=MN^2:AB^{2h}$.

Porrò, quia singuli anguli BAC, NMP, &c. & per consequens eorum sinus, æquales sunt, & radii osculi AR, MR in A, M distantiis AB, MN proportionales, erit nunc (§. 612.) $M:A\;(=AR.AB^2.\int\overline{BAC^3}:MR.MN^2.\int\overline{NMP^3})=AB^3:MN^3$. Atqui (§. 607. num. VI.) erat $MX:M\;(=AB^2:BS^2)=MN^{2h}:AB^{2h}$; ergo ex æquo $MX:A=MN^{2h-3}:AB^{2h-3}$. Est propterea vis centripeta, id est, solicitatio centralis MX in logarithmica spirali ubique, ut MN^{2h-3}. si corpus descendendo arcum AM describit; & reciproce, ut MN^{2h+3} si ascendendo incedit per M versus A super arcum MA.

Hinc, quia generaliter est (§. 611.) $R:MX=D.MR.\int NMP:AB.AD.rad.$ & D (secundùm hypothesin) $=h.AB.AD.MP:MN^2$; erit $R:MX=h.MR.MP.\int NMP:MN^2.rad.$ (vel, quia NP est ad NM, ut $\int NMP:rad.$ & rec-lum NP: MR æquale MN^2) $=h.MP:MN$, id est, ratio R ad MX erit ubique constans seu data.

Ergo, si $h=\frac{1}{2}$, erit MX reciproce in duplicata ratione distantiæ MN, & resistentia R ad solicitationem centralem MX, sicut $\frac{1}{2}MP$ ad MN.

Sin verò h fuerit $=1-\frac{1}{2}n$, reperietur MX reciproce, ut MN^{n+1}, & $R:MX=(1-\frac{1}{2}n).MP:MN$.

Co-

Corollarium V.

614. Si solicitationes centrales diriguntur ad centrum infinite distans, ut in fig. 141. ita ut directiones AB, MN parallelæ, axique EF curvæ EMA perpendiculares sint, rectæ MN, AB hoc casu infinitæ atque adeò æquales erunt, elisis ergo AB^2, MN^2 ex canone paragraphi 612. habebitur $M : A = AR.\int\overline{BAC^3} : MR.\int\overline{NMP^3}$, vel $M = A.\,AR.\int\overline{BAC^3} : MR.\int\overline{NMP^3}$. Fig. 141.

Sed si directiones solicitationum MX axi EF æquidistantes sunt, reperietur eo casu $M : A = AR.\int\overline{DAa^3} : MR.\int\overline{QMO^3}$, ducta scilicet MO parallela EF.

Et quia (§. 607. num. VI.) generaliter inveniebatur $MX : M = AB^2 : SB^2$ in casu descensus vel $MX : M = SB^2 : AB^2$ in casu ascensus mobilis, habebuntur ipsæ MX utroque casu hujus corollarii, scilicet cum earum directiones axi EF normales, & cum eidem parallelæ sunt.

Corollarium VI.

615. Iisdem positis, & gravitate uniformi, facili negotio invenietur secundùm quam legem densitatem aëris variare oporteat, ut projectile datam curvam in medio resistente describat. Sit enim A gravitas uniformis in aëre resistente, atque inter asymptotas AF, Ff descripta hyperbola TDL quacunque, fiat ubique SF^2 ad AF^2 ut $AR.\int\overline{FAC^3} : MR.\int\overline{NMP^3}$, in casu descensus, vel $AF^2 : SF^2 = AR.\int\overline{FAC^3} : MR.\int\overline{NMP^3}$, eritque ubique $D = \pm ST.\,Ss : Mm$. ubi signum + est pro descensu & − pro ascensione. Demonstratio hujus ex præcedenti corollario facilis est. Fig. 142.

Scholium II.

616. Sit AME quadrans circuli cujus centrum in F vel H, adeoque $AR = MR = MF$, & $AR.\int\overline{FAC^3} : MR.\int\overline{NMP^3} = AF^3 : MG^3$. Ergo $AF^2 : SF^2 = AF^3 : MG^3$, & per consequens $2.\,ASTD = 3.\,AOLD$, vel $2.\,ST.\,Ss = 3.\,OL.\,Oo$, & $D\,(= ST.\,Ss : Mm) = 3OL.\,Oo : 2Mm$, vel (propter triangulorum $Mm\mu$ & MHG similitudinem) $= 3OL.\,GH : 2AF = 3OL.\,OF.\,GH : 2.\,OF.\,AF = 3AF.\,AD.\,GH : 2OF.\,AF = 3AD.\,GH : 2OF = 3AD.$ tang. AFM : 2 rad. Est ergo

 den-

$Ss : SB^3 = V^{b-2} D . Mm : SB^b$, atque adeò $SB^{b-3} . Ss = V^{b-2} D . Mm : AB^2$. Ergo omnia $V^{b-2} D . Mm : AB^2$, id est, $\int V^{b-2} D . Mm : AB^2$, = omnibus $SB^{b-3} . Ss$, id est, $= \frac{1}{b-2} SB^{b-2} - \frac{1}{b-2} AB^{b-2}$; atque adeò hinc elicitur canon $SB = \sqrt[b-2]{(AB^{b-2}, + \overline{b-2} \int V^{b-2} D . Mm : AB^2)}$. Pro descensu corporis in curva AM. Simili modo reperietur $SB = AB^2 : \sqrt[b-2]{(AB^{b-2}, + \overline{2-b} \int V^{b-2} D . Mm : AB^2)}$ pro casu ascensionis, cum mobile incedit ex M versus A.

623. Ut ergo, quæ in solutione hujus problematis sparsim inventa sunt, omnia conjunctim in conspectum producantur, num. V. §. 607, præbet velocitatem in $M = AB . V : SB$ & $SB . V : AB$, hoc in casu ascensionis illud in descensu mobilis, ubi V est (§. 619.) $AB . vA . \int BAC$ applicatum ad $GB . \int NMP$, hoc est, expressio celeritatis mobilis ad punctum curvæ M delati in vacuo. Propterea est celeritas in aëre mobili acquisita in quolibet curvæ puncto M ad celeritatem ejusdem in vacuo in eodem curvæ puncto, ut AB ad SB; & celeritas mobili residua in M à medio resistente ad celeritatem in vacuo, ut SB ad AB, cum in curva ascendit. Et num. VI. §. 607. Est solicitatio centralis in aëre ad solicitationem gravitatis in vacuo mobili versante in utroque casu in quocunque curvæ puncto M, ut AB^2 ad SB^2, cum mobile curvam AM descendendo describit, vel, sicut SB^2 ad AB^2, si ascendendo, eundo per M versus A. Ipsæ vero V & M, scilicet velocitas in vacuo & solicitatio centralis respectu curvæ puncti M, generalissime jam repertæ sunt, scilicet ut paulo ante $V = AB . vA . \int BAC : GB . \int NMP$, & $M = A . AR . AB^2 . \overline{\int BAC}^3 : MR . GB^2 . \overline{\int NMP}^3$, in qua formula GB, concessis figurarum curvilinearum quadraturis, semper dantur. Ipsæ vero SB in paragraphis 620, 621 & 622. etiam generaliter exhibitæ sunt. Ex solutione nostra generalissima innumera alia corollaria potuissent deduci, quæ tamen brevitatis studio suppressi.

CAPUT XXI.

De Motu Navium vento impulsarum.

MOtus Navium, hoc est eorum celeritates, spatia percursa & tempora lationis, eadem methodo & ex iisdem principiis deduci

duci possunt, quibus in præcedentibus capitibus motus corporum in mediis resistentibus definivimus. Est enim venti velo allabentis virtus spectanda instar solicitationis acceleratricis navi continue applicatæ, & aquæ, in quibus navis incedit, instar medii resistentis. Verumtamen motus navium nonnihil difficilius assignantur quam in præcedentibus motus corporum in medio resistenti incedentium, quia præter motus absolutos etiam directiones, tum solicitationum acceleratricium, seu lineæ, secundùm quas vela impressiones venti excipiunt, tum etiam itinera navis permanentia, quæ à figuris navium pendent, primùm determinanda sunt. Quæ tamen omnia, ut dictum, ex principiis hactenus à nobis explicatis derivari queunt.

DEFINITIONES.

I. Iter navis manens A*a* (Gallis *la Route du Vaisseau*) dicatur linea, quam navis BC vento impulsa in mari permanenter describit, absque rotationibus circa se ipsam. Fig. 142.

II. Axis navis esto spina carinæ BAC cui inseritur stereobates mali principis (Gallis *la Quille*).

III. Deviatio navis (Gallis *la Derive*) est recta *a*K, ex quolibet itineris manentis puncto *a* ad axem navis productum CK perpendiculariter demissa.

IV. Angulus deviationis (*l'Angle de la Derive*) est angulus *a*AK, quem iter navis permanens A*a* cum axe navis CB continet versus K.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA.

624. *Si navis* ABC *itinere permanenti* Aa *feratur, media directio* AG *impressionum venti in velo* DAE, *vel in velis, si plura adsint, in directum posita erit cum directione* AO *aquæ resistentis, & secundùm directiones lineæ* Aa *parallelas lateri navis* BDC *clavoque in* C *allabentis.* Fig. 142.

Si neges, sit media directio impressionis venti secundum mediam directionem velariæ DAE recta AF diversa à linea AM, quæ est prolongatio mediæ directionis AO aquæ, navi BDC impingentis, dum incedit itinere A*a*. Exponat AF impressionem venti in hac linea, & AH resistentiam aquæ in directione AO, & demittatur ad OA protractam in M, perpendicularis FG, & in AG sumatur GI = AH. Quibus positis, quia viribus AF æquipollent laterales AG & GF,

& à vi AG auferenda est vis aquæ resistentis AH (constr.) GI, venti efficacia ad navim movendam æquipollebit duabus viribus residuis AI & FG; unde, quia FG nulla contraria vi retunditur, ideo suum effectum edet, propterea vi FG, juxta alteram AI, quæ motum navis accelerat, navis circa se ipsam convertetur secundum ordinem literarum K, F, G, dum ea progressivo motu fertur in recta Aa, ergo hæc linea non est iter navis manens, contra hypothesin.

COROLLARIUM.

625. Adeoque ex media directione impressionum venti in velis innotescere potest media directio aquæ navi resistentis, & vice versa. Et ex aquæ resistentis media directione ope Propos. L. Lib. hujus secundi, invenietur iter navis permanens. Mediæ vero directiones venti vela inflantis obtineri possunt eo fere modo, quo §. 474. ostensum est.

PROPOSITIO LXXVIII. PROBLEMA.

Fig. 142. 626. *Datis directione & celeritate venti velo* DAE *impingentis, atque adeò media directione veli* AM, *definire celeritates navis* BDC *itinere permanente* Aa *in aqua stagnante seu mari late.*

I. Quia (secundùm hypothesin) AM est media directio venti velo DAE impingentis, ejus prolongatio AO (§. 624.) dabit mediam directionem aquæ in directione aA, vel huic parallela navi BDC allabentis, adeo ut, durante motu navis, angulus MAa constanter idem maneat.

Sint ergo ratio Aa : AM, seu sinus compl. anguli MAK ad sin. compl. ang. aAK, ut b ad a; & celeritas venti, juxta mediam directionem AM initio motus, a, celeritas verò navis in termino a cujusvis spatii emensi Aa, u; adeoque $au:b$ exponet celeritatem juxta AM, qua scilicet navis insequentis venti velocitati initiali sese subducit, ut adeò celeritas, quâcum in velum agit, juxta AM eo momento, quo navis in suo itinere velocitatem u, acquisivit, futura sit $a - au:b$; adeoque $(a - au:b)^2$. M exponet impressionem venti in velo secundum AM, ubi M inveniri potest ope §. 474. Aquæ verò resistentis impressio, secundum directionem AO, est Nuu, ubi N per Propos. L. etiam inveniri potest, siinon algebraicè fal-

saltem transcendenter & per approximationes. Propterea est $(a, -au:b)^2.M - N.uu$ solicitatio acceleratrix navis.

II. Esto porrò $(a, -au:b)^2.M, -N.uu = N.SL^2$, ubi SL est ordinata alicujus curvæ CLP sequenti modo inveniendæ, existentibus AM, b; MS, u, Mn ipsi AM perpendiculariter insistens, a. His positis, & quia $a, -au:b = (b-u).a:b = AS.Mn : AM$ erit $(a, -au:b)^2. M = AS^2.Mn^2.M : AM^2 = AS^2.MN^2.N : AM^2 = N.ST^2$, scilicet si MN fuerit ad Mn in subduplicata ratione M ad N, atque ducta sit AN, ita ut triangula AST & AMN similia existant. Hinc, $(a, -au:b)^2.M - Nuu = N.ST^2 - N.SM^2 =$ (secundùm hypothesin) $N.SL^2$, atque adeò $ST^2 - SM^2 = SL^2$. Ducatur MD angulum rectum AMN bisecans, & ex D demittatur DC normalis ad AM, & ob angulum semirectum CMD erunt æquales DC & CM, perinde ac SM & SV, propterea habetur $SL^2 = ST^2 - SM^2 = ST^2 - SV^2$. Atqui divisa qualibet intercepta TV bifariam in R ductaque DR, eaque producta usque ad occursum B cum recta AM producta itidem quantum opus est, & hæc DR etiam per medium O ipsius MN transibit; ac $ST^2 - SV^2$ erit $= 4SR.VR$. Ergo etiam $SL^2 = 4SR.RV$. Verùm propter $SR : MO = SB : MB$, & $RV : OM = CS : CM$ erit per compositionem rationum $SR.RV : MO^2 = 4SR.RV$, id est, $SL^2 : NM^2 = SB.SC : MB.MC = SX^2 : MQ^2$, descripto scilicet super diametro CB semicirculo CQB; habemus ergo $SL^2 : NM^2 = SX^2 : MQ^2$; vel permutando $SL^2 : SX^2 = NM^2 : MQ^2$, seu $SL : SX = NM : MQ$; idcirco ordinatæ quæque homologæ curvæ quæsitæ & semicirculi sunt in data ratione, atque adeò curva CLP est ellipsis, cujus ordinata MP æquatur MN. Fig. 143.

III. Sint nunc Aa spatium certo tempore navi percurrendum, aa elementum illius spatii & $MS = u$ celeritas navi acquisita in termino spatii Aa, Ss velocitatis elementum, & quia (num. 1. hujus) invenimus solicitationem acceleratricem navis esse, ut $N.SL^2$, ponamus eam $= N.SL^2 : N.D$, vel $= SL^2 : D$, ubi D, seu data magnitudo, assumitur ad supplenda homogenea, eritque (§. 484.) momentum solicitationis acceleratricis seu rec-lum $SL^2.aa : D$, ex hac solicitatione $SL^2 : D$ in elementum spatii aa, æquale momento celeritatis acquisitæ MS. Ss seu rec-lo ex hac celeritate MS in suum elementum Ss. Hinc, cum sit $SL^2.aa : D = MS.Ss$ vel $SL^2.aa = D.MS.Ss$, erit $MS.Ss : SL^2 = aa : D$. Est verò etiam $SL^2 : SX^2 = MP^{2}$ vel $NM^2 : MQ^2$, ergo ex æquo $MS.Ss : SX^2 = NM^2.aa : D.MQ^2$.

Et

Et, si AK fiat ubique ad Aa, ut MN^2 ad D. MQ, erit $Kk : aa = NM^2 :$ D. MQ, & $NM^2 : aa =$ D. MQ. Kk, atque MS. $Ss : SX^2 (= NM^2 . aa :$ D. $MQ^2) =$ D. MQ. Kk : D. $MQ^2 = Kk$: MQ. Et, si denique SX ponatur media proportionalis inter MQ & quandam Z, ita ut Z futura sit $= SX^2$: MQ, fiet MS. Ss : Z. MQ (seu SX^2) $= Kk$: MQ; atque adeò Z. $Kk =$ MS. Ss, & problema præcise ad casum propositionis LXVII. hujus secundi Libri reductum est, quandoquidem Z est, ut quadratum ordinatæ SX in circulo, & jam AK consideranda instar spatii mobili transmittendi. Propterea, si juxta præceptum citatæ propositionis rectæ $C\beta$ & $C\delta$ sint tangentes angulorum $CZ\beta$, $CZ\delta$ dimidiorum ipsorum CZX & CZQ, erit (§. 549) AK $=$ log. (MQ : SX) $-$ MZ. log. ($C\delta : C\beta$) : CZ. Et, quia (constr.) AK : $Aa = MN^2$: D. MQ, invenietur $Aa =$ D. MQ. log. (MQ : SX) : $MN^2 -$ D. MQ. MZ. log. ($C\delta : C\beta$) : CZ. MN^2, in logarithmica, cujus subtangens est MQ.

Per secundam partem propositionis ejusdem (§. 549.) erit tempus per spatium AK $=$ log. ($C\delta : C\beta$) : CZ; atqui tAK : $tAa =$ AK : $Aa = MN^2$: D. MQ, ergo tempus per spatium Aa navi transmissum erit D. MQ. log. ($C\delta : C\beta$) : CZ. MN^2. Quæ erant invenienda.

COROLLARIUM I.

627. Quia solicitatio acceleratrix navis est ubique ut SL^2, & quia SL in puncto C nulla est, ipsa MC designabit maximam velocitatem, quam navis acquirere queat. Est vero propter triangula similia ACD & AMN & propter CD $=$ CM; AC : CM (vel DC) $=$ AM : MN $=$ AM$\sqrt{}$N : MN$\sqrt{}$N (aut, quia nM : NM (constr.) $= \sqrt{}$N : $\sqrt{}$M atque adeo rec-lum NM. $\sqrt{}$N æquale nM$\sqrt{}$M) $=$ AM$\sqrt{}$N : nM$\sqrt{}$M, adeoque componendo AM : CM $=$ AM$\sqrt{}$N $+$ nM$\sqrt{}$M : nM$\sqrt{}$M, id est, b : CM $= b\sqrt{}$N $+ a\sqrt{}$M : $a\sqrt{}$M, atque adeò MC $= ab\sqrt{}$M : $a\sqrt{}$M $+ b\sqrt{}$N. Nam (constr.) est AM $= a$, & nM $= b$.

COROLLARIUM II.

628. Si D est finitæ magnitudinis, tempus, quo navi maxima celeritas MC acquiritur, erit infinitum, perinde ac spatium Aa hoc tempore percurrendum, ut id jam alibi (§. 550.) quadantenus est ostensum.

Sed si D est indefinite parva, cum spatium tum etiam tempus, quo

quo id mobile transmittens celeritatem maximam MC acquirit, erunt finitæ magnitudinis.

Scholion.

629. Quoniam navi plerunque tempore finito maxima celeritas acquiritur, ideo in hisce casibus magnitudo D, ad supplenda homogenea assumta, semper erit indefinite parva; sed hoc non obstante proportiones inter spatia transmissa & inter tempora per logarithmos semper exhiberi possunt.

SECTIO V. ET ULTIMA,

Continens Miscellanea de motu circulari fluidorum, de motu aëris in producendo sono, & de motu interno fluidorum.

CAPUT XXII.

De motu circulari fluidorum.

POsteaquam præcipua capita ad motum fluidorum rectilineum attigimus, contemplandus superest motus circularis eorundem fluidorum, idque tanto magis quanto majori cum cura nonnulli ex præstantissimis philosophis Geometris difficiliora naturæ phænomena inde derivare conati sunt.

PROPOSITIO LXXIX: Theorema.

630. *Si globus Terraqueus æquabili motu circa axem suum conversus materia fluida in tota sua superficie circundatus esset; fluidi vel potius totius globi aquei superficies sphærica manere non posset, sed figuram indueret sphæroïdis cujusdam, cujus axis minor futurus esset diametro æquatoris.*

Sit PEpA globus fluidus revolvendus circa axem Pp, cujus poli sint P, p, & recta AE axi Pp normalis per centrum C transiens diameter æquatoris. Probari debet fore, ut manens corporis fluidi & circa Pp in gyrum acti superficies sit sphæroidea, cujus Pp axis minor sit diametro æquatoris AE. Fig. 144.

Demonstr. Ex centro corporis fluidi C exeant tubi CP, CE & CD ad centrum C inter se communicantes & pleni liquoris seu fluidi, quorum primus PC axi P*p* congruat, & CE eidem axi perpendicularis sit, tertius verò CD ad ambos ut libet inclinatus. Si moles fluida in quiete stet, constat (§. 251.) ejus superficiem sphæricam fore, atque adeò CE = CD = CP. Sed cogitemus jam eam æquabili motu revolvi circa P*p*, singulæ fluidi partes E, I, G, D, &c. suas revolutiones simul absolvent, atque adeò earum celeritates radiis CE, CI, HG, FD, &c. proportionales erunt.

Verùm, quia cum omni motu circulari conatus centrifugus mobilis circulantis conjunctus est, & ejusmodi conatus centrifugi radiis proportionales sunt circulorum, quos mobilia in orbem lata pari tempore describunt, conatus centrifugi omnium partium tubi DC minores erunt omnibus conatibus partium tubi EC; unde ii conatus centrifugi conatibus gravitatis contrarii sunt, atque adeò pressio cujusque columnæ fluidæ æquivalet excessui, quo conatus gravitatis, seu pondus absolutum columnæ, excedit conatum ejus centrifugum, & si, existentibus DC & EC æqualibus, excessus ponderis EC supra ejus conatum centrifugum minor est excessu ponderis DC supra ejus conatum centrifugum, erit pressio columnæ EC minor pressione columnæ DC, unde, cum communicantes sint, non poterunt in æquilibrio consistere, sed debilior pressio columnæ EC cedet fortiori DC, atque adeò aqua in columna EC attolletur, adeò ut EC major fiat quam DC. Pari argumento conficitur, columnam DC majorem esse quam PC, quandoquidem hæc columna PC utpote axi P*p* congruens, motum revolutionis massæ fluidæ non participat, neque adeò ullo conatu centrifugo pollet, pondere suo æquat differentiam, qua pondus columnæ DC excedit ejus conatum centrifugum. Sunt ergo CE major quam CD, & hæc major quam CP vel C*p*, ac proinde figura *p*EPA circa P*p* in gyrum acta producit sphæroidem, cujus P*p* erit axis minor, & massa fluida hujus sphæroidis figuram induet. Quod erat demonstrandum.

Corollarium I.

631. Hinc gravia circa ejusmodi sphæroidem non tendunt ad ejus centrum, ergo nec ad telluris centrum tendunt, si in primordiis rerum terra materia fluida & gravi constiterit, & in se ipsam
Fig. 145. converti cœperit. Sit enim in altera figura PEA figura telluris fluidæ,

dæ, item filum NM cum annexo ponduſculo M, & hoc filum in N fixum ope ponduſculi M in ſitum ſuperficiei PDE normalem ſeſe componet. Nam corpuſculum M deſcendet quantum poteſt, tantum autem deſcendere poteſt, usque dum ſuperficie PDE viciniſſimum ejusque directio NM eidem ſuperficiei perpendicularis fuerit. Atqui NM, vel ei parallela RDQ curvæ perpendicularis in D, angulo DNM à recta DC ex puncto ſuſpenſionis N ad centrum C ducta, deflectit, ut adeò hinc appareat ponduſculum M non tendere ad centrum ſphæroidis EPA.

Corollarium II.

632. Propterea ND erit ad lineolam DM æquatoris diametro CE parallelam, ſicut pondus abſolutum corporis M ad ejus conatum centrifugum in D. Nam ſi ND exponit pondus corporis, lineola DM exponet vim, qua à directione ND retrahitur detineturque in directione NM. Vi enim ND æquipollent laterales NM & DM, & ceſſante motu converſionis circa axem Pp pendulum NM ſe componet in ſitum ND, unde, ut detineatur in poſitione NM, ad id alia vi laterali juxta DM agente opus eſt; hæc verò vis lateralis eſt conatus centrifugus ex circulari motu ſphæroidis oriundus, qui ſe in mobile exſerit, ſecundùm directionem LDM radii illius circuli, quem ſphæroidis punctum D una converſione circa Pp deſcribit; ac, per conſequens, gravitas corpuſculi M ſe habet ad conatum ejus centrifugum ſub æquatore in D, ſicut ND ad DM.

Corollarium III.

633. Si pondus corpuſculi M ſit ad conatum ejus centrifugum ſub æquatore in E, ut P ad N, & recta DQO curvæ PDE perpendicularis in D, erit LO : CO = P.EC : N.DC. Nam gravitas eſt ad vim centrifugam in E, ſicut P ad N, & conatus centrifugus in E ad conatum centrifugum in D, ut EC ad DL, ergo ex æquo gravitas ad conatum centrifugum in D, id eſt (§. 632.) ND : DM, vel DC : CQ = P.EC : N.DL, adeoque etiam N.DC : N.CQ = P.EC : N.DL, vel permutando N.DC : P.EC = N.CQ : N.DL = CQ : DL (vel propter parallelas EC, DL) = CO : LO, ergo invertendo fit LO : CO = P.EC : N.DC.

PROPOSITIO LXXX. Problema.

Fig. 146. 634. *Posita proprietate curvæ* PDE *corollario præcedente* (§. 633.) *elicita, construere curvam, ejusque speciem definire.*

I. Sit PDE curva quæsita, & CB rectangulum ei circumscriptum, & hujus rectanguli latera producantur in A & M, ita ut BA = BP = EC, & PM = PC, & jungantur PA ac CM. Dein in AE producta sumatur EF ad EC in data ratione P ad N, ductaque per F recta FT parallela EC protendatur EF in G, ita ut FG = FT = EC. Sumto postea ubilibet curvæ elemento D*d*, ac centro C per elementi D*d* terminos descriptis arcubus circularibus DK, *dk*, agantur per K, *k* parallelæ KS, *ks* ipsi PT. Quibus præparatis & ducta TG, erunt:

II. Propter quadrata DL, LC æqualia quadrato DC vel TR, etiam triangula, quæ sunt quadratorum dimidia, scilicet PIH & CLN simul æqualia triangulo TRS, & triangula P*ih*, C*ln* simul æqualia triangulo T*rs*; idcirco, facta subductione minorum ex majoribus, erit trapez. *h*I — trapez. N*l* = trapez. R*s*, vel etiam rec-lum *g*I — rec-lo N*l* = rec-lo S*r*, quia coeuntibus punctis D, *d* recensita trapezia & respondentia rectangula in rationes æqualitatis evanescunt.

III. Quia (secundùm hypothesin) DO curvæ normalis est, triangula elementaria D*de* & DLO similia erunt, atque adeò LO : LD (= *de* : D*e*) = I*i* : L*l*, & LD : LC = HI : LN, ergo ex æquo, LO : LC = HI. I*i* : LN. L*l*, vel convertendo LO : CO = HI. I*i* : HI. I*i* — LN. L*l* (seu num. 11. hujus) = HI. I*i* : RS. R*r*. Atqui (§. 633.) LO : CO = P. EC : N. DC, ergo P. EC : N. DC = rec-lum H*i* : rec-lum R*t*, sed, quia EF : FG (secundùm hypothesin) = P : N, atque adeo P. FG = P. EC = N. EF; erit N. EF : N. DC = EF : DC (RT) = rec-lum K*r* : rec-lo R*t*, ac per consequens etiam H*i* : R*t* = K*r* : R*t*, hinc rec-lum HI. I*i*, seu H*i* æquatur ubique rec-lo KR. R*r* seu K*r*; ergo omnia H*i*, quæ in trapezio AHIB continentur, æquantur omnibus K*r*, quæ in rec-lo EKRF; id est, trapezium AHIB = rec-lo EKRF. Hinc assumto quolibet trapezio AHIB in triangulo APB, eique rec-lum EKRF æquale fiat, & arcus KD centro C intervalloque CK descriptus ordinatæ HI productæ ad partes I occurret in curvæ quæsitæ puncto D; ut adeò hinc constet, curvam PDE algebraïcam esse, cum omnia ejus puncta geometrice inveniri queant. Quod erat inveniendum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXI. Problema.

635. *Deducere constructionem curvæ* PDE. *præcedente propositione exhibitam ex principio æquilibrii canalium, seu columnarum fluidi* DC, PC *secundum explicationem propositione* LXXIX. *traditam.*

Posita constructione propositionis præcedentis, quia EF ad FG vel AB est ut P ad N, seu ut gravitas ad conatum centrifugum in E, conatus vero centrifugus in E ad conatum centrifugum in D, sicut EC ad DL, seu BP ad IP; id est, sicut AB ad HI; erit ex æquo gravitas ad conatum centrifugum in D, sicut EF ad HI, adeò ut HI semper significet conatum centrifugum particulæ D in canali DL vel DC, adeoque omnes ordinatæ HI, quæ in triangulo HIP continentur, seu hoc ipsum triangulum, exponet conatum centrifugum totius canalis DL vel DC. Atqui excessus ponderis columnæ DC supra pondus columnæ PC æquivalet conatui centrifugo columnæ DC vel DL (harum enim duarum conatus centrifugi in singulis punctis ab axe PC æqualiter distantibus æquales, atque adeò ipsarum columnarum DC & DL conatus centrifugi æquabuntur), ergo rec-lum KVXR æquale est triangulo HIP, quandoquidem EF vel KR exponit gravitatis solicitationem, & facta CV = CP. recta KV, differentiam, quâ columna DC excedit alteram PC & (§. 31.) volumen KV in gravitatem EF seu KR ductum, exponit ejus pondus, id est, excessum ponderum DC & PC. Propterea erit etiam totum triangulum PAB æquale rec-lo VF, ac per consequens ablatis ex hisce spatiis æqualibus PHI & VX, remanebit trapezium AHIB = rec-lo EKRF, ut in propositione antecedenti reperiebatur.

Corollarium I.

636. Quoniam ergo triang. PBA = EKRF, erit EF : $\frac{1}{2}$AB (= P : $\frac{1}{2}$N) = EC : EV = CE : CE − CP, erit convertendo CE : CP = P : P − $\frac{1}{2}$N.

Corollarium II.

637. Si dicantur CE, a; PC, b; CL, x; LD, y, & EF erit $ap:n$, quam vocabimus cum Hugenio f, & quia (§.§. 634, & 635.) $\frac{1}{2}AB^2 = EV . EF$, fiet analytice $af - f\sqrt{(xx + yy)} = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}yy$, quæ

ab asymmetria liberata præbet $y^4 = 4ffyy - 4afyy + 2aayy - 4aaff + 4a^3f - a^4 + 4ffxx$. Quæ ipsissima est æquatio, in quam Illustr. Hugenius incidit, calculum suum fundans in æquilibrio canalium DC & EC, non verò, ut nos fecimus in præsenti propositione, in æquilibrio columnarum PC & DC, quo calculus nonnihil simplicior emersisset. Vid. *Discours de la Cause de la Pesanteur par Mr. Huygens* pag. 157.

Scholion.

638. Supposuimus verò in hisce cum laudato Hugenio gravitatem corporum uniformem seu ubique æqualem. Quod si verò gravitates ponantur in directa ratione distantiarum à centro C, curva PDE diversa erit ab ea, quam in duabus postremis propositionibus exhibuimus. Nam,

Propositio LXXXII. Theorema.

639. *Si gravitas corporum distantiis locorum* D *à centro* C *proportionalis est, curva* PDE *erit ellipsis conica, cujus semiaxis* PG *erit ad radium æquatoris* EC *in subduplicata proportione* P−N *ad* P, *ubi* P *ad* N *est etiamnunc, ut gravitas sub æquatore in* E *ad vim centrifugam in eodem puncto.*

Fig. 145. Est (§. 632.) ND ad DM, vel DC ad CQ, ut gravitas in D ad vim centr. in D, at (secundùm hypothesin) grav. in D : grav. in E = DC : CE, & grav. in E ad conat. centr. in E (secundùm hypothesin) = P : N, ergo ex æquo grav. in D ad conat. centr. in E = P . DC : N . CE, & conat. centr. in E ad conat. in D = EC : DL = N . EC : N . DL, ergo denuo ex æquo gravit. in D ad conat. centrif. in D . DC : CQ vel P . DC ad P . CQ = P . DC : N . DL, ergo P . CQ = N . DL; atque adeò DL : CQ = LO : CO = P : N, estque adeò ratio LO ad CO ubique eadem seu data.

Fig. 146. Posita ergo constr. §. 634. num. I. eritque (num. III. §. 634.) LO : CO = $Hi : Rt$ (id est num. præc. hujus) = P : N, ergo omn. Hi, seu AHIB ad omnia Rt seu RFGS = P : N, vel 2 . AHIB : 2 . RFGS = $EC^2 - DL^2 : EC^2 - DC^2$ = P : N, & convertendo $EC^2 - DL^2 : CL^2$ = P : P − N. Ex quo constat, curvam PDE hoc casu esse ellipsin conicam, cujus semiaxes conjugati PC, GE sint ad se invicem in subduplicata proportione P − N ad P. Quod erat demonstrandum.

Ali-

Aliter ex Principio Æquilibrii canalium DC, PC.

640. Ducatur CF, &, quia EF : FG (constr.) = P : N; recta EF gravitatem in E exponere potest, & quoniam gravitas est distantiis à centro proportionalis, KY exponet gravitatem in D, & reliquæ ordinatæ in triangulo CKY exponent gravitatem in reliquis locis canalis DC, ergo gravitas totius canalis DC exponetur triangulo CKY. Pari argumento, si CV fuerit = CP, exponet triangulum CVZ pondus seu gravitas canalis PC, differentia verò ponderum DC & PC, quæ exponitur per trapezium VKYZ, æquivalet conatui centrifugo totius canalis DL vel DC (§. 635.) exponendo per triangulum PHI, ergo KYZV = triang. PIH, adeoque 2.KYZV = DL^2. Atqui 2.KYZV est ad $KC^2 - VC^2$ seu ad $DC^2 - PC^2$, vel quod idem est, ad $LC^2 + DL^2 - PC^2$, ut EF ad FG, seu P ad N. Ergo $DL^2 : DL^2 + LC^2 - PC^2 = P : N$, & convertendo $DL^2 : PC^2 - LC^2 = P : P - N$. Ex quo nunc iterum liquet id, quod præcedenti paragrapho ostensum, scilicet curvam PDE ellipsin conicam esse, cujus semiaxis PC sit ad EC in subduplicata ratione P − N ad P. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

641. Superest, ut rationem gravitatis absolutæ ad conatum centrifugum sub æquatore, id est, rationem P ad N numeris expressam exhibeamus, quod log-morum beneficio facile præstabitur. Sit A altitudo, quam grave à quiete casum incipiens motu naturaliter accelerato tempore unius minuti secundi in linea verticali & in vacuo perlabitur, quam Hugenius reperit esse 15. ped. 1. lineæ; atque R significet radium æquatoris terrestris, retentisque P & N pro nominibus gravitatis & conatus centrifugi sed æquatore. Per (§. 151.) $\sqrt{(2A : P)}$ exponit tempus, quo altitudo A motu naturaliter accelerato conficitur, quod tempus, (secundùm hypothesin) est unius minuti secundi; &, quia una revolutio diurna telluris, respectu fixarum, est 23. hor. 56. min. seu 86160. secundorum, nominetur hic numerus n, eritque $n\sqrt{(2A : P)}$ expressio unius revolutionis diurnæ in minutis secundis, & quia hoc idem tempus (§. 183.) etiam exponitur per $p\sqrt{(R : N)}$, uti p est exponens rationis circumferentiæ ad radium, habebimus æquationem $n\sqrt{(2A : P)} = p\sqrt{(R : N)}$; atque adeò $P : N = 2nnA : ppR$. Jam, quia n significat 86160; A, 15. ped. 1. lin. $p = 2.355 : 113 = 710 : 113$, & quia, secundum Piccarti dimensionem,

terræ

terræ unus gradus in Meridiano est 57060. hexapedarum, totius terræ ambitus log-us facile habebitur log-mo ex 57060. addendo log-um numeri 360; atque exinde etiam innotescet nullo ferme negotio log-us radii æquatoris R. Substitutis igitur numerorum logarithmis, erit log-us ex $2nnA = 10.5720475$, & log. $ppR = 8.1108142$; ergo differentia horum log-morum, id est, log-us rationis $2nnA : ppR = 2.4612333$. cui log-mo in tabulis proxime convenit numerus 289. Propterea est $2nnA : ppR$, vel $P : N = 289 : 1$. Quod erat inveniendum.

642. Hæc ratio $P : N = 289 : 1$, eadem est cum ea, quam primùm Hugenius in tractatu De Caussâ Gravitatis, pag. 146. & postea Illustris Newtonns in novissima editione Cantabrigiensi suorum Princ. Phil. Nat. Math. pag. 379, exhibuerunt. Quoniam igitur in casu propos. LXXX. & LXXXI, CE (§. 636.) est ad PC, ut P ad $P - \frac{1}{2}N$, erit $CE : CP = 578 : 577$. etiam ut Hugenius reperit pag. 156. citati libri. In casu vero propositionis LXXXII. erat $PC : EC = \surd P - N : \surd P$, seu $= \surd 288 : \surd 289$, quæ etiam æquatur rationi $577 : 578$. Nam ratio $\overline{\surd P - N} : \surd P = \surd(PP - PN) : P$, atqui $\surd(PP - PN) = P - \frac{PN}{2P} + \&c. = P - \frac{1}{2}N$ proxime, ergo $\surd(P - N) : \surd P = P - \frac{1}{2}N : P = 577 : 578$. Verùm Newtonus non determinata curvæ suæ PAQB, seu sectionis telluris per axem PQ, specie, & multiplici usus calculo in prima editione Princ. Phil. Nat. pag. 424. invenit diametrum terræ secundùm æquatorem ad diametrum per polos, ut 692. ad 689; in novissima vero invenit illam ad hanc ut 230. ad 229. Utraque multum abludit ab Hugeniana & nostra determinationibus; nec mirum, cum calculum suum in principiis à nostris diversis fundarit, attractionibus illis usus, quarum leges, elegantibus theorematis in primo libro traditis, complexus est. In Propos. XX. Lib. III. diserte ponit, pondera corporum æqualium in superficie telluris collocatorum, distantiis eorundem à centro reciproce proportionalia existere, idque ex eo
Fig. 145. deducit, quòd canales EC & PC æquiponderantes sint, atque adeò earum particulæ quælibet similes & similiter positæ etiam ejusdem sint ponderis. Nam, quia pondera corporum sunt ut massæ & solicitationes gravitatis conjunctim, erunt solicitationes gravitatis omninò in reciproca ratione massarum; unde, cum massæ ipsis EC & PC proportionales sint, erit solicitatio acceleratrix in E ad solicitationem acceleratricem in P, ut PC ad EC, & sic de reliquis.

Huic

Huic eidem proprietati etiam institit Clar. David Gregorius in suis Elem. Astr. Phys. Propos. LII. fol. 269. sed nec ipse figuram sectionis terræ per axem definire curavit.

643. Hac verò proprietate posita, quod scilicet solicitationes gravitatis acceleratrices in E & D figuræ EPp circa Pp revolventis, distantiis à centro EC, DC reciproce proportionales sunt, quis crediderit gravitates absolutas corporum in iisdem punctis E & D eorum distantiis EC & DC directe proportionales esse? Id tamen ita est; nam solicitationes illæ acceleratrices distantiis locorum à centro reciproce proportionales, sunt gravitates corporum absolutæ in iis locis de quibus agitur, demtis conatibus centrifugis eorundem corporum, quatenus hi conatus exeruntur in corpora secundum illas directiones, secundus quas gravitas, sed contrario sensu, agit. Id est, si gravitas in E, demta vi centrifuga in eodem puncto, fuerit ad gravitatem in D, demta pariter vi centrifuga in hoc puncto D, sed ea, quæ in corpus exeritur secundum directionem CD eandem, secundum quam gravitas in corpus agit, ut DC ad EC, erit vis absoluta gravitatis in E ad vim absolutam in D, ut EC ad DC. Ad hoc demonstrandum oportet prius speciem curvæ PDE definire, cuius analysis sic est ineunda. Gravitates absolutæ in E & D indicentur per gE, gD, & conatus centrifugi juxta directiones CE, CD in iisdem punctis per cE, cD. Eritque ex hypothesi gE $-$ cE : gD $-$ cD $=$ DC : EC, atqui est gE : gE $-$ cE $=$ P : P $-$ N, & cE : gE $=$ N : P, item conatus centrifugus in D secundum directionem DM est ad conatum centrifugum in E, ut DL ad EC, ac denique conatus centr. in D secundum DN est, ad conatum centr. secundum DM, ut DL ad DC; ergo ex æquo, id est, ductis omnibus antecedentibus in antecedentes ac consequentibus in consequentes, atque elisis eliendis, habebitur cD : gD $-$ cD $=$ N. DL^2 : (P $-$ N.) EC^2, vel invertendo & componendo gD : cD $=$ (P $-$ N). EC^2 + N. DL^2 : N. DL^2, sed cD : gE $=$ N. DL^2 : P. DC. EC, ergo denuo ex æquo fiet gD : gE $=$ (P $-$ N.) EC^2 + N. DL^2 : P. DC. EC. Est ergo gravitas in D ut hæc fractio (P $-$ N). EC^2 + N. DL^2 : P. DC. EC, adeoque, juxta methodum supra §. 633. expositam, est gravitas in D ad conatum centrifugum in D juxta DM, id est, DC : CQ $=$ (P $-$ N). EC^2 + N. DL^2 : N. DC. DL $=$ (EF $-$ EC). EC + DL^2 : DC. DL, quia (constr.) in fig. 146. EF : EC $=$ P : N; seu in ratione gravitatis sub æquatore in E ad conatum centrifugum. Hinc DL : CQ, vel LO : CO $=$ (EF $-$ EC). EG + DL^2 : DC^2 (§. 634. num. 111.) $=$ rec-lum Hi : rec-lum Rr. Fig. 145. & 146.

Et permutando ac invertendo $PI . Ii : (EF - EC) . EC + DL^2 = CK . Kk : CK^2$ (vel CD^2). Hinc ultrò ſequitur $\overline{EF . EC} : \overline{(EF - EC) . EC, + DL^2} = EC^2 : DC^2$, atque inde elicitur $\overline{EF - EC}$ in $\overline{EC^2 - DL^2} = \overline{EF . CL^2}$ (vel, quia $EF - EC : EF = P - N : P$) æquatio $\overline{P - N} . \overline{EC^2 - DL^2} = P . CL^2$. Quæ eadem eſt cum ea, in quam ſupra (§. 639.) incidimus; unde, quia in inquiſitione curvæ PDE, quam citato loco ellipſin conicam eſſe vidimus, ſuppoſuimus gravitates abſolutas in E, D, &c. diſtantiis EC, DC proportionales eſſe, nunc illud ipſum, quod illic ſuppoſitio vel hypotheſis erat, tanquam concluſio potuiſſet derivari ex principio, quod ſollicitationes acceleratrices in E & D diſtantiis EC, DC horum punctorum à centro C reciproce proportionales ſint. Sed hac indirecta deductione non eſt opus, cum res directe probari poſſit. Nam, quia invenimus $(P - N) . EC^2 - DL^2 : (P - N) = P . CL^2$, erit $(P - N) . EC^2, + N . DL^2 = P . DL^2 + P . CL^2 = P . DC^2$; &, quia ſupra habuimus $gD : gE = (P - N) . EC^2, + N . DL^2 : P . DC . EC$, erit omnino $gD : gE = P . DC^2 : P . DC . EC = DC : EC$. Quod erat demonſtrandum.

644. Idcirco inſiſtendo principiis Illuſtris Newtoni, atque Celeb. Gregorii, ſectio telluris per axem erit ellipſis conica, quam Propoſ. LXXXII. determinavimus, eritque adeò diameter terræ ſecundum æquatorem ad diametrum per polos in ſubduplicata ratione P ad $P - N$, id eſt (§. 642.) $= P : P - \frac{1}{2}N$, id eſt, $= 578 : 577$. Quæ ellipſis perparum differt à curva Hugeniana, quam propoſitionibus LXXX. & LXXXI. duabus diverſis viis demonſtratam dedimus.

645. Facta iterum $CV = CP$, ductaque Vb æquali longitudini penduli in polo P ſecunda minuta notantis, atque per punctum b deſcripta hyperbola bc inter aſymptotas CE, CT, ejus ordinatæ Ka, EF præbebunt longitudines pendulorum iſochronorum, atque vibrationibus ſuis ſecunda minuta indicantium in locis D & E. Nam (§. 178.) vires centrales, quibus pendula iſochrona agitantur, ſunt pendulorum longitudinibus directe proportionales, unde cum (ſecundùm hypotheſin) ſollicitationes acceleratrices in P, D & E diſtantiis horum punctorum à centro C reciproce proportionales ſint vel ex natura hyperbolæ Fab, directe, ordinatis reſpectivis Vb, Ka, Ef; & cum ordinata Vb jam repræſentet longitudinem penduli in polo P ſecunda notantis, reliquæ Ka, Ef, &c. omninò indicabunt longitudines pendulorum iſochronorum in locis D, E, &c.

Hoc

Hoc igitur principio haud difficulter tabulam construere liceret, qua penduli secunda minuta vibrationibus suis notantis longitudo ad singulos gradus latitudinis definiretur, si modo satis otii ad hunc ineundum calculum nobis suppeteret, & nisi summus Newtonus nos labore isto sublevasset, qui talem in propositione XX. Lib. III. Princ. Phil. Nat. novissimæ editionis exhibuit.

646. In hypothesi verò Hugeniana gravitatis uniformis, qualem in propositionibus LXXX. & LXXXI. sequuti sumus, longitudo penduli in polo P se habebit ad longitudinem penduli isochroni in quolibet loco D, ut $EF.PC + \frac{1}{2}DL^2$ ad $EF.PC - \frac{1}{2}DL^2$. Cujus demonstratio ex antecedentibus facilis est. Nam in quolibet loco longitudo penduli est proportionalis solicitationi acceleratrici penduli in eo loco, & hæc solicitatio acceleratrix semper est excessus gravitatis absolutæ supra conatum centrifugum in eodem loco, sumtum in directione gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIII. Theorema.

647. *Si tubus* ABDE *aquæ plenus usque ad* H *circa axem* FP *æquabili motu converti intelligatur, aqua hoc motu circulari ad latera tubi* BA, DE *attolletur, in medio vero deprimetur ad* M; *adeò ut superficies ejus, quæ in tubo quiescente sensibiliter plana erat, in superficiem cavam* LMN *abeat, quam retinebit quousque motus aquæ eodem tenore perseveraverit.* Fig. 147.

Nam, quia aquæ partes in gyrum actæ conatus habent recedendi à centro, & eo majores habent conatus à centro recedendi, quo majores fuerint circulationis celeritates, majores autem sunt prope latera vasis quam in medio velocitates aquæ in orbem actæ, ergo & majores conatus centrifugi, qui, quoniam à lateribus istis impediuntur & aqua fluida est, exeruntur secundum directiones plano basis perpendiculares, ac per consequens, cum in lineis basi perpendicularibus prope latera conatus centrifugi maximi sint, sequitur illic aquam altiorem esse debere quam in medio, ad id ut excessus pressionis à gravitate aquæ supra conatum centrifugum in ea linea æqualis manere queat pressioni aquæ in medio cylindri, alioqui aqua non posset in statu manenti consistere; propterea liquet, quod cum lineæ *bl*, lateribus vasis BL propiores, majores sint mediâ MP, superficies aquæ LMN cava futura sit.

648. Ductis itaque ad axem PM ordinatis LI, *li*, abscissæ MI,

Mi exponent conatus centrifugos filamentorum aqueorum BL, bl circa axem PM revolventium, unde, si velocitates circulationis fuerint, ut dignitas quælibet m radiorum PB, Pb &c. erit $MI : Mi = PB^{2m-1} : Pb^{2m-1}$, atque adeò curva MlL una ex infinitis parabolis. Nam est generaliter quadratum circulationis in composita ratione conatus centrifugi & radii circulationis per formulam primam, §. 183. adeoque conatus centrifugi MI erunt, ut quadrata celeritatum, seu (secundum hypothesin) ut PB^{2m} applicata ad radios PB circulationis, atque adeò sunt directe, ut respectivæ quantitates PB^{2m-1}. Hinc, si $m = \frac{3}{4}$, id est, celeritates circulationum sint in sesquiplicata ratione radiorum, curva MlL erit parabola conica.

SCHOLION I.

649. Præsens propositio etiam experimento facili probari potest. Nam si situla ex fune prælongo pendens & aquæ semiplena, eo usque in orbem vertatur, dum funis valde rigescat; tum situla, sibi relicta vel derepente in contrarium sensum dextre impulsa, magna pernicitate motum circularem sequetur, talemque etiam aquæ imprimet; hoc proinde motu vorticoso aquæ in situla impresso, statim contingere observabitur, ut aqua ad parietes situlæ attollatur & in medio subsidat, atque adeò ejus superficies figuram cavam induat loco planæ superficiei, qualis prius erat.

SCHOLION II.

650. Quin imo ex propositione hac nostra facilis modus deduci potest explicandi, cur in quolibet vertice corpora solidiora quam vorticis partes ad vorticis centrum pellantur. Nam, quia in vase cylindrico AD aqua HBDK in gyrum acta ad parietes vasis nonnihil se attollit, adeò ut superficiem cavam LMN induat; ideo manifestum esse potest cuique, quod, si aqua operculo rigido KH operta esset, singula puncta operimenti rigidi excepto medio O ab aqua circulante ac propterea sese attollere conante pressiones diversas sint subitura, scilicet eo majores quo remotiora fuerint puncta à centro operimenti O. Atqui ea vi, qua puncta operimenti ab aqua sese attollere conante premuntur, eadem vi reactione sua in aquam aget, quod sane etiam de superficie cava cylindrica itidem est intelligendum; id est, qua vi hæc superficies cylindrica ab aqua HD in gyrum

rum acta atque adeò axem MP fugiente, premitur, tanta etiam est ejus reactio, cujus vi versus axem MP aqua repellitur; adeò ut, si corpus aliquod in aqua sit, ut *b*, id pellendum sit versus P in directione BP superficiei cylindri perpendiculari.

Sic etiam, in vorticibus magna pernicitate in gyrum actis, fluidum elabendi conatum habens à vorticum superficiebus repellitur, & à repulso fluido corpora solida, quæ in vortice sunt, secundum directiones superficiei vorticum normales, atque hoc modo gravitas in hypothesi vorticum utcunque adumbratur. Utinam verò reliqua gravitatis phænomena eadem facilitate in hoc vorticum systemate explicare liceret!

CAPUT XXIII.

De Agitatione aëris in productione soni.

651. Ante Illustrem Newtonum nemo theoriam sonorum geometrice tractare ausus est, nec mirum, cum ejusmodi disquisitio iis difficultatibus circumsepta sit, quæ non nisi à sagacissimo Viro aliisve similibus geometris superari posse videbantur. Veruntamen elegantissimum nobis exhibuit theorema summus Geometra accelerationes pulsuum in aëre elastico concernens Propos. XLVIII. Lib. Sec. Princ. Phil. Nat. Math. in veteri & Propos. XLVII. in noviss. editione, postequam suam hypothesin de productione sonorum Propos. XLIII. exposuit. Ejus doctrina, ni fallor, huc redit.

652. Scilicet intelligit vibrationibus partium corporis sonori alternis circumjectum aërem elasticum propelli atque adeo densari nonnihil, dehinc relaxari & in partes contrarias regredi. Nam itu partium corporis tremuli contiguæ aëris partes propulsæ densabuntur, regressu verò, atque adeo amota vi comprimente, densatus aër iterum sese in omnes partes, quantum potest, elatere suo expandet, ita ut itu partium corporis tremuli aër condensetur & in reditu atque regressu iterum rarescat. Quod partes corporis tremuli in aëre ipsis contiguo efficiunt, idem etiam præstabunt aëris partes jam propulsæ in aëre ipsis contiguo, & hic in sibi proximo atque sic deinceps, sed non eadem ubique harmonia, ita ut, si quædam aëris partes propulsæ sint, propellantur & omnes reliquæ atque progrediantur, sed cum unæ propellantur atque densentur, aliæ redeant

atque posteaquam densatæ erant, iterum rarescant & regrediantur, idque vicibus permutatis. Ejusmodi motus partium aëris propulsarum atque iterum, unde venerant, regredientium, seu intervalla progressus atque regressus, vocentur pulsus aëris, quæ intervalla ob æqualia temporis intervalla præterpropter æqualia existent. Hisce positis sequens solvendum occurrit problema.

PROPOSITIO LXXXIV. Problema.

Fig. 148. 653. *Si elasticitates aëris densitatibus respectivis proportionales fuerint, determinare celeritates aëris elastici in uno ejus pulsu à vibratione corporis tremuli vel alia ratione excitato.*

I. Sit EF latitudo unius pulsus, scilicet intelligatur uno itu vibrationis corporis tremuli contiguum aërem propulsum redactum esse in spatium AB, ex cujus puncto medio E excitata sit perpendicularis EP, atque in ea recta ME exponat elasticitatem aëris condensati AB. Regrediente parte corporis tremuli, vel potius remota vi comprimente, quæ aëri AB densitatem naturali majorem induxit, aër AB sui juris factus, in utramque partem (§. 652.) æqualiter se diffundere conabitur; sed considerando ejus dilatationem tantum quæ versus D fit, aërem BC ante se propellet, atque eum condensando rediget in volumen CD ipsi AB circiter æquale. Intervallum EF, inter puncta media portionum aëris densarum AB, CD, est intervallum unius pulsus, quoniam æquivalet itineri, quod eundo & redeundo conficitur. Ut innotescant celeritates aëris in singulis punctis intervalli EF, procedendum porrò ut sequitur:

II. Dividatur EF bifariam in O, jungatur OM, ductaque per quodlibet punctum G intervalli EF rectâ GH parallela EP lineæ OM occurrente in H, fiat denique $Fg = EG$. Ponatur aërem EB se extendisse in EG: quæritur vis acceleratrix puncti progredientis G; hæc verò vis est virtus elastica aëris EG demta virtute elastica aëris FG, qui progredienti resistit. Jam aëris progredientis EG raritas est ut EG, & resistentis raritas ut FG, & quia densitates raritatibus sunt reciproce proportionales, & elasticitates directe densitatibus; elasticitates aëris raritatibus ejus erunt reciproce proportionales, unde, cum (secundùm hypothesin) aëris AB elasticitas sit EM, aëris expansi EG elasticitas erit $EM.EB:EG$, aërisque expansi FG elasticitas $EM.EB:FG$. Ergo vis acceleratrix puncti G seu differentia elasticitatum $= EM.EB:EG, - EM.EB:FG$ (vel quia gF & EG æquales) $= EM.$

EB.

EB. Gg : EG. FG. Jam, si ob angustiam pulsuum eorumque partium rec-lum EGF assumere licet æquale dato rec-lo BEF, erit vis acceleratrix puncti progredientis G = EM. EB. Gg : EB. EF = EM. Gg : EF = EM. GO : EO, seu (propter triangula similia OEM & OGH) = GH. Est igitur vis acceleratrix puncti G circiter ut ordinata GH trianguli rectanguli OEM, hoc est, ut distantia ejus GO à medio vibrationis, ut Celeb. Newtonus, loco supra citato, primus invenit. Unde si centro O & radio OE descriptus sit semicirculus ENF, & EP media proportionalis inter EM & EO. Erit (§. 148.) celeritas puncti G, ut GN. EP : EO. Tempus verò, quo aër EB se extendit in spatium EG (§. 149.) exponetur arcu EN : EP. Quæ omnia erant invenienda.

Corollarium I.

654. Hinc celeritates pulsuum erunt in composita ratione ex subduplicata intervallorum pulsuum & ex subduplicata densitatum. Vel brevius, celeritates sunt ut EP. Nam velocitates punctorum G in diversis EF similiter positorum, sunt ut homologæ EP, quia similitudo circulorum rationes omnes GN : NO vel EO æquales facit.

Corollarium II.

655. Tempora vero pulsuum sunt in reciproca ratione celeritatum, seu ut EO : EP.

Corollarium III.

656. Pendulum, cujus longitudo sit tertia proportionalis ad EM & EO, unam oscillationem ex itu & reditu compositam eodem tempore conficiet, quo unus pulsus eundo & redeundo absolvitur.

Scholion.

657. Præcedentes determinationes circa vim acceleratricem, velocitatem, & tempus lationis puncti progredientis G, non nisi tanquam physicè accuratæ haberi debent, non verò mathematicè. Nam quia memorata vis acceleratrix puncti G reperta est supra propor-

tio-

tionalis quantitati EM. EB. Gg : EG. FG = 2EM. EB. GO : GN^2, erit momentum solicitationis acceleratricis, ut 2EM. EB. GO. — dGO : GN^2 = 2EM. BE. GN. dGN : GN^2 = 2EM. EB. dGN : GN proportionale momento celeritatis acquisitæ, seu VdV, vocando hanc celeritatem V, & dV ejus elementum, & —dGO significat elementum decrescens lineæ GO, alterum verò dGN elementum ordinatæ GN. hinc EM. log. (GN^2 : BQ^2) est, ut quadratum celeritatis puncti progredientis G.

CAPUT XXIV.

De Motu intestino fluidorum.

658. HOc nomine non intelligitur hoc loco internus moleculatum motus fluidi cujuscunque in suo statu naturali consistentis, sed is particularum motus, qui in fluidis à causis externis & accidentalibus excitari solet, quò calor præsertim est referendus, qui dubio procul ex concitatiore particularum motu in corpore calido à causis externis producitur. Utut verò ejusmodi motus intestinus admodum perturbatus sit, nihilo tamen minus regula physicè satis accurata pro ejus mensura media tradi potest.

PROPOSITIO LXXXV. Theorema.

659. *Calor, cæteris paribus, est in compositâ ratione ex densitate corporis calidi, & duplicatâ ratione agitationis particularum ejusdem.*

Agitatio particularum est celeritas media inter celeritates particulares, quibus calidi corporis particulæ agitantur. Vocetur hæc celeritas media V, & corporis densitas D. Jam, quia calor consistit in concitatiore particularum motu, calor erit, ut impressiones particularum corporis calidi in quopiam objecto corpore calorem excipiente, sed hæ impressiones sunt in composita ratione ex duplicata celeritatum & simpla densitatum, seu, ut D. V^2. Ergo etiam calor est ut D. V^2. Quod erat demonstrandum.

Dictum in propositione *cæteris paribus*, id est, in corporibus similis texturæ.

Scho-

Scholion.

660. Ex hac propositione jam elicere licebit modum metiendi agitationem particularum aëris. Habeatur tubus ADM instar siphonis reflexus, cujus crus minus AD capsula vitrea ABC instructum sit, & majus DM hermetice sigillatum in M non nihil excedat longitudinem fistularum in ordinariis barometris adhiberi solitarum. Tempore hyberno tubus mercurio impleatur orificio aperto A deorsum spectante, atque ramo DM in verticali situ detento, parte D sursum respiciente, quod ope alius tubi inflexi atque aperto orificio A inserendi rite præstari potest. Totus tubus mercurio plenus inverti debet, ut denuo in situm, quem schema monstrat, reducatur, mercuriusque in ramo MD ad consuetam in ordinariis barometris altitudinem DH, 27. vel 28. digitorum se demittet, effluente per apertum orificium A superfluo hydrargyro. Sed, quia capsula ABC adhuc mercurio plena erit, suctionis modo tanta ejus copia extrahenda, usque dum residui superficies FF sit circiter in medio capsulæ, vel paulò altior, ita ut BF aut CF sint ½ totius altitudinis capsulæ BG. Clauso postea orificio A, atque adeò sublata communicatione aëris in ampulla cum exteriore, instrumentum usui aptum atque paratum erit. Ponamus enim aërem AFF calore extendi in spatium AEE, ita ut hydrargyrus in altero tubo ex H assurgat in I, columnæ IE pressio æquivalebit impressioni aëris AEE in sua basi EE, atqui hæc impressio (§. 659.) est, ut factum ex quadrato celeritatis mediæ particularum aëris in densitatem aëris. Vocetur, ut in propositionis expositione loco citato, velocitas media V, eritque aëris impressio in superficiem EE, ut $V^2 : GE$, nam densitas aëris AEE est ut $I : AE$ vel $I : GE$; est ergo $IE = V^2 : GE$, vel $IE . GE = V^2 = IG . GE + GE^2 = V^2$. Hinc $V = \sqrt{(IE . GE)}$ aut etiam $= \sqrt{(IG . GE + GE^2)}$. Propterea, si vocentur $FH = a$, $EE = b$. Diameter tubi $MD = c$, & $GF = e$, ac denique variabilis $HI = x$, invenietur V, seu velocitas media particularum aëris, ut $\sqrt{(ab^4c + b^4cx + bbccx + abbccx + bbccxx + c^4xx)} : bb$. Hinc data x in aliqua observatione, innotescet ultro ipsa V. Quod erat demonstrandum. Fig. 149.

F I N I S.

APPENDIX.

POstquam præcedens tractatus Typographo jam missus esset, varia subinde in mentem venerunt, quæ tum ad illustrationem Operis, tum etiam ad qualemcumque doctrinæ profectum facere videntur. Eorum pauca in hac Appendice præcedentibus libris addere constitui, quando temporis angustia atque Bibliopolæ festinatio non concedunt mihi oportunitatem omnia ad umbilicum deducendi.

I. Circa notissimam naturæ legem, quâ *cuilibet actioni æqualis & contraria esse dicitur reactio*, quam ex §. 11. derivatam in sequenti §. 12. retuli, egregii nonnulli viri hærere videntur, existimantes nunquam motum sequi debere actionem, si huic æqualis semper & contraria sit reactio; nam si, ut in exemplo à Celeb. Newtono inter alia adducto, equus lapidem funi alligatum trahens æqua vi retrahitur in lapidem, quomodo, inquiunt, progredi equus lapidemque movere potest, si vis agens ab æquali & contraria resistentia absorbetur tota atque retunditur? Sed hæc objectio ab æquivocatione circa nomina *vis* & *actionis* nata esse videtur, quæ tamen duo accurate debent distingui. Vis corporum non est actio ipsa; nam actio est applicatio vis cujusdam subjecto habili, seu cui applicari potest: illi verò soli corpori applicari censetur, quod resistit, quod renititur, quod reagit. In rebus materialibus nulla est actio proprie sic dicta, ubi nulla est reactio; equus enim, qui corpus *nihil* resistens post se trahit, *nihil* trahere vel *non* trahere, id est, nil aliud agere, quam simpliciter incedere, censetur. In omni ergo actione corporea est collisio inter vim agentem & renixum corporis patientis, applicatio vis agentis in corpore actionem suscipiente, hoc est, actio ipsa æqualis est & contraria renixui patientis, qui est ejus reactio, quia hic renixus vel hæc vis inertiæ corporis patientis debet tolli ad id ut corpus moveri possit ab agente. Non tamen ideo sequitur *vim totalem* corporis agentis totam impendi superandæ reactioni patientis, sed ejus partem tantum, & hæc pars vis totalis corporis, quæ tollendæ resistentiæ corporis patientis insumitur, ea est vis, à qua actio proprie manat; *residuum* enim ejusdem vis totalis, cum nullam habeat resistentiam vel renixum absorbendum, in actionem minime influit. Idcirco cum actio quæcunque æqualis & contraria dicitur reactioni corporis patientis, hoc aliud non significat quam istud,

istud, *in omni actione corporea tantum virium corpori agenti decedere, quantum corpus actionem suscipiens lucratum sit.*

II. Propositio IV. Lib. I. §. 44. facilem suppeditat modum demonstrandi centrum gravitatis *dari* in unoquoque corpore, & hoc centrum *unicum* esse, si gravium directiones parallelæ fuerint. Nam, si fuerint corpuscula quotcunque quam minima A, B, C, D, &c. Fig. 150. quomodocunque posita, & tanquam elementa corporis etiam cujuslibet spectata, à quibus demissæ sint ad planum P*c* positione datum perpendiculares A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, &c. & plano P*c* aliud parallelum ducatur GH, cujus distantia E*e* à plano P*c* ea sit, ut factum ex E*e* in aggregatum corporum A + B + C + D + *&c.* æquet summam factorum A. A*a* + B. B*b* + C. C*c* + D. D*d* + *&c.* Corporum A, B, C, D, *&c.* in suas respectivas à plano P*c* distantias A*a*, B*b*, C*c*; *&c.* & in P*c* sumatur P*e*, talis ut (A + B + C + D + *&c*). P*e* sit = A. P*a* + B. P*b* + C. P*c* + D. P*d* + &c. ductaque per *e* recta *e*E occurret GH in puncto E, quod est commune centrum gravitatis corpusculorum A, B, C, D, *&c.* vel corporis totalis, quod ex hisce corpusculis componitur. Hoc punctum E ideo dicitur corporis totalis centrum gravitatis, quia ejus partes seu corpuscula A, B, ex una parte lineæ, vel plani GH, æqualium sunt momentorum cum corpusculis C, D, &c. ex altera parte ejusdem plani vel lineæ GH, & quia hoc idem accidit respectu cujuslibet alius lineæ LM, quæ per hoc idem punctum E duci potest. Nam ducta per P linea P$\varkappa$ parallela LM, & productis A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, &c. & E*e*, in α, β, $\varkappa$, δ, *&c.* & ϵ. reperietur (A + B + C + D + *&c*). Eϵ = A. Aα + B. Bβ + C. C$\varkappa$ + D. Dδ + &c. & (A + B + C + D + &c). Pϵ = A. Pα + B. Pβ + C. P$\varkappa$ + D. Pδ + *&c.* quandoquidem omnia triangula P*a*α, Pβ*b*, P*c*$\varkappa$, &c. similia sunt. Jam ex hisce duabus æqualitatibus ultrò sequitur, omnia momenta corporum A, B, C, D, &c. respectu utriusque plani P$\varkappa$ & PV ejus normalis simul æqualia esse respective factis ex aggregato corporum in distantias centri E ab utroque plano vel linea P$\varkappa$, PV, quod cum ita sit, necessum etiam est ut corpuscula, quæ sunt ad unam partem rectæ LM æqualium sint momentorum cum pondusculis, quæ sunt in altera parte ejusdem LM. Cum itaque omnes lineæ, quæ per punctum E duci possunt, sint àxes æquilibrii pondusculorum A, B, C, D, &c. liquet corporis ex hisce corpusculis tanquam suis elementis conflati centrum gravitatis *unicum* esse in E. Quod erat demonstrandum.

Hanc eandem propositionem Wallisius ex aliis principiis etiam elicuit.

 III. Cir-

III. Circa regulam Guldini, cujus demonstratio supra (§. 47.) allata est, duo notanda sunt. 1°. Eam non solum in figuris aut solidis rotundis obtinere, sed generaliter in omnibus aliis, quæ generari possunt figuræ genitricis motu hac lege facto, ut figuræ planum semper perpendiculare maneat lineæ, quam centrum gravitatis figuræ genitricis motu ejus describit. Hoc enim casu *solidum figuræ motu genitum semper æquale est facto ex figura in viam centri gravitatis ejusdem.*

Fig. 151. Nam si ponatur centrum gravitatis C figuræ cujuslibet AB incedens in curva DEF, cui figura ubiquè normalis sit, descripsisse arculum curvæ C*c*, atque ex situ BA venisse in situm *ba* priori indefinite vicinum, adeo ut rectæ CO & *c*O, quæ sint in planis figurarum AB, & *ab*, & in plano curvæ DEF, eritque O centrum circuli osculatoris curvæ datæ DF in ejus puncto C vel ejus proximo *c*. Adeoque solidum, quod figura AB describit cum ejus centrum C percurrit arculum C*c*, per §. 47. æquatur facto ex figura AB in arculum C*c*, ergo omnia ejusmodi solida vel solidum, aut figura, quæ producitur incessu figuræ AB per totam curvam DEF, æquabitur facto ex eadem AB in omnes arculos, qui in curva DF continentur, id est, facto ex figura AB in curvæ DEF longitudinem. Quod erat demonstrandum.

2°. Notandum, hæc tantum ita se habere, si figura genetrix gravitatis sit uniformis, & fallere Guldini regulam, figura genitrice existente difformiter gravi.

IV. Propositio VIII. Lib. I. (§. 59.) etiam deduci potest vel saltem ipsi æquivalens ex proprietate universali vectis recti in singulis punctis à potentiis obliquis impulsi, quam hoc loco explicare
Fig. 152. placet. Sit linea recta inflexilis AC, quæ in singulis punctis C, C, &c. urgeatur potentiis CD, CD uniformi lege ad ipsam inclinatis, & circa eam tanquam axem constitutæ intelligantur figuræ ACGIP, & ACHKA, ea conditione, ut ordinata quælibet CG (CI) sit ad homologam potentiam CD in duplicata proportione sinus anguli respectivi BCA ad sinum totum; ac ordinata CH (CK) alterius figuræ ACH se habeat ad ordinatam CG (CI) primæ ACGP, ut sinus complementi anguli BCA ad ejusdem sinum rectum; & sic ubique, positis hisce, per centrum gravitatis areæ ACGP agatur RS axi AC recta huic lineæ AC occurrens in R, eritque linea RT cum RS angulum TRS continens, cujus sinus est ad sinum complementi, ut area AHC ad aream ACGP, media directio omnium

po-

potentiarum CD, CD lineæ AC applicatarum, & onus quo hypomochlion in R urgetur, erit ad omnes potentias lineæ AC rectas ex obliquis CD, CD derivatas, ut sinus totus ad sinum complementi anguli TRS. Demonstratio hujus Lectoris industriæ relinquitur brevitatis amore. Hoc tamen minime reticendum est, in iisdem directionibus BD, BD potentias, curvæ cuilibet AB applicatas, quæ sint ad homologas CD ad lineam AC pertinentes, ut respectivæ CV ad BV (supponendo directiones BD, BD tangere curvam quandam CV) eandem habere mediam directionem ZT cum potentiis CD, CD, &c. rectæ AC applicatis, ut demonstratu id facile est. Unde si curvæ cuicunque AB potentiæ quæcunque in directionibus BC, BC, &c. applicatæ sint, facili negotio invenietur earum media directio, ducendo per curvæ verticem A tangentem AC, vel quamlibet aliam rectam, & disquirendo quænam potentiæ CD in directionibus BC huic rectæ AC applicandæ sint ad id, ut harum potentiarum media directio RT etiam præbeat mediam directionem potentiarum in directionibus BC, BC, &c. datæ curvæ ABB applicatarum; ad id facienda ubique est CD ad homologam potentiam curvæ AB applicatam, sicut BV ad CV.

V. Usum universalem propositionis XII. Lib. I. In subjunctis ejus corollariis & scholio jam utcunque ostendimus. Ad majorem tamen propositionis & applicationis ejusdem illustrationem, pauca hæc, quæ sequuntur, addidisse forte juvabit. Præter symbola §. 101. jam explicata, firmitatem cujusque curvæ elementi Bb vel $B\beta$ nominabimus t, quæ illic insigniebatur litera T; potentias juxta BH & BG, dq & dp respective, tangentem & secantem anguli GBH, h & k, ac denique radium osculi seu curvitatis in B, r; item per a sinum totum designabimus. Hisce positis, erit (num. 1. §. 93.) $GH = dt$, & tria elementa dp, dq, & dt, ipsis a, k & h proportionalia erunt, sic etiam $AP : PQ = r : ds$, atqui (§. 103.) est $BG\,(dp) : T\,(t) = PQ : AP$, ergo $dp : t = ds : r$, item $dp : dt = a : h$, ergo $dt : t = hds : ar$, & $log.\, t = \int (hds : ar)$, adeoque ex hisce analogiis quatuor habentur æquationes, quales in hoc adjecto laterculo notantur. Hinc ex quantitatibus dp, dq, dt vel t & h data qualibet in indeterminatis curvæ x, y, dx, dy, &c. & quantitatibus constantibus, invenientur reliquæ, si non algebraice, saltem transcendenter. Fig. 29.

1. $dt = hdp : a = hdq : k$.
2. $t = rdp : ds$.
3. $log.\, t = \int hds : ar$.
4. $h = ardt : tds$.

Exempl. Sit curva data ABZ hyperbola æquilatera, cujus æqua-

tio $yy=xx-aa$, in qua abscissæ x sumantur à centro, semilatere transverso existente $=a$, sintque tenacitates aut firmitates curvæ proportionales distantiis punctorum curvæ à centro, hoc est, $t=\sqrt{(xx+yy)}$. Et §. 161. præbebit $r=t^3:aa$, & $h(=ardt:tds)=\frac{2xy}{a}$, nec non $k=tt:a$; hinc æquatio prima $dt=hdq:k$ præbebit $dq=ttdt:2xy=2txdx:2xy=tdx:y$; atqui $tdx=yds$, ergo $dq(=tdx:y)=yds:y=ds$. Idcirco potentiæ BH, seu dq, sunt ut elementa curvæ Bb, earumque directiones in centro hyperbolæ coëunt, quoniam tangens anguli DBH inventa est $=2xy:a$, & hæc expressio etiam tangentem anguli, quem normalis hyperbolæ BD cum recta ex puncto B ad centrum hyperbolæ ducta continet. Propterea est hyperbola æquilatera *catenaria*, si gravium directiones in centro hyperbolæ concurrere supponuntur, ut supra circa finem §. 105. sine demonstratione dictum est. Pariter si posuissem $dq=ds$ & $h=2xy:a$ in hyperbola eadem, invenissemus $t=\sqrt{xx+yy}$.

Generalius, si directiones gravium convergunt in punctum, abscissæque sumantur in axe ab hoc centro gravium, erit $h=axdx+aydy:xdy-ydx$, & hujus ac alterius $dt=hdq:k$ ope, in suppositione $dq=ds$ invenissemus $t=\sqrt{xx+yy}$ & $yy=xx-aa$.

Si directiones gravium axi AC parallelæ sunt, erit $h=adx:dy$, ac substituendo loco dx, & dy earum proportionales n & m, fiet $h(=adx:dy)=an:m$. Item in æquatione quarta, surrogando m & dn pro r & ds, quibus proportionales sunt, fiet $an:m=amdt:tdn$, & $dt:t=ndn:mm$ (aut, quia $mm+nn=aa$, & $ndn=-mdm$) $=-mdm:mm=-dm:m$, ergo $lt=l(aa:m)$, id est, $t=aa:m=ads:dy$, ut habet æquatio nona. Substituendo igitur valorem inventum ipsius t in æquatione secunda invenietur æquatio septima, & ex hâc ope analogiæ $dp:dq=a:k,=dy:ds$, elicietur æquatio octava.

5. $h=adx:dy$
6. $k=ads:dy$
7. $dp=ads^2:rdy$
8. $dq=ads^3:rdy^2$
9. $t=ads:dy$

Hinc, ex hisce tribus dp, dq & t una data in indeterminatis curvæ & constantibus utlibet invicem permixtis, facile invenientur reliquæ duæ, si non algebraice, saltem transcendenter.

Si directiones potentiarum BH sunt curvæ normales, erit $h=0$, & $k=a$, & sola æquatio secunda sufficit; hunc casum particularem Celeb. Joh. Bernoullius solutum dedit jam pridem in Commentariis Academiæ Reg. Paris. Scientiarum 1706. & nuper adhuc in

Li-

Libro cui titulum fecit *Essay d'une Nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux*.

VI. *De sublimitate gravitatis difformis, quâ projectilia sectiones conicas in vacuo describunt.* Quoniam mobile perimetrum alicujus sectionis conicæ AQ*a* describens citatur solicitationibus, quæ quadratis distantiarum mobilis à centro sunt reciproce proportionales, *scala* harum solicitationum GB erit hyperbola quadratica, cujus applicatæ HG, AB, quæ solicitationem gravitatis in H & A exponunt, quadratis abscissarum DH, DA sunt reciproce proportionales, centro hyperbolæ existente in D. Quæritur jam quantam assumere oporteat *sublimitatem*, hoc est, lineam HA talem, ut in ea descendens grave motum à quiete in H incipiens, & solicitationibus, quas ordinatæ hyperbolæ in quadrilineo HGBA exponunt, celeritatem acquirat in A, cum qua propulsum mobile, secundum lineam A*a* alteri BA in directum positam, datam sectionem conicam AQ*a* in vacuo describat. Fig. 153.

Ponitur punctum A pro alterutra apside, ac propterea DA erit sectioni perpendicularis in A, atque adeo hoc punctum A alteruter vertex erit sectionis conicæ AQ*a*, & radius curvitatis in A æquabitur $\frac{1}{2}$L, id est, semilateri recto sectionis conicæ, & solicitatio curvæ in A normalis ex centrali AB derivata eadem erit cum hac centrali; idcirco indicando celeritatem mobilis in puncto A, per V, vi §. 154. habebitur $V^2 = \frac{1}{2}L.AB$. Atqui eadem velocitas V, sed (secundum hypothesin) descensu in HA acquisita, exponitur etiam (§. 136.) latere quadrato ex duplo areæ HGBA, ergo $V^2 = 2.HGBA$, atqui $AHGB = AD.AB - HD.HG$, ergo etiam $\frac{1}{2}L.AB = 2AD.AB - 2HD.HG$, vel, propter hyperbolam, subrogando loco AB & HG earum proportionalia quadrata HD^2, AD^2, fiet $\frac{1}{2}L.HD^2 = 2AD.HD^2 - 2HD.AD^2 = 2HD.AD.HA$, hinc etiam $L.HD = 4.HA.AD$, vel $L.Aa.HD = 4Aa.HA.AD$. Verum ex conicis est $4QO^2 = L.Aa = AD.Ad$, ergo $4Aa.HA.AD = 4AD.Ad.HD$, id est, $Aa.HA = Ad.HD$, & $HD:HA = Aa:Ad$. & dividendo, $AD:HA = AD$ (vel ad)$:Ad$, propterea est $HA = Ad$, atque adeo $HD = Aa$. *Est ergo sublimitas in sectionibus conicis æqualis distantiæ apsidis remotioris à centro solicitationum, à foco ejus propiore.* Hinc varia deduci possunt, quorum nonnulla sequuntur.

1°. Uni eidemque sublimitati HA convenire quidem possunt infinitæ sectiones conicæ AQ*a*; cum eadem manente A*d* distantia focorum *d*D possit esse magnitudinis cujuscunque; sed non ideò una ea-

eademque omnibus competet celeritas jactus secundum Aa. Nam, quia $V^2 = \frac{1}{2}L : AB = \frac{1}{2}L . AD^2 . AB : AD^2$ (seu, quia $AD^2 . AB$ est solidum constans) est $\frac{1}{2}L : AD^2$, erit V ut $\sqrt{\frac{1}{2}L} : AD$. Id est, in diversis sectionibus conicis velocitates mobilis in altera apside erunt in composita ratione ex subduplicata directa ratione laterum rectorum sectionum, & reciproca ratione distantiarum apsidis à centro solicitationum.

2°. Si umbilicorum distantia Dd fuerit infinita, sectio conica AQa est parabola focum habens in d, ac proinde sublimitas $HA = Ad$ sit æqualis quartæ parti lateris recti L, ut Galilæus, aliique post ipsum plures ex aliis fundamentis demonstrarunt. In hoc ergo consectario continetur universa doctrina motus projectorum in hypothesi gravitatis parallelarum.

3°. Si mobile eadem velocitate V in A acquisita post descensum in HA circulum ex centro I, radiumque $AI = \frac{1}{2}L$ habentem describat, conatus centrifugus mobilis in circulo eadem erit cum solicitatione centrali AB in apside A sectionis conicæ AQa.

4°. Gravitas uniformis, qualis apud nos est, se habet ad conatum centrifugum in dicto circulo, seu ad solicitationem centralem AB in A, ut $\frac{1}{2}AI$ seu $\frac{1}{4}L$ ad HA seu Ad. Adeoque in parabola ex foco d & vertice A descriptâ missilis gravitas in vertice ejus A, æquabitur conatui centrifugo in circulo prædicto.

VII. *De tempore Periodico in Sectionibus Conicis.* Vocentur tempus unius circuitus in sectione AQa, T, diameter Aa, D; ejus conjugatus Qq, d; latus rectum l, distantia seu altitudo AD, A, solicitatio centralis AB in apside A, G. Eruntque $d = \sqrt{lD}$, & area totius ellipseos, hoc est, $2 . AQa = \frac{1}{2}pDd$, ubi p est exponens rationis circumferentiæ circuli ad radium. Est verò (§. 157.) $T = 2 . AQaA : \frac{1}{2}AD . V$, ergo substituendo valores analyticos loco areæ & linearum AD, V; habebitur $T = pDd : Au$, seu $T^2 = ppD^2d^2 : A^2uu$, est vero $dd = lD$, & $uu = \frac{1}{2}lG$, ergo $T^2 (= ppD^3l : \frac{1}{2}lA^2G) = 2ppD^3 : A^2 . G$. Hinc *quadratum ex tempore periodico est in composita ratione ex directa triplicata ratione lateris transversi, & reciproca composita ratione duplicatæ distantiæ apsidis à foco, seu centro solicitationis, & simplæ solicitationis* G *in apside.* Unde, quia solicitationes gravitatis sunt in reciproca duplicata ratione distantiarum mobilis à centro, rationes compositæ ex duplicata distantiæ apsidum à centro & simpla gravitatis in apsidibus sunt rationes æqualitatis, propterea sunt quadrata temporum periodicorum, ut cubi diametrorum principalium in sectio-

sectionibus conicis. Et hæc est demonstratio Celebris Kepleri canonis.

VIII. *De Centro Oscillationis.* In theoria centri oscillationis Cap. V. Lib. I. exposita brevitatis tantum gratia posui, non verò ex necessitate, centrum oscillationis reperiri in linea centri, hoc est, in recta ex puncto suspensionis per centrum gravitatis figuræ oscillantis ducta. Methodus enim nostra perinde valet quæcunque linea accipiatur per punctum suspensionis, in qua centrum oscillationis existat, invenietur semper hanc lineam per centrum gravitatis figuræ oscillantis transire debere, prorsus ut idem etiam Celeb. Joh. Bernoullius in eleganti suo Schediasmate Act. Lips. 1714. mens. Junii §. 28. ostendit. Nam si in fig. 46. pendulum simplex CN composito isochronum per aliud punctum m quam per centrum gravitatis M figuræ oscillantis transire ponatur, quod tamen ita comparatum, seu positum, esse debet, ut linea ex hoc puncto m (in figura quidem non signato sed calamo aut mente facile supplendo) per centrum gravitatis M ducta horizontali CY ad angulos rectos semper occurrat, invenietur, semper, ut in §. 206, $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2 + \&c.).G:M.mC$, ubi M, ut in citato loco, significat E. $P + F.Q + \&c.$ seu aggregatum ponderum omnium figuræ oscillantis partium. Jam verò, mutato utlibet angulo YCN, mutabitur simul magnitudo ipsius mC, ac propterea quantitas $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2 + \&c.).G:M.mC$ constans & invariata fieri nequit, nisi coincidente mC, cum MC, atque adeò puncta m & M ubique confundantur, adeò ut hinc appareat centrum oscillationis necessariò in linea centri existere. Quod erat demonstrandum. Fig. 46.

IX. Applicatio hujus novæ theoriæ centri oscillationis nunc paulò uberius declaranda est, quam in §. 208, ubi formula tantum exhibetur pro figuris uniformis gravitatis. Designando particulas P, Q, &c. ut ibi per dp, earumque pondus per βdp, ita ut β gradum gravitatis denotet, &, si g significet gravitatem, qua simplex pendulum agitatur, & z distantiam particulæ oscillantis ab axe oscillationis, canon §. 206. $CN = (P.PC^2 + \&c.).G:M.MC$ præbebit $t = g\int zzdp : \int \beta xdp$. Hinc, si $\beta = gzz : ax$, fiet $t = ag\int zzdp : g\int zzdp = a$.

Oscilletur jam figura BAD in *planum*, seu ita ut axis oscillationis semper maneat in plano figuræ oscillantis, atque adeò ordinatæ figuræ BD axi oscillationis QQ constanter parallelæ sint; erunt hoc casu ipsæ z, seu distantiæ punctorum ordinatæ, $BD = QC = x$, atque adeò $\int zzdp = \int xxdp$, &, quia $dp = BC.Cc = ydx$, erit $\int zzdp =$ Fig. 154.

 $\int xxydx$,

$\int xxydx$, & $t(=g\int zzdp:\int \beta xdp)=\int gxxydx:\int \beta xdp$, vel, si omnes partes ordinatæ BD sint uniformis gravitatis, $=g\int xxydx:\int \beta xydx$.

Si eadem figura movetur in latus, id est, si planum figuræ oscillationis axi oscillationis rectum est; sit quælibet in ordinata BC ejus portio CI $=u$, & $dp=dudx$, erit $z=\sqrt{(QC^2+CI^2)}=\sqrt{xx+uu}$, hinc $zzdp=xxdudx+uududx$, & integrando, positis x & dx constantibus, invenietur $\int zzdp=uxxdx+\frac{1}{3}u^3dx$, vel (facta $u=y$) $=xxydx+\frac{1}{3}y^3dx$, sed hoc est tantum elementum respectu totius figuræ ABD. Et $\int \beta xdp=\int \beta xydx$, adeoque $t(=\int gzzdp:\int \beta xydx)=(\int xxydx+\int \frac{1}{3}y^3dx).g:\int \beta xydx$.

Fig. 144. Pro solidis rotundis sic est indaganda formula: sit BEAD ejusmodi solidum, cujus basis sit circulus BEDH, cujus diameter EF axi oscillationis QQ parallelus supponitur. Ad hanc diametrum EF demissis perpendiculis GL, gl, fiant CL $=t$, & ut antea LG seu CI $=u$, requiruntur primum omnia $zzdp$, quæ in rectangulo GLl continentur. Quia omnia $zzdp$, quæ in ordinata GL reperta sunt $xxu+\frac{1}{3}u^3$, omnia $zzdp$, quæ in rectangulo GLl sunt, erunt $=xxudt+\frac{1}{3}u^3dt$. Ponantur jam $udt=d\alpha$, & $u^3t=\omega$, atque adeo $d\omega=u^3dt+3uutdu$. Sed circulus EBF præbet $tt+uu=yy$, vel ducendo hanc in udt, fiet $ttudt+u^3dt$, seu (ob $tdt=-udu$) $=-uutdu+u^3dt=yyudt=yyd\alpha$, vel etiam $3u^3dt-3uutdu=3yyd\alpha$, & addatur hæc æquatio ad alteram $u^3dt+3uutdu=d\omega$, fietque $4u^3dt=3yyd\alpha+d\omega$, vel $u^3dt=\frac{3}{4}yyd\alpha+\frac{1}{4}d\omega$, qui valor substituatur in $xxudt+\frac{1}{3}u^3dt$, atque $d\alpha$ pro udt, fietque $zzdp(=xxudt+\frac{1}{3}u^3dt)=xxd\alpha+\frac{1}{4}yyd\alpha+\frac{1}{12}d\omega$. Adeoque omnia $zzdp$, quæ in segmento circulari CBGL, seu α, continentur sunt $=xx\alpha+\frac{1}{4}yy\alpha+\frac{1}{12}\omega$, nam ipsæ QC, CB invariatæ, seu constantes, manent, utlibet variatis ipsis CL & GL, seu t ac u, adeo ut istarum respectu indeterminatæ x, y constantes sint. Jam, quia α significat segmentum CBGL, & ω factum CL.GL^3; erunt omnia $zzdp$ quæ in quadrante CBE continentur $=(xx+\frac{1}{4}yy)$.CBEC, cum evanescente GL in E, etiam factum CL.GL^3 seu ω evanescat. Hinc, si π designet exponentem rationis peripheriæ cujusque circuli ad radium, reperietur CBEC $=\frac{1}{4}\pi yy$, ac solidum CBEC.Cc $=\frac{1}{4}\pi yydx$, adeoque $\int zzdp$ in hoc solido, $=(\frac{1}{4}xxyydx+\frac{1}{16}y^4dx).\pi g$. Propterea erit $t=(\frac{1}{4}\int xxyydx+\frac{1}{16}\int y^4dx).\pi g:\int \beta xdp$. Atque ex hisce jam omnibus emergent canones generalissimi, quales sequens tabella exhibet:

si po-

Si ponantur $A = \int y\,dx$, $B = \int xy\,dx$, $C = \int xxy\,dx$, $D = \int y^3 dx$. $I = \int xyy\,dx$. $K = \int xxyy\,dx$. $L = \int y^4 dx$. $N = y^3 x$.

In figuris agitatis in $\begin{cases} \text{Planum. } t = gC : \int \beta x\,dp. \\ \text{Latus } t = (gC + \frac{1}{4}gD) : \int \beta x\,dp. \end{cases}$

In solidis rotundis $t = (\frac{1}{2}\pi gK + \frac{1}{8}\pi gL) : \int \beta x\,dp$.

Hi canones sunt generales, quia deserviunt in omni casu gravitatis uniformis aut pro libitu variabilis, nam, ut jam supra dictum, βdp generaliter indicat pondus absolutum cujusque elementi dp figuræ oscillantis, unde cum β infinitis modis variare possit, exinde satis in propatulo est, hos canones infinities infinitos diversos casus omnes complecti.

Si β est constans, præcedentes canones mutabuntur in eos, quos hæc altera tabella repræsentat.

$t = gC ; \beta B$ - - - - - - pro figuris in $\begin{cases} \text{Planum} \\ \text{Latus} \end{cases}$ agitatis.
$t = (gC + \frac{1}{4}gD) : \beta B$
$t = (gK + \frac{1}{4}gL) : \beta I$. Pro solidis rotundis.

Ut saltem usum horum posteriorum canonum ostendam, esto figura BAD circa axem QQ oscillans sectio conica, cujus æquatio generalis sit $\pm aa \mp ee \pm 2ex \mp xx = \frac{aa}{bb} yy$, in qua a designat semilatus transversum, b semiaxem conjugatum, e distantiam puncti suspensionis Q à centro sectionis, ac denique x, y coordinatas QC, CB. Si æquatio curvæ differentialis $\pm e\,dx \mp x\,dx = \frac{aa}{bb} y\,dy$, ducatur in y, habebitur $\pm e\,dx \mp x\,dx$ in $y = \frac{aa}{bb} yy\,dy = \pm ey\,dx \mp xy\,dx = \frac{aa}{bb} yy\,dy = \pm e\,dA \mp dB$, &

per antithesin - - - - - - $\pm dB = \mp e\,dA - \frac{aa}{bb} yy\,dy$. Et

integrando - - - - - - - $\pm B = \pm eA - \frac{aa}{3bb} y^3$.

Porro, quia (secundùm hypothesin) $N = y^3 x$, cujus differentialis ducta in $\frac{aa}{bb}$ præbet - - - $\frac{aa}{bb} dN = \frac{aa}{bb} y^3 dx + \frac{3aa}{bb} xyy\,dy$.

Fig. 44.

Fig. 42.

Fig. 45.

Fig. 47

Fig. 49.

Fig. 53.

Fig. 50.

Fig. 54

vel proportionis horum. Atqui principium vectis præbet sequentes æquationes

1. $A.AB = L.LB + M.MB + N.NB + O.OB + P.PB.$
2. $A.1A1B = L.1L1B + M.1M1B + N.1N1B + O.1O1B + P.1P1B.$
3. $A.2A2B = L.2L2B + M.2M2B + N.2N2B + O.2O2B + P.2P2B.$
4. $A.3A3B = L.3L3B + M.3M3B + N.3N3B + O.3O3B + P.3P3B.$
5. $A.4A4B = L.4L4B + M.4M4B + N.4N4B + O.4O4B + P.4P4B.$
6. $A.5A5B = L.5L5B + M.5M5B + N.5N5B + O.5O5B + P.5P5B.$

Hæ æquationes continuò à se invicem subductæ, scilicet secunda à prima, tertia à secunda, quarta à tertia & sic deinceps, atque residuæ divisæ per respectivas differentias ordinatarum AB, $1A1B$; $1A1B$, $2A2B$; $2A2B$, $3A3B$, &c. habebuntur quinque æquationes, in quibus singulis A erit ex una parte sola, & si in reliquis membris, pro singulis $BL - 1B1L$; $BM - 1B1M$; $BN - 1B1N$, & sic deinceps, divisis per $AB - 1A1B$, scribantur Q, R, S, T, V, in quinque residuis æquationibus, & eæ eodem modo tractentur ac sex primæ, sequentes scilicet ab antecedentibus subducendo, relinquentur quatuor novæ, quæ per respectivas $Q - Q1$, $Q1 - Q2$, $Q2 - Q3$, $Q3 - Q4$ dividantur & pro $R - R1 : Q - Q1$; $S - S1 : Q - Q1$; $T - T1 : Q - Q1$; $V - V1 : Q - Q1$; scribantur r, s, t, u; item pro $R1 - R2 : Q1 - Q2$; $S1 - S2 : Q1 - Q2$, &c. $r1, s1, t1, u1$. Pro $R2 - R3 : Q2 - Q3$; $S2 - S3 : Q2 - Q3$, &c. $r2$, $s2$, $t2$, $u2$; & sic porro eodem ordine, & hæ subductiones ac divisiones continuentur usque dum unica tantum supersit æquatio, poterunt in quantitatibus datis omnes A, L, M, N, O, P, &c. exhiberi, aut saltem omnes excepta ultima P, quæ arbitrariæ magnitudinis est, nam factis debitis reductionibus invenietur

$O = -P\omega.$
$N = -O\tau - P\mu.$
$M = -N\sigma - O\theta - P\upsilon.$
$L = -Mr - Ns - Ot - Pu.$

$A = LQ + MR + NS + OT + PV.$ In his æquationibus est $dLB : dAB = Q$; $dMB : dAB = R$; $dNB : dAB = S$, $dOB : dAB = T$; $dPB : dAB = V$. Sic $d1L1B : d1A1B = Q1$; $d1M1B : d1A1B = R1$; $d1N1B : d1A1B = S1$, &c. Nec non $d2L2B : d2A2B = Q2$; $d2M2B : d2A2B = Q2$; &c. Ubi notandum literam d cuilibet ordinatæ præpositam significare differentiam, inter hanc ordinatam ipsique proximam versus

sus C in eadem curva; reliquæ quantitates sic etiam facile definiuntur, scilicet:

$r = dR : dQ; r1 = dR1 : dQ1$, &c.			
$s = dS : dQ; s1 = dS1 : dQ1$, &c.	$\sigma = ds : dr; \sigma1 = ds1 : dr1$ &c.		
$t = dT : dQ; t1 = dT1 : dQ1$; &c.	$\theta = dt : dr; \theta1 = dt1 : dr1$ &c.	$\tau = d\theta : d\sigma; \tau1 = d\theta1 : d\sigma1$	
$u = dV : dQ; u1 = dV1 : dQ1$; &c.	$\upsilon = du : dr; \upsilon1 = du1 : dr1$ &c.	$\eta = d\upsilon : d\sigma; \eta1 = d\upsilon1 : d\sigma1$	$\omega = d\eta : d\tau$

Hoc loco litera *d* significat differentiam inter magnitudinem, cui præfigitur & alteram eadem litera, sed cum unitate adscripta indicatam, sic $dR = R - R1$, $dQ = Q - Q1$; $dR1 = R1 - R2$, & sic de reliquis. Inventis ita valoribus ponderum A, L, M, N, O, &c, iidem substituendi sunt in æqualitate $A.DE = L.FE + M.GE + N.HE + O.IE + P.KE$, atque sic per ordinatas FE, GE, HE, IE, KE, &c. & alias datas quantitates assignari potest ubique ordinata DE curvæ CDA per data puncta A, 1A, 2A, &c. transeuntis. Quod erat inveniendum.

Coroll. I. Curva genita CDA ejusdem semper est gradus cum curva gradus altissimi ex generatricibus CFL, CGM, CHN, &c.

Coroll. II. Area genitæ CDA ex areis generatricium semper inveniri potest. Est enim generaliter $A.CDE = L.CFE + M.CGE + N.CHE + O.CIE + P.CKE$. Unde, si hæ areæ curvarum generatricium sint quadrabiles, etiam figura genita quadrabilis erit.

Coroll. III. Si curvæ genitrices sunt generis parabolici, earum areæ sunt quadrabiles, ac proinde etiam genita quadrabilis existet: cum igitur pro generatricibus curvæ quæcunque eligi possint, atque adeò curvæ quadrabiles, inde clarum est omnes curvas per appropinquationem quadrabiles esse, tot enim, quot libuerit, in ea possunt puncta assumi, & per ea curva quadrabilis duci, cujus area curvæ propositæ areæ quam proxime æqualis erit.

Coroll. IV. Imò omnis curva per appropinquationem rectificari potest. Curvarum enim rectificatio ad quadraturas reducitur, quæ per præcedens corollarium, per appropinquationem, semper habentur. Idem intelligendum de centris gravitatis figurarum & solidorum, tum etiam de hisce solidis ipsis aliisque. Hæc enim omnia quam proxime vero haberi queunt.

Coroll. V. Ex hisce etiam cognoscitur *maximus* punctorum datorum numerus, per quæ curva dati gradus duci potest. Hic enim numerus *est semissis producti ex exponente gradus curvæ in eundem exponentem ternario auctum.* Hoc modo scimus lineam primi gradus, seu rectam, non nisi per 2. puncta, positione ut libet data, duci posse; est

enim

enim $2 = \frac{1.4}{2}$, sectionem conicam per quinque, nam $5 = \frac{2.5}{2}$. Curvam tertii gradus per novem, nam $9 = \frac{3.6}{2}$.

Fig. 156. *Aliter*. Loco generatricium assumi possunt lineæ rectæ AF, 1A1F, 2A2F, &c. inter se parallelæ, & quemlibet angulum cum axe CA continentes atque, necessitate ita postulante, supra axem producendæ, ut schema ostendit. Sint ergo puncta, per quæ curva duci debet B, 1B, 2B, &c. C. Per B agatur BN æquidistans AC, & ex singulis punctis datis B agantur perpendicula BA, 1B1A, &c. producenda sursum in 1O, 2O, &c. deinde ducta ubilibet recta MG parallela AB obliquas AF secante in punctis, G, H, I, K, L, &c. & axem AC in E. Quibus peractis fiat ubilibet MD = G. EG + H. EG. EH + I. EG. EH. EI + K. EG. EH. EI. EK + L. EG ... EL, in qua valores assumtarum G, H, I, K, L sunt definiendi sequenti ratione. Si punctum E cadit in A, linea EG evanescet, & reliquæ HE, IE, &c. supra axem erunt, verum quoniam EG jam in punctum A contracta nullescit, & in omnia reliqua membra influit, erit MD in BA nulla. Sin vero E cadit in punctum 1A, fiet EG tunc = 1A1P, & EH = o, adeoque eo casu, quo MD fit 1O1B, erit 1O1B = G. 1A1P, seu G = 1O1B : 1A1P. dicatur G1 = 2O2B : 2A2P, G2 = 3O3B : 3A3P, &c. Porrò si punctum E cadit in 2A, fiet MD = 2O2B, & EG = 2A2P, HE = 2A2Q, & IE = o, ergo 2O2B = G. 2A2P + H. 2A2P. 2A2Q, 3O3B = G. 3A3P + H. 3A3P. 3A3Q + I. 3A3P. 3A3Q. 3A3R, atque ita deinceps; ex quibus omnibus sequens resultat tabella, postquam scilicet singulæ æquationes ad respectivas AP applicatæ fuerunt:

G(= 1O1B : 1A1P) = G
G1(= 2O2B : 2A2P) = G + H. 2A2Q
G2(= 3O3B : 3A3P) = G + H. 3A3Q + I. 3A3Q. 3A3R
G3(= 4O4B : 4A4P) = G + H. 4A4Q. + I. 4A4Q. 4A4R + K. 4A4Q. [4A4R. 4A4S
&c. &c. &c. &c.

Si porro prima à secunda, secunda à tertia, tertia à quarta, atque ita porro subducantur, erit G1 − G = H. 2A2Q; G2 − G1 = H. 3A3R + I. 3A3Q. 3A3R; &c. Et ponendo *d*G, *d*G1, *d*G2 pro G1 − G, G2 − G1, G3 − G2, &c. fient H = *d*G : 2A2Q; H1 = *d*G1 : 3A3R; H2 = *d*G2 : 4A4S; &c. & I = *d*H : 3A3Q; I1 = *d*H1 : 4A4R; &c. ac denique K = *d*I = 4A4Q. Et sic porrò; nam ex hisce continuationis lex satis patet. Inventi valores magnitudinum G, H, I, K, &c.

K, &c. in superiori æqualitate MD = G. GE + H. GE. HE + I. GE. HE. IE + K. GE. HE. IE. KE, &c. substituantur, dabitur sic ipsa MD in lineis GE, HE, IE, KE, LE, &c. & magnitudinibus datis, atque adeò punctum D in curva quæsita. Quod erat secundo inveniendum.

Coroll. I. Si rectæ AF, 1A1F, &c. angulo semirecto ad AC inclinatæ sunt, provenit casus secundus hujus problematis ab Illustr. Newtono solutus Lemm. V. Lib. III. Princ. Phil. Nat. in ejus solutione enim a, b, c, d, e, f, &c. idem prorsus sunt cum G, H, I, K, L, &c.

Coroll. II. Iisdem positis, quæ in præcedenti corollario, si intervalla singula A1A, 1A2A, 2A3A, &c. sint æqualia & dicantur p, & differentiæ ordinatæ AB, prima, secunda, tertia, &c. erunt $G = \delta : p$; $H = \delta 2 : 2.pp$; $I = \delta 3 : 2.3.p^3$, &c. quod congruit solutioni Newtonianæ primi casus in Lemmate citato.

Coroll. III. Si insuper AE vel EG dicatur z, DE, u, & $AB = y$, erit $u = y - Gz - H.(zz - pz) - I.(z^3 - 3pzz + 2ppz) - K.(z^4 - 6pz^3 + 11ppzz - 6p^3z)$ — &c. & area $ABDE = yz - \frac{1}{2}Gzz - H.(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}pzz) - I.(\frac{1}{4}z^4 - pz^3 + ppzz) - K.(\frac{1}{5}z^5 - \frac{3}{2}pz^4 + \frac{11}{3}ppz^3 - 3p^3zz)$ — &c. Hoc loco enim y est constans, & z ac u sunt variabiles. Hinc, si p sunt indefinite parvæ, erunt singulæ $p = dz$, & ipsæ δ, $\delta 2$, $\delta 3$, &c. hoc casu fient dy, $-ddy$, $+dddy$, $-d^4y$, &c. & in præcedenti serie membra omnia, quæ p continent, evanescent, totaque series abibit in $yz - \frac{1}{2}Gzz - \frac{1}{3}Hz^3 - \frac{1}{4}Iz^4 + \&c. =$ areæ ABDE, atqui sunt $G = \frac{dy}{dz}$, $H = \frac{-ddy}{2.dz^2}$, $I = \frac{+dddy}{2.3\,dz^3}$; &c. ergo area $ABDE = yz - \frac{zzdy}{2dz} + \frac{z^3ddy}{2.3dz^2} + \frac{z^4dddy}{2.3.4dz^3} + \&c.$ Quæ est ipsissima series universalis pro quadraturis, quam Celeb. Joh. Bernoulli in Actis Lips. 1694. exhibuit, quamque haud dubie ex alio fundamento elicuit.

Cæterum, loco rectarum transversalium AF, 1A1F, curvæ quæcunque parallelæ assumi possunt, vel una eademque curva axem in linea CF, verticem verò successive in punctis diversis ipsius CF habens.

X. *De velocitate liquorum per foramina quæcunque ex vasis erumpentium.* In Propositione XXXII. Lib. II. demonstravimus quidem post Clar. Varignonium aliosque celeritates liquorum ex vasis effluentium in subduplicata esse ratione altitudinis liquorum supra foramina vasis aquam emittentia, sed non demonstravimus, nec quisquam alius quod sciam, *aquam aliumve liquorem ea velocitate ex vase erum-*

pere, eadem constanter manente aquæ altitudine supra foramen, *quam aquæ guttula orificio proxima acquirere potest casu accelerato ex altitudine liquoris supra orificium*. Nam hoc principium, instar hypotheseos, supposuerunt Torricellius, Borellus, Gulielminus aliique, atque exinde recte deduxerunt, aquas eodem tempore per foramina æqualia effluentes, seu etiam celeritates effluxus in subduplicata esse ratione altitudinis aquarum supra foramina. Sed hæc suppositio tantæ non videtur evidentiæ, ut nulla demonstratione egeat; nam præterquam quod Celeb. Newtonus, Propos. XXXVII. Lib. II. Princ. Math. primæ editionis, demonstrare conatur, aquam ea cum velocitate erumpere ex vasis, quâ motu suo in altum converso ad dimidiam altitudinem aquæ supra foramen evehi possit, sed quam propositionem in novissimis editionibus omisit. Torricellius suppositioni suæ, non propter evidentiam, sed potius propter consensum ejus, cum experientia acquievit.

Fig. 157. Esto vas quodcunque BFC aquæ vel cujusvis alius liquoris homogenei plenum, F foramen ejus, FA altitudo aquæ supra foramen F. Concipio columnam aqueam Ap per temporis tractum indefinite parvum dt, uniformiter urgere particulam aquæ infinitesimam pF, eo scilicet tempusculo, quo hæc particula, quam p nominabimus, proprio pondere seu gravitate, longitudinem Ff particulæ pF seu p æqualem acquirere potest celeritatis gradum infinitesimum u. Et sint g signum gravitatis naturalis, qua singula corpora apud nos agitantur, A altitudinis aquæ AF, & denique V velocitatis, qua per foramen F erumpit; M massæ tempusculo dt effluentis, ac m massa particulæ pF. Hisce positis per §. 31. pondus columnæ Ap vel AF exponetur per A.F.g; & pondus elementi pF per p.F.g. Sed hæc facta sunt ut solicitationes acceleratrices motus M.V & $m.u$, tempusculo dt generantes; idcirco habemus (§. 130.) A.F.$g.dt$: p.F.gdt = M.V : $m.u$, id est, A.g : $p.q$ = M.V : $m.u$; atqui M : m = $\frac{1}{2}$Vdt : $\frac{1}{2}udt$ = V : u ex natura motus accelerati in fluidis, ergo Ag : pg = VV : uu, atqui $2pg$ (§. 150.) = uu, ergo VV = 2.A.g, hoc, est velocitas V, quâcum aqua per foramen F erumpit (§. 150.) ea est, quam particula infinitesima aquæ pF acquirere posset motu naturaliter accelerato per descensum ex altitudine A seu AF. Quod erat demonstrandum.

Atque hinc jam tutissime deducitur, *quantitates aquæ per idem vel æqualia foramina effluentis, vel etiam celeritates ejus, esse in subduplicata proportione altitudinum.*

XI. Ca-

XI. Capite XX. Lib. II. exposui generalem theoriam gravitatis variabilis, cum scilicet corpora solicitantur secundum directiones quascunque uniformi tamen lege procedentes, propterea considera-vi has directiones contingere curvam quamlibet, vel, quod eodem recidit, supposui easdem directiones curvæ cuicunque pro libitu assumtæ normales esse, ad id ut lex continuitatis in hisce observaretur. Sed, quia solutio problematis in propositione LXXVI. evoluti ea est, in quam primum incidi, ideo, quod plerumque accidere solet, ejus analysis geometrica paulo longior atque difficilior evasit. Verùm posteaquam hoc opusculum jam sub prælo esset, faciliorem paulo &, ni fallor, elegantiorem ejusdem problematis nactus sum solutionem, quam cum analysi ipsa vel potius demonstratione cum Benevolo Lectore hoc loco communicare placet. Esto curva quæcunque AMΩ mobili describenda, ac solicitationum gravitatis MX directiones MN ubique normales sint curvæ cuicunque AY*y* descriptæ evolutione BN, quam proinde directiones MN ubique contingent. Tangenti AB sursum productæ in Δ curvæ BN in B, agatur per A perpendicularis indefinita CAV, & in quadrante CKΦ centro A & radio quocunque descripto ductis AI & AK radiis cum AC angulos CAI, CAK continentibus æquales angulis BA*a*, NMP, in quibus lineæ AB, MN curvæ AMΩ occurrunt, agantur rectæ I*a*, KQ parallelæ AC & producantur usque ad occursum in *d* & L cum hyperbola O*d*T inter asymptotas ΔA, AV descripta. Circa axem verò AB descripta sit curva quædam DE hâc lege, ut abscissa ejus AF æquet ubique homologam interceptam YM inter curvam AY & datam curvam AM mobili describendam, ordinatæ verò FE ordinatam ΔO in hyperbola abscissa ejus AΔ posita = MN. Et, si mobile incedat in medio resistente, cujus resistentiæ sint in composita ratione densitatum & duplicatæ celeritatum, fiat in hyperbola quadrilineum *d*DST vel *d*DΣΘ æquale superficiei cylindricæ, cujus basis arcus AM curvæ describendæ, quæ cylindrica superficies oritur, si in singulis punctis arcus AM ad ejus planum perpendiculares erigantur proportionales densitati medii D, in respectivis curvæ punctis, inservietque quadrilineum *d*S descensui mobilis ex A in M, alterumque *d*Σ ascensui ejusdem mobilis ex M in A. Hisce præparatis, Fig. 158.

Dico velocitatem mobili in M *acquisitam post descensum per arcum* AM *fore ad celeritatem initialem in* A *in composita ratione, ex hisce tribus* Aa *ad* AQ, *seu reciproca sinus anguli* NMP *ad sinum anguli* BA*a*, *ex* Aa *ad* AG, *seu abscissæ minoris ad majorem quadrilinei hyper-*

 bolici

bolici aGHd: *æqualis area* DEFA, *ac denique ratione* AD *ad* AS *vel* AΣ.

Demonstr. 1°. Exponant, sicut in §. 607. MR vel *m*R radium evolutæ curvæ AM in puncto M vel *m* & MX solicitationem gravitatis mobile secundum MN urgentem, & agatur XZ parallela tangenti curvæ MP in puncto M; eruntque triangula AKQ, MXZ & M*μm* similia, posteaquam centro *v* arculus *mμ* descriptus fuerit, cum in triangulis rectangulis AKQ, MXZ, angulus AKQ alternus ipsius KAC (constr.) æqualis sit angulo PMX, vel ejus alterno MXZ; hinc ZX : MZ = KQ : AQ.

2°. Ducta per *m* alia tangente *mp*, anguli recti RMP & R*mp* præbent *nmp* + *nm*R = NMP + NMR, & KA*k* (= *nmp* − NMP) = NMR − *nm*R = R*mv* − *nm*R, R*mv* + NMR = M*vm* − MR*m*. Ergo (§. 129.) $\frac{Kk}{KA}$ (vel propter triangulorum AKQ & K*kx* similitudinem) $\frac{Qq}{KQ} = \frac{m\mu}{mv} - \frac{Mm}{RM}$, atque adeò $\frac{Mm}{MR} = \frac{m\mu}{MN} - \frac{Qq}{KQ}$. Ducantur rationes M*m* : MR; *mμ* : MN, & Q*q* : KQ in sequentes, quæ (num. 1. hujus) omnes inter se æquales sunt ZX : MZ; M*μ* : *mμ* & KQ : AQ, prima in primam, secunda in secundam, &c. fietque ZX. M*m* : MZ. MR = M*μ* : MN, − Q*q* : AQ. Hæ verò postremæ rationes ducantur etiam pari ordine in hæc sequentia rectangula A*a*. *ad*; AΔ. ΔO; AQ. QL, quæ in hyperbola omnia inter se æquantur, eritque A*a*. *ad*. ZX. M*m* : MZ. MR = ΔO. M*μ* − QL. Q*q* (constr.) = FE. F*f* − QL. Q*q*.

3°. Significent porrò AV celeritatem in M acquisitam, V*u* ejus elementum, R verò resistentiam medii in M & D, ut antea ejus densitatem; & hisce positis (§. 607. num. 11.) habetur, AV. V*u* = ZX. M*m* ∓ R. M*m*, seu ducendo unam partem in A*a*. *ad*, alteramque in AV. VW, reperietur A*a*. *ad*. ZX. M*m* ∓ A*a*. *ad*. R : M*m* = AV^2 : WV. V*u*. Verùm, cum (secundùm hypothesin) R sit ut D. AV^2, fiat A*a*. *ad*. R = D. AV^2; eritque AV^2. WV. V*u* = A*a*. *ad*. ZX. M*m*. ∓ D. AV^2. M*m*, quia verò (§. 154.) AV^2 = MZ. MR, applicando præcedentem æquationem ad hanc alteram, scilicet membra ejus AV^2 continentia ad hoc quadratum AV^2, & reliquum ad MZ. MR, fiet WV. V*u* = A*a*. *ad*. ZX. M*m* : MZ. MR, ∓ D. M*m*. Atqui num. 2. in fine reperimus jam A*a*. *ad*. ZX. M*m* : MZ. MR = FE. F*f* − QL. Q*q*; ergo WV. V*u* = FE. F*f* − QL. Q*q* ∓ D. M*m* (vel, quia D. M*m* per constr. æquatur vel S*s*. ST ut in descensu, aut − ΣΘ. Σσ, ut in casu ascensionis, cum quadrilinea *d*S & *d*Σ singula æquentur, (constr.) omnibus D, M*m*, quæ in arcu curvæ describendæ AM continentur)

WV.

$WV.Vu = FE.Ff - QL.Qq - ST.Ss$ (vel $\Sigma\Theta.\Sigma\sigma$). Unde, cum hoc idem eveniat respectu cujusvis alius curvæ elementi, erit $dDVW = AFED - aQLd = dDST$ ($dD\Sigma\Theta$), vel, quia (constr.) quadrilineum $aGHd$ æquatur areæ $AFED$, $= aGHd - aQLd = dDST$ ($dD\Sigma\Theta$). Hæc enim quadrilinea omnia evanescunt cum punctum M cadit in A, vel punctum K in I. Idcirco ratio AV ad AD (§§. 605, 606.) componetur ex directa aA ad GA & duabus reciprocis rationum QA ad aA, & AS vel $A\Sigma$ ad AD, ac propterea velocitas acquisita in M est ad velocitatem in A seu $AV : AD = aA.aA.AD : GA.QA.SA$ (ΣA). Quod erat demonstrandum.

Iisdem positis *erit solicitatio gravitatis* MX *secundum* MN *ad solicitationem* AX *in puncto* A *secundum* AB *in composita ratione ex directa duplicata ratione* AV *ad* AD, *& inversa rectanguli ex* MR *in sinum anguli* NMP *ad rectangulum ex* AR *in sinum anguli* BAA, *id est*; $MX : AX = (AV^2 : MR.AQ) : (AD^2 : AR.Aa)$.

Nam, quia (§. 154.) $AV^2 = MZ.MR$, vel $AK.AV^2 = AK.MZ.MR$ (vel propter triangula similia AKQ & MXZ rectangulum AQ. MX æquatur rec-lo AK.MZ) $= AQ.MX.MR$, & $AK.AD^2 = Aa.AX.AR$, erit omnino $AQ.MR.MX : Aa.AR.AX = AV^2 : AD^2$; atque adeo $MX : AX = (AV^2 : MR.AQ) : (AD^2 : AR.Aa)$. Idcirco erit etiam $MX : AX = Aa^3.AD^2.AR : AQ^3.AG^2.AS^2$ ($A\Sigma^2$). MR. Qui est canon generalis, quoties resistentiæ sunt ut D in AV^2, sin verò hæ resistentiæ sint generaliores, ut $D.AV^h$, existente h numero quolibet rationali, ratio AD ad AS obtinebitur methodo jam §. 622. exposita. In vacuo fit hæc ratio AD ad AS æqualitatis, eoque casu erit $MX : AX = Aa^3.AR : AQ^3.AG^2.MR$.

XII. *Iisdem adhuc positis* D *est generaliter, ut* $(3KQ : 2AQ.MR) - (QK : 2AK.MN) - (P : 2MX) - (R\Gamma : 2MR^2)$ *& resistentia ad gravitatem, seu* $\pm R : MX = (3KQ : 2AK) - (R\Gamma.AQ : 2AK.MR) - (KQ.AQ.MR : 2AK^2.MN) - (P.AQ.MR : 2AK.MX)$. In quibus formulis $R\Gamma$ significat radium osculi in puncto R curvæ RR, cujus evolutione curva data AM describitur, & P significat exponentem rationis, quam elementum magnitudinis MX gravitatis in M secundum MN, habet ad elementum Mm curvæ mobili describendæ. Fig. 158.

Demonstrationem horum duorum canonum non addo, cum ea ad præcedentium imitationem & normam facile haberi queat. Sed, ut eorum consensus cum aliorum inventis appareat, eos casibus particularibus nonnullis Celeberrimorum virorum Newtoni & Joh. Bernoullii applicabimus.

1°. Sit curva AM ipse circulus αKC mobili describendus à gravitate uniformiter agente secundum directiones ipsi AQ parallelas, quo casu P, & RΓ evanescunt, MN fit infinita, & MR = AK, propterea erit D, ut 3KQ : 2AQ. AK, hoc est, sicut tangens anguli KAQ & resistentia ad gravitatem, ut 3KQ ad 2AK, plane ut laudatissimi Autores invenerunt.

2°. Si loco curvæ AM sumatur curva, in quâ directiones gravitatis uniformis MN parallelæ sint inter se, erit D ut (3KQ : 2AQ. MR) − (RΓ : 2MR²), & $\frac{\pm R}{MX} = (3KQ : 2AK) - (R\Gamma . AQ : 2AK . MR)$. Nam, quia MN in hisce suppositionibus sunt infinitæ, singulæ fractiones, in quarum denominatoribus hæ MN reperiuntur, evanescent. Vocentur itaque ordinatæ curvæ datæ y, secundum quas gravitas uniformis operatur, abscissæ respectivæ x, radius curvaturæ in M seu MR = r, existentibus Mμ = dy & $m\mu = dx$, positis scilicet omnibus MN inter se parallelis, ratio vero RΓ : MR = $dr : ds$, facto elemento curvæ M$m = ds$. Adeoque in hisce symbolis erit D ut $\frac{3dy}{2rdx} - \frac{dr}{2rds}$, & $\frac{\pm R}{G} = \frac{3dy}{2ds} - \frac{dr\,dx}{2ds^2}$. Sed existentibus dx constantibus erit $r = ds^3 : dxddy$, & $dr = \frac{3dsdy}{dx} - \frac{ds^3dddy}{dxddy^2}$, quibus valoribus in formulis substitutis resultat D, ut $dddy : 2dsddy$, & ± R : G = $dsdddy : 2ddy^2$ qui duo postremi canones ad amussim conspirant cum formulis Celeb. Newtoni Propos. X. Lib. II. Edit. novissimæ Princip. Phil. Nat. Nam, si in hisce nostris loco dy, ds, ddy & $dddy$ ordine substituantur Qo, $o\sqrt{1+QQ}$, 2Roo, & 6So^3, quæ in expressionibus Newtonianis elementis illis æqualia sunt, erit omninò D, ut $\frac{3S}{2R\sqrt{1+QQ}}$, & $\frac{\pm \text{Res.}}{\text{Grav.}} = \frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$. Prorsus ut habet Newtonus loco citato.

Fig. 38. XIII. In demonstratione Propos. XXV. Lib. I. §. 167. irrepsit error, dum elementum ordinatæ ΛE tanquam positivum spectavimus, idcirco in progressu demonstrationis illius signa ipsius $\Delta\xi$ ubique sunt invertenda, quo facto invenietur G = $\frac{1}{DE^3} + \frac{(-DE.E\Delta.MG^2 + 2.E\Omega.E\Delta.MG^4 + DE.E\Omega.AL^4).mn.\Delta E}{E\Omega.AG^2.DE^4}$. Ponendoque HE = A ∓ e, atque adeo ΔE = ΛE = HE : B, & EΩ = B. HE : B² − C. HE,

HE, ubi $B = dA : dz$; $C = dB : dz$ & $DE = z$, item $AL = r$, ac $rr - ee = ss$, hæc apposita formula factis in ea substitutionibus valorum linearum DE, EA. EΩ, prodibit æquatio circa finem §. 169. exhibita. Verum, quia nonnihil elegantior, ut mihi videtur, solutio ejusdem problematis sese mihi obtulit, eam hoc loco apponere placet. Circa rectam AC, tanquam axem, descripta sit curva quæcunque ΠB, radioque etiam pro lubitu sumto AC, atque adeo centro C circulus AG, cujus tangens in A erit linea recta indefinita OAΠ, ac per quodlibet punctum B curvæ ΠB ductis tangente BV ordinataque BR producenda usque ad occursum ejus cum circulo in G, dividatur subtangens RV in S, ut RS sit ad totam RV ut 1 ad numerum quemcumque rationalem n, ac jungatur SG, tum ducatur per A recta AL cum CAa continens angulum PAQ æqualem, ubique respectivo angulo GSR, atque hoc idem si factum fuerit cum tangente & subtangente ad punctum curvæ Π, resultet recta Aλ, quemadmodum in ordine ad punctum B curvæ ΠB provenit AL. Exponat AI celeritatem mobilis curvam AN describentis in puncto A existente centro solicitationum centralium D, per punctum I ducta indefinita IK parallela AC, sumatur in Aλ segmentum $Aa = A\Pi$ & per a agatur aK parallela AI, rectæ IK conveniens in K, per quod punctum descripta intelligatur hyperbola KM inter asymptotas Aa & AI. Porro in AL sumta AQ æquali respectivæ ordinatæ RB curvæ ΠB ducatur QP parallela AΠ, quæ producta occurrat hyperbolæ in M, ac denique in ordinata MO per hoc punctum M ad asymptotam AO ducta ac deorsum producta, fiat OF æqualis differentiæ ordinatarum AΠ, RB & punctum F erit in scala celeritatum mobilis in curva altera AN incedentis. Hæc autem curva AN ita comparata est, ut radii vectores $AD = A\Pi$, & $ND = RB$, per ejus terminos ducti, angulum ADN contineat, qui sit ad angulum in circulo ACG, ut 1 ad numerum qui antea n. Esto Nq curvæ AN tangens in N, super quam cadat perpendicularis Dq, ac centro D descripti sint arcus EN arculusque np, positoque in fig. 159. angulo GCg ad ang. $NDn = n : 1$ agatur gb parallela GB. Fig. 160.

Demonstr. Quia angulus infinitesimus NDn est ad GCg ut 1 ad n, seu (constr.) $= RS : RV$, & (§. 129.) arculus pn ad Gg in composita ratione anguli NDn ad angulum GCq, vel 1 ad n, seu RS ad RV, & radii DN vel ordinatæ RB ad radium GC, erit $pn : Gg = RS.RB : GC.RV$; atqui est $Gg : b\beta\ (= GC : GR) = GC.RV : GR.RV$;

Fig. 131.

Fig. 132.

Fig. 135.

Fig. 137.

EMENDANDA.

Cum, propter absentiam à Typographica officina & locorum intervallum typorum correctioni egomet attendere non potuerim, quod in hujus generis operibus vitari vix potest, accidit, ut nonnulla sphalmata in hanc editionem irrepserint, quorum ea, quæ sensum turbare possent, ut calamo saltem corrigere velit Benev. Lector etiam atque etiam rogo priusquam Opusculi lectionem incipiat. Reliquos vero minoris momenti errores, qui forte contra dictionis puritatem mihi materiis ipsis magis attento exciderunt, Lector ipse facile emendabit me non monente, eosque proinde ejus humanitati corrigendos relinquo.

Pag. 9. lin. 23. Molis lege Motus.
Pag. 10. lin. 9. leg. rectæ AE à solicitationibus &c.
Pag. 16. lin. 13. PR leg PA.
Pag. 19 lin. 31. leg. trahente.
Pag. 26. lin. 4. BF leg. BT.
Pag. 31. l. 15. leg. superficiem componentes in *ty* incurvatam.
Pag. 39. l. 32. minor. leg. major. Ibid. l. ult. leg. $A = aa : \sqrt{aa+mm}$ fiet $\sqrt{aa+mm} = a$.
Pag. 40. lin. 2. leg. $x^{\alpha}y = 1$. lin. 4. leg. $ydx = x^{-\alpha}dx$. Et lin. 25. post *tenacitatem fili in* A, adde, *per* A.
Pag. 43. l. 19. A : BC. leg. A : B*b*. lin. 24. $\int bf - \int Mm$ leg. $\int bf = \int Mm$. Ibid. lin. 25. Z*y* — Nβ, leg. Z*z* — Nβ.
Pag. 45. lin. 4. $m^3dx = aamdm$ leg. $m^3dx = -aamdm$.
Pag. 46. lin. 2. — *anndm* leg. — *nndm*.
Pag. 55. l. 2. Si lege Sic. Pag. 58. l. 9. Nβ.E*e*, leg. N*α*. E*e*.
Pag. 66. lin. 8. *α*L leg. *α*D. Ibid. l. 23. ang. FA*f* leg. FD*f*.
Pag. 71. lin. 9. Secundi leg. Primi. Pag. 75. l. 28. leg. æquidistantes.
Pag. 78. l. 15. + AB³z leg. AB²z. Pag. 80. l. penult. MAD leg. MAL.
Pag. 85. l. 22. leg. Prop. 24. Pag. 94. l. 28. E*e* leg. E*b*.
Pag. 98. l. 23. leg. supra solicitationem in B.
Pag. 110 l. 19. l. *Corporum*.
Pag. 114. l. 7. leg. *quæ erat communis ipsorum centri gravitatis ante occursum*.
Pag. 119. Propos. XLII, scrib. in margine Fig. 53.
Pag. 121. l. 16. A+X+B. leg. A+X+Y+B.
Ibid. l. 24. leg. quam idem B à corpore A celeritate AD ipsum immediate impellente, accepisset.
Pag. 132. l. 4. EF leg. ET. Pag. 140. l. 16. leg gravitationis.
Pag. 145. l. 7. leg. Dani. Pag. 159. l. 20. leg. amplectenti.
Pag. 157. Prop. XIII. scrib. ad marg. Fig. 66.
Pag. 161. l. 20. in fin. QN, leg. PN. & lin. 28. leg. centro P.
Pag. 167. l. 23, 24 & 28. NE, leg. DE. Pag. 179. l. ult. quia, leg. cum.
Pag. 184. l. 12. dele, hians, l. 13. subtili, leg. subdiali seu externo
Ibid. l. 19. ad margines, leg. in circumferentia ejus.
Ibid. l. 37. marginum, leg. arginum.
Pag 190. l. 2. densitatis, leg. potestatis. Ibid. l. 19. permuta BF & GF.
Pag. 191. l. 13. dele posteriorem, & lin. 14. dele vel.
Pag. 195. lin. 27. ut densitates, lege proportionales.
Pag. 197. l. 3. lege, altitudini. Pag. 200. l. 26, $-\frac{2}{3}$ leg. $-\frac{1}{3}$.
Pag. 201. l. 6. leg. Quadrilinea, & lin. 7. leg. æqualia.
Pag. ead. l. 26. leg. Nam quia OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. proportionales sunt rec-lis OA. AC, O1A1C, O2A2C, &c. ideo hæc rec-la erunt in progressione arithmetica, atque adeo &c. sequendo ut habetur linea 30. post, atque adeo &c.
Pag. 203. l. pen. & leg. ut. Pag. 205. l. 5. leg. altitudo.
Pag. 209. l. 16. leg. *dδ*. Pag. 213. l. 14. leg. constructionem, *cf*, l. 14. demonstratam.
Pag. 218. l. 11. leg. FT. Pag. 219. l. 3. leg. datam rationem habebunt, quam &c.
Pag. 224. l. 27. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} - \frac{2}{3}x\sqrt{x})$ leg. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} : \frac{2}{3}x\sqrt{x})$. Pag. 225. l. 28. leg. *m* : 1.
Pag. 228. l. 3. dele quam. Pag. 230. l. 21. ABC leg. ADC.
Pag. 233. l. 21. leg. inclusum. Pag. 241. l. 13. leg. ELV. l. 17. leg. $LV = (aat - t^3) : aa$.
Pag. 242. l. 18. leg. rectæ AR. Pag. 244. l. 32. RM, leg. RA.
Pag. 245. l. 7. leg. *si præcedente modo basi* BR, *modo vertice* E *in directione* AE *id fiatur*.
Pag. 248. l. 3. à fine, lineæ FF, lege Circuli FF.
Pag. 250. l. 28. leg. = constanti. Pag. 251. l. 18. leg.

EMENDANDA.

leg. diametro. Ibid. l. 29. LS leg. L*s*. Pag. 269. l. 9. init. leg. *yy*; + *effdx* : *aa* + *yy*:

Pag. 262. l. 25. leg. + D3. Pag. 266. l. 29. leg. Tangentem Hyperbolæ.

Pag. 267. l. 2. leg. *dc*. Pag. 269. l. 10. leg. §. 464. lin. 21. leg. $x = aa : \sqrt{(aa - zz)}$.

Pag. 271. l. 1. leg. *ns*P. lin. 4. leg. Mμ. Pag. 273. l. 2. A*q* leg. N*q*.

Pag. 273. l. 33. leg. curva AC minus abscissa ejus.

Pag. 306. l. 5. M*lm* leg. L*lm*, & lin. 6. dele est.

Pag. 335. subter Fig. 134. in margine scribe etiam 135.

Pag. 313. l. 10. (MC = LN) leg. (MC — LN): AM. Pag. 214. l. 10. leg. OM. LN : AM.

Ibid. l. 19. SM. leg. OM; & lineis 23, 24, 27, 28. IM leg. OM.

Pag 319. l. 13. GB leg. GH. Pag. 321. l. 4. TA leg. TM.

Pag. 326. l. 7. summi leg. suam. Pag. 328. l. 14. $a^3 aau : cu$, leg. $a^3 - aau : cu$.

Ibid. l. 24. $\frac{ab}{b} du : u$, leg. $\frac{aa}{b} du : u$. Pag. 330. l. 14. $- t =$, leg. $t = \int (aadu : \&c.$

Pag. 332. l. ult. & seq. pro BK leg. ωK, in Fig. 132.

Pag. 335. l. 14. leg. In eadem DT producta sumatur ubique DN, quæ solicitationem tangentialem gravitatis in curvæ puncto D ex centrali derivatam significet, exponetque ND — DT, &c. Ibid. l. 30. leg. MNEC + el. areæ CTE.

Pag. 336. lineis 12, 13, + scribe —. Pag. 338. ad marginem Prop. 73. scribe Fig. 135.

Pag. 348. l. 29. BZX, leg. MZX. Pag. 349. l. 11. leg. occurrentibus.

Pag. 360. l. 2. $NM^2 : aa$, leg. $NM^2 . aa$. Pag. 365. l. ult. leg. ABIH = EKRF.

Pag. 366. l. 26. in D. DC : CQ, leg. in D = DC : CQ. Pag. 367. l. 27. sed, leg. sub.

Pag. 381. l. 9. CV, leg. OV. Pag. 383. l. 31. AD. A*d*, leg. 4AD. A*d*.

Pag. 390. l. 12. habebuntur, leg. dabunt. Pag. 392. l. 19. GI, leg. G1.

Pag. 393. l. 13 post, tertia, &c. adde $\delta, \delta 2, \delta 3$, &c. Ibid. l. 26. leg. $- \frac{z^4 dddy}{2.3.4.dz^3}$.

Pag. 395. l. 26. ordinatæ leg. ordinata. Pag. 396. l. 12, — *nm*R, Rωv, lege — *nm*R, — Rωv. Pag. 397. l. 1. leg. $\mp$ ST. S*s*, & lin. 3, 4. $\mp$ *d*DST.

Pag. 400. lin. 19. $e = A$, leg. $e - A$.

IN FIGURIS SUPPLENDA.

Fig. 33. Intersectio rectarum DV, *bf* vel arcus EIK signetur T.

Fig. 41. Initio lineæ punctis ductæ subter ES adscribatur *e*.

Fig. 117. Intersectio rectarum AP, Oβ notetur *f*, & linearum fa ac OK litera *b*. Et jungantur si placet, AC, *oc*.

Fig. 125. Jungatur MK.

Fig. 133. Lineæ subter DC punctis signatæ initio adscribatur *d*.

Fig. 138. Accidentale non verò ex rei necessitate est, quod BC transeat per punctum N, & ordinata IK radio osculi *m*R congruat.

Fig. 140. Subter F, G, scribatur L, & subter E, H, K, ita ut signa F, G, I idem punctum axis SB, & EHK idem punctum hyperbolæ TDH designent.



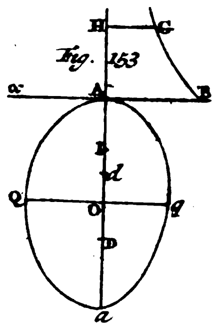


Fig. 153

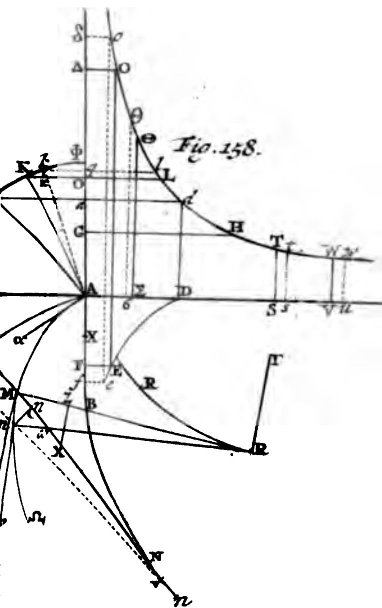


Fig. 158.